

Near Hagge circle 相關性質之研究

建國高級中學 張修展
指導老師：尤貴弘

Abstract

In this project, we study the following problems: Given an isosceles triangle ABC , for the pair (P, Q) , let the circular Ceva triangle of P be $\Delta A_1 B_1 C_1$, and the Pedoe triangle of Q be $\Delta A_2 B_2 C_2$, the symmetry point of A_1 to A_2 is A_3 , similarly defined B_3, C_3 . Let one of P, Q be a fixed point, find the trajectory of the other point to satisfy: the Orthocenter H of ΔABC and A_3, B_3, C_3 are on the same circle. We give proofs for the following cases.

- | | |
|---|---|
| (i) Take P as Orthocenter H of ΔABC | (v) takes P, Q is the same point |
| (ii) Take P as circumcenter O of ΔABC | (vi) Take Q as Orthocenter H of ΔABC |
| (iii) Take Q as circumcenter O of ΔABC | (vii) When taking P as a fixed point,
H, A_3, B_3, C_3 are on the same circle iff the
defining equation for Q lies on a polynomial
with degree at most six |
| (iv) Take P as a point on the circumcircle of
ΔABC | |

中文摘要

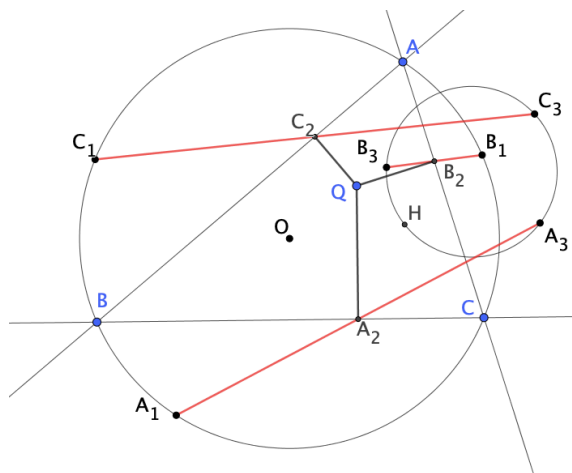
本研究討論給定不等腰三角形 ABC ，垂心為 H 。對於點對 (P, Q) ，令 P 的圓西瓦三角形為 $\Delta A_1 B_1 C_1$ ， Q 的佩多三角形為 $\Delta A_2 B_2 C_2$ ， A_1 對 A_2 的對稱點為 A_3 ，類似定義 B_3, C_3 ，且當 P, Q 其中一點為定點時，求另一點滿足： A_3, B_3, C_3, H 四點共圓的軌跡為何，並對於以下幾個情況給出證明。

- | | |
|---|----------------------------------|
| (i) 取 P 為 ΔABC 垂心 H | (iv) 取 P 為 ΔABC 外接圓上一點 |
| (ii) 取 P 為 ΔABC 外心 O | (v) 取 P, Q 為同一點 |
| (iii) 取 Q 為 ΔABC 外心 O | (vi) 取 Q 為 ΔABC 垂心 H |
| (vii) 當取 P 是定點時， Q 滿足 H, A_3, B_3, C_3 四個共圓的軌跡不超過 6 次 | |

1 簡介

1.1 原始問題

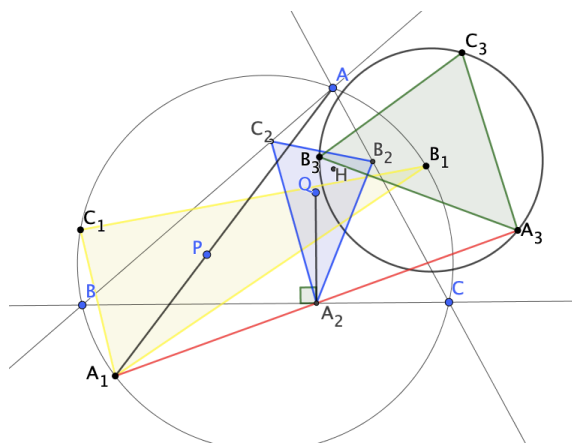
給定三角形 ABC ，外心為 O 和一點 Q ，令 O 的圓西瓦三角形為 $\triangle A_1B_1C_1$ ， Q 的佩多三角形為 $\triangle A_2B_2C_2$ ， A_1 對 A_2 的對稱點為 A_3 ，類似定義 B_3, C_3 ，則 A_3, B_3, C_3, H 四點共圓



這是我在 Nguyen Van Linh (2011)[6] 中看到的命題，此命題可以用簡單的相似三角形和線段比例證明，我發現若將 O, Q 其中一點改成某些特殊點，此命題將複雜不少，而作者也未深入討論相關的推廣，所以本文討論以下問題。

1.2 研究目的

本研究討論給定不等腰三角形 ABC ，對於點對 (P, Q) ，令 P 的圓西瓦三角形為 $\triangle A_1B_1C_1$ ， Q 的佩多三角形為 $\triangle A_2B_2C_2$ ， A_1 對 A_2 的對稱點為 A_3 ，類似定義 B_3, C_3 ，且當 P, Q 其中一點為定點時，求另一點滿足： A_3, B_3, C_3 ，三角形 ABC 垂心 H 四點共圓的軌跡為何？(Nguyen Van Linh 考慮的狀況是當 P 為三角形 ABC 的外心， Q 為任意點)



2 研究方法

2.1 一些定義與已知的性質

此處只寫出幾個較重要的定義和性質，更詳細的定義見附錄。

2.1.1 Definition (慣用代號)

(AB) 為以 AB 為直徑的圓； (ABC) 為三點 A, B, C 的外接圓； $(ABCDE)$ 為五點 A, B, C, D, E 的外接錐線； ∞_ℓ 為 ℓ 方向的無窮遠點。

2.1.2 Definition (有向角)

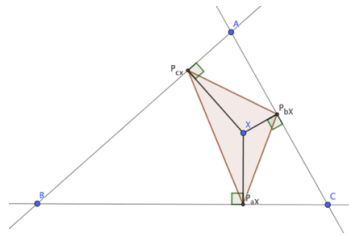
為了使共圓的角度計算更具一般性，本篇使用有向角。

定義 $\angle ABC$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 逆時針旋轉直到第一次和 $\overrightarrow{BC}$ 重合所轉過的角度，且所有有向角的運算皆在 $\text{mod } \pi$ 下進行

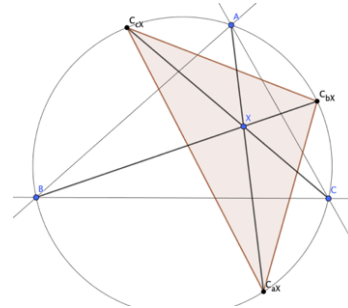
Remark 1. 為後續證明使用方便以下對於一點的佩多、圓西瓦三角形的三個頂點給出標號。

2.1.3 Definition (佩多三角形)

一點 X 分別對三角形 ABC 三邊 BC, CA, AB 做垂足 P_{aX}, P_{bX}, P_{cX} 所構成的三角形稱作 X -佩多三角形， X -佩多三角形的外接圓為 X -佩多圓。



(a) 2.1.3



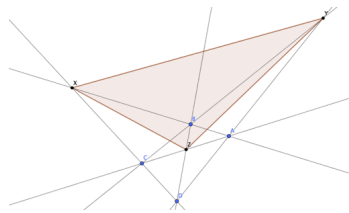
(b) 2.1.4

2.1.4 Definition (圓西瓦三角形)

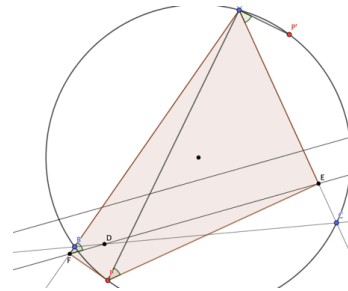
一點 X 和三角形 ABC ，直線 XA, XB, XC 分別交 (ABC) 於另外一點 C_{aX}, C_{bX}, C_{cX} 所構成的三角形稱作 X -圓西瓦三角形。

2.1.5 Definition (西瓦三角形)

平面上四點 A, B, C, D ，若 $AB \cap CD = X$, $AD \cap BC = Y$, $AC \cap BD = Z$ ，則稱 A, B, C, D 的西瓦三角形為 XYZ ，西瓦圓為 (XYZ) 。



(c) 2.1.5



(d) 2.1.6

2.1.6 Property

P 在三角形 ABC 外接圓上時， P 的對徑點 P' 之等角共軛點在 P -斯坦納線上。

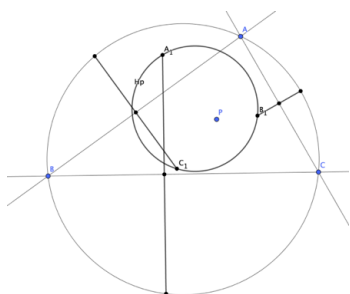
Proof. 如圖， P 對 AB, BC, CA 的垂足分別 D, E, F ，令 P -斯坦納線為 $\mathcal{L}$ ，知 P' 的等角共軛點 X 是無窮遠點，因此只需要證明 $AX \parallel \mathcal{L}$ ，又根據斯坦納線平行西姆松線，由以下等式即有 P' 的等角共軛點是 $\infty_{\mathcal{L}}$ 。

$$\begin{aligned} \angle(\mathcal{L}, AB) &= \angle(EF, AB) = \angle(EP, PA) = \angle(EP, AC) + \angle(AC, AP') + \angle(AP', AP) \\ &= \angle(AC, AP') = \angle(AX, AB) \end{aligned}$$

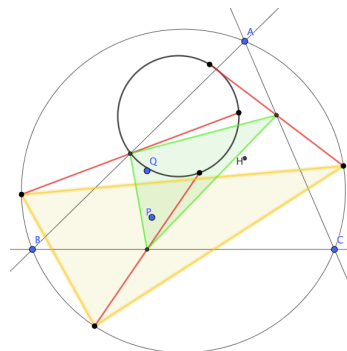
□

2.1.7 Definition (Hagge circle)

給定 $\triangle ABC$ ，其垂心 H 、一點 P ， A_1, B_1, C_1 分別是 C_{aP}, C_{bP}, C_{cP} 對 BC, CA, AB 的對稱點，稱 $(A_1B_1C_1)$ 為 P-Hagge circle，以下用 $\mathbb{H}(P)$ 表示。



(e) 2.1.7



(f) 2.1.8

2.1.8 Definition (Near Hagge circle)

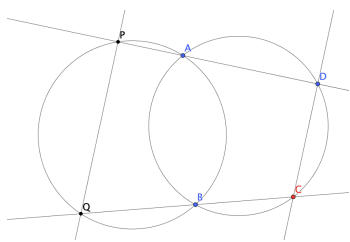
一組點對 (P, Q) ， P 的圓西瓦三角形 $C_{aP}C_{bP}C_{cP}$ ， Q 的佩多三角形 $P_{aQ}P_{bQ}P_{cQ}$ ，稱 C_{aP}, C_{bP}, C_{cP} 分別對 P_{aQ}, P_{bQ}, P_{cQ} 做對稱後的三點為 A_{PQ}, B_{PQ}, C_{PQ} ，這三點的外心為 $O[P, Q]$ ，稱 $(A_{PQ}B_{PQ}C_{PQ})$ 為 P,Q-Near Hagge circle，以下用 $\mathcal{H}(P, Q)$ 表示。

2.1.9 Property

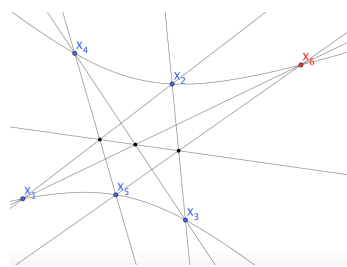
給定 $\triangle ABC$ 對於任意一點 P ， $\mathbb{H}(P)$ 通過 $\triangle ABC$ 垂心，令 P 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛點 P' ，則 $\mathbb{H}(P)$ 之圓心和 P' 的中點是 $\triangle ABC$ 的九點圓心。[1]

2.1.10 Theorem (Reim 定理)

$ABCD$ 四點共圓， $P \in AD$ ， $Q \in BC$ ，則 $PQ \parallel CD$ 若且唯若 $ABPQ$ 四點共圓。



(g) 2.1.10



(h) 2.1.11

2.1.11 Theorem (帕斯卡定理 Pascal theorem)

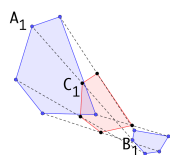
六點 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ 共錐線若且唯若 $X_1X_2 \cap X_4X_5, X_2X_3 \cap X_5X_6, X_3X_4 \cap X_1X_6$ 三點共線。

2.1.12 Theorem (艾可爾斯定理推廣 Echols' theorem[5])

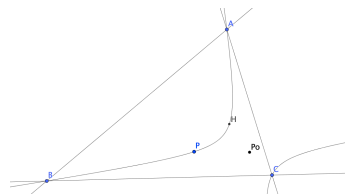
設 n 邊形 $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ 相似， $C_1C_2 \dots C_n$ 分別是 $A_1B_1, A_2B_2 \dots A_nB_n$ 上的點，且滿足

$$\frac{A_1C_1}{B_1C_1} = \frac{A_2C_2}{B_2C_2} = \dots = \frac{A_nC_n}{B_nC_n}$$

(此為有向線段) 則 $C_1C_2 \dots C_n$ 也與 $A_1A_2 \dots A_n, B_1B_2 \dots B_n$ 相似。



(i) 2.1.12



(j) 2.1.13

2.1.13 Definition (龐色列點 Poncelet Point[4])

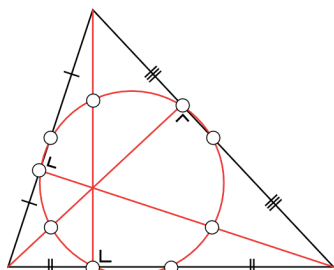
過 A, B, C, D 的等軸雙曲線中心為 A, B, C, D 的龐色列點。

2.1.14 Theorem

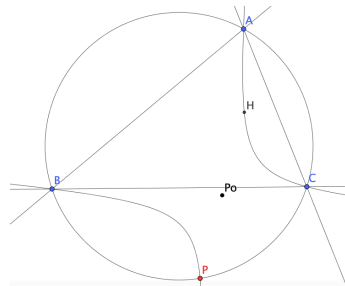
四點 A, B, C, D ，則 $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$ 的九點圓， A, B, C, D 分別關於 $\triangle BCD, \triangle CDA, \triangle DAB, \triangle ABC$ 的佩多圓及 $ABCD$ 的西瓦圓，這九個圓共於 A, B, C, D 的龐色列點 P_o 。

2.1.15 Definition (九點圓)

對於任意三角形，三邊的中點、三高的垂足、頂點到垂心的三條線段的中點，九點共圓。



(k) 2.1.15



(l) 2.1.16

2.1.16 Property

三角形 ABC 垂心 H ，一點 P 在其外接圓上，則 H, P 的中點是 $ABCP$ 的龐色列點。

Proof. 令 H, P 的中點是 P_o ， $\triangle PBC$ 的垂心是 H_a ，類似定義 H_b, H_c ，則 $AH \parallel PH_a$ ，又熟知

$$\overline{AH} = \frac{d(O, BC)}{2} = \overline{PH}$$

$HAPH_a$ 是平行四邊形， $\frac{A + H_a}{2} = P_o$

類似有 $\frac{B + H_b}{2} = \frac{C + H_c}{2} = P_o$ ， P_o 在 $\triangle ABC, \triangle BCP, \triangle ACP, \triangle ABP$ 的九點圓上，根據 Theorem 2.1.14， P_o 是 $ABCP$ 的龐色列點。 □

2.2 齊次座標方法

為了確定找出的軌跡和原命題的若且唯若關係，本文參考 Vladyslav Zveryk, The Method of Moving Points[10] 中計算動點對時間軌跡的方法，在下文中將自定義函數，並會在之後的 3.6, 3.7 中採用以下方法以確定一點滿足命題的軌跡多項式次數上限。

2.2.1 Definition

在實射影平面上，考慮齊次座標，滿足：

若 A 的座標為 $(x : y : z)$ ，且 x, y, z 不皆為 0，則

- (i) 若 $z \neq 0$ ， A 對應到直角坐標中的 $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ 。
- (ii) 若 $z = 0$ ， A 對應到通過原點和直角座標 (x, y) 的直線的無窮遠點。

因為 $(tx : ty : tz)$ 和 $(x : y : z)$ 對應到同一點，故此處使用 ":", 以凸顯比例性質。

2.2.2 Corollary

兩點 $(a_1 : b_1 : c_1), (a_2 : b_2 : c_2)$ 是同一點若且唯若 $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ 。

2.2.3 Corollary

實射影平面上直線方程式為 $ax + by + cz = 0$ ，其中 a, b, c 是常數， $(x : y : z)$ 是直線上點的座標，且知曲線的方程式皆可將直角座標上的方程式中 x, y 分別用 $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ 帶入對應，因此直角座標上關於 x, y 的多項式方程將對應到一個 x, y, z 的齊次多項式。

2.2.4 Definition

考慮對圓 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的配極變換 (polar transformation) Φ ，對於任意直線 $\ell : ax + by + cz = 0$ ，令 $\Phi(\ell)$ 對原點作對稱的像為 $\Phi(\ell)'$ ，則 $\Phi(\ell)' = (a : b : c)$ ，可將 ℓ 記做 $(a : b : c)$

Remark 2. 如此即可將點和直線視為同樣的東西處理，如此在計算多項式次數時將更為方便。

2.2.5 Theorem

$P_1 = (X_1 : Y_1 : Z_1), P_2 = (X_2 : Y_2 : Z_2), P_3 = (X_3 : Y_3 : Z_3)$ 三點共線 $\iff$

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{vmatrix} = 0$$

Remark 3. 把 Theorem 2.2.5 敘述中的「點」改成「線」，「線」改成「點」亦正確。

2.2.6 Theorem

所有從一個平面到這個平面自己的射影變換都能寫成：

$$(x : y : z) \mapsto (a_1x + b_1y + c_1z : a_2x + b_2y + c_2z : a_3x + b_3y + c_3z), \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$$

2.2.7 Theorem

在平面 F 上，對於兩條錐線（或直線） C_1, C_2 ，存在一個射影變換 $\Phi : F \rightarrow F$ ，使得 $\forall A \in C_1, \Phi(A) \in C_2$ 。

Remark 4. 以上幾個性質在 Vladyslav Zveryk, The Method of Moving Points[10] 中皆有詳細證明。

2.2.8 Definition

若一點或直線 $A(p : q : r)$ 和另一個完全由 A 的座標透過多項式關係決定的點或線 $B(X(p, q, r) : Y(p, q, r) : Z(p, q, r))$ ，其中 X, Y, Z 是關於 p, q, r 的多項式，且 X, Y, Z 無公因式，那麼稱 B 依賴於 A ，並定義

$$\text{dei}(A, B) = \max\{\deg(X), \deg(Y), \deg(Z)\}$$

Remark 5. 本文使用此函數以處理當一個物件 (B) 的座標完全由另一個物件 (A) 的座標透過多項式關係決定時 B 和 A 之間的相對多項式次數。

2.2.9 Corollary

對於一點或線 P , $\text{dei}(P, P) = 1$ 。

2.2.10 Corollary

三個點或直線 A, B, C ，滿足 B 依賴於 A 且 C 依賴於 B 則：

$$\text{dei}(A, C) \leq \text{dei}(A, B) \times \text{dei}(B, C)$$

Remark 6. 此推論闡述了 dei 函數的遞移性質，因此在計算 dei 函數時可將之拆成較好處理的幾個部分，以下 Theorem 2.2.11, Theorem 2.2.12 將處理幾個有用的 dei 函數性質以將幾個常用的平面幾何操作轉換成 dei 函數的計算。

2.2.11 Theorem

(i) 對於一點或線 X ，依賴於 X 的兩點 A, B

$$\text{dei}(X, \overleftrightarrow{AB}) \leq \text{dei}(X, A) + \text{dei}(X, B)$$

(ii) 對於一點或線 X ，依賴於 X 的兩線 ℓ_a, ℓ_b

$$\text{dei}(X, \ell_a \cap \ell_b) \leq \text{dei}(X, \ell_a) + \text{dei}(X, \ell_b)$$

Proof. 對於一點(線) $X(p : q : r)$ 、兩點 $A(P_a, Q_b, R_c), B(P_b, Q_b, R_b)$ ，其中 $P_a, Q_b, R_c, P_b, Q_b, R_b$ 是關於 p, q, r 的實係數多項式且 P_a, Q_a, R_a 三者無公因式； P_b, Q_b, R_b 三者無公因式，則 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為：

$$\begin{vmatrix} Q_a & R_a \\ Q_b & R_b \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} R_a & P_a \\ R_b & P_b \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} P_a & Q_a \\ P_b & Q_b \end{vmatrix} z = 0$$

因此 $\text{dei}(X, \overleftrightarrow{AB}) \leq \text{dei}(X, A) + \text{dei}(X, B)$

類似，當 A, B 是兩直線則：

$$A \cap B = \begin{vmatrix} Q_a & R_a \\ Q_b & R_b \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} R_a & P_a \\ R_b & P_b \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} P_a & Q_a \\ P_b & Q_b \end{vmatrix} z = 0$$

因此 $\text{dei}(X, A \cap B) \leq \text{dei}(X, A) + \text{dei}(X, B)$

□

2.2.12 Theorem

對於一點或線 $X(p : q : r)$ ，給定一錐線 C ， C 上定點 A 和一條必過 A 且依賴於 X 的直線 ℓ ，設 $B = \ell \cap C$ 則

$$\text{dei}(X, B) \leq 2\text{dei}(X, \ell)$$

Proof. 由 Theorem 2.2.7，存在射影變換 Φ 使 $\Phi(A) = (0 : 1 : 1)$ ， $\Phi(C) : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ，令 $\Phi(\ell) = (P : Q : R)$ ， P, Q, R 是關於 p, q, r 的實係數多項式，且 P, Q, R 三者無公因式，對於 $\Phi(B) = (i : j : k)$ 有

$$\begin{cases} i^2 + j^2 - k^2 = 0 \\ Pi + Qj + Rk = 0 \\ Q + R = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi(B) = (Q^2 - P^2 : 2PQ : P^2 + Q^2),$$

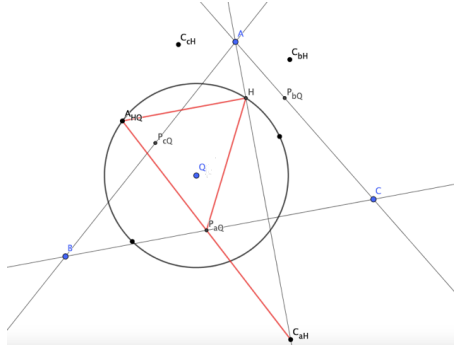
又由 Theorem 2.2.6 $\text{dei } X, B = \text{dei } X, \Phi(B) \leq 2\text{dei } X, \Phi(\ell) = 2\text{dei } X, \ell$

□

3 主要研究

3.1 P 為三角形 ABC 垂心 H

Conclusion 1. 取 P 為三角形 ABC 垂心 H ，則對任意點 Q 皆有 $H \in \mathcal{H}(H, Q)$ ，且此時 $O[H, Q] = Q$ 。



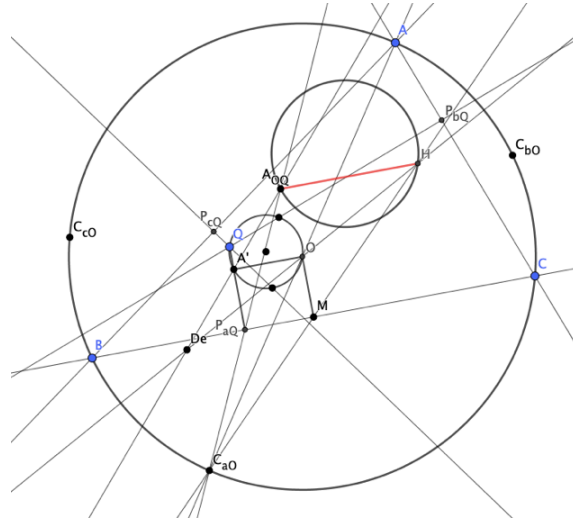
想法：藉證明 $P_{aQ}Q$ 是 HA_{HQ} 中垂線，以證明 $O[H, Q] = Q$

Proof. 對於任一點 Q ，顯然 C_aH 是 H 對 BC 對稱，所以 $HP_{aQ} = P_{aQ}C_{aH} = P_{aQ}A_{HQ}$
 $\angle C_{aH}HA_{HQ} = 90^\circ, HA_{HQ} \parallel BC$ ，
 所以 $HA_{HQ} \perp QP_{aQ}$ ，再由 $P_{aQ}H = P_{aQ}A_{HQ}$
 知 $\overline{A_{HQ}Q} = \overline{QH}$ ，同理 $B_{HQ}Q = C_{HQ}Q = QH$ ，故 $A_{HQ}, B_{HQ}, C_{HQ}, H$ 四點共圓，
 $O[H, Q] = Q$ 。

□

3.2 P 為 $\triangle ABC$ 外心 O [6]

Conclusion 2. 取 P 為 $\triangle ABC$ 外心 O ，則對任意點 Q 皆有 $H \in \mathcal{H}(O, Q)$ ，且此時 $O[O, Q]$ 為 O 對 $\overline{QH}$ 中點對稱點。



想法：藉由位似將 $\mathcal{H}(O, Q)$ 上的結構轉換到 (OQ) 上

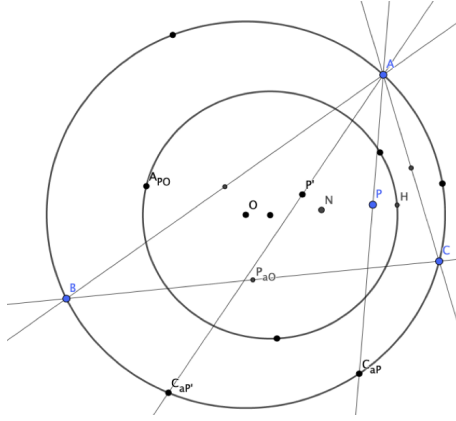
Proof. 對於任一點 Q ，做 BC 中點 M ，知 $\overline{C_{aO}H}$ 之中點為 M ，
 $HA_{OQ} \parallel MP_{aQ}, HA_{OQ} = 2MP_{aQ}$
 做 QP_{aQ} 直線交 (OQ) 於另一點 A' 則 $A'P_{aQ}MO$ 為矩形則：
 $OA' \parallel MP_{aO} \parallel HA_{OQ}, 2OA' = HA_{OQ}$ 類似亦有
 $OB' \parallel MP_{bO} \parallel HB_{OQ}, 2OB' = HB_{OQ}$ 、
 $OC' \parallel MP_{cO} \parallel HC_{OQ}, 2OC' = HC_{OQ}$
 即有 $A'B'C'O \sim A_{OQ}B_{OQ}C_{OQ}H$ ，他們的位似中心為 H 對 O 對稱點 De ，故 $A_{OQ}B_{OQ}C_{OQ}H$ 共圓， $H \in \mathcal{H}(O, Q)$ ，
 $O[O, Q]$ 為 De 對 $\overline{QO}$ 中點的對稱點，即 O 對 $\overline{QH}$ 中點對稱點

□

Remark 7. 這是 Nguyen Van Linh 考慮的狀況。

3.3 Q 為 $\triangle ABC$ 外心 O

Conclusion 3. 取 Q 為 $\triangle ABC$ 外心 O ，則 P 取任意點皆有 $H \in \mathcal{H}(P, O)$ ，且此時 $O[P, O]$ 為 P 對三角形 ABC 九點圓心 N 對稱點。



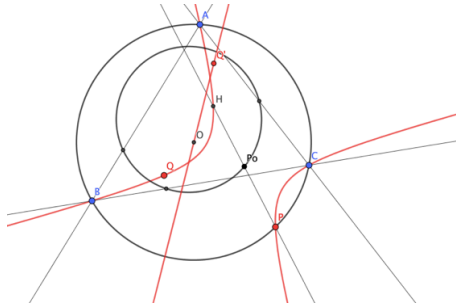
Proof. 對於任意點 P ，知 P_{aO} 為 $\overline{BC}$ 中點，做 P 對 $\triangle ABC$ 之等角共軛點 P' 知 $C_{aP'}$ 為 C_{aP} 對 $\overline{BC}$ 中垂線對稱點，故 A_{PO} 為 $C_{aP'}$ 對 BC 對稱點，

$$(A_{PO}B_{PO}C_{PO}) = \mathbb{H}(P') \Rightarrow H \in \mathcal{H}(P, Q)$$

□

3.4 $P \in (ABC)$

Conclusion 4. 取 $P \in (ABC)$ ，則 $H \in \mathcal{H}(P, Q)$ 若且唯若 $Q \in (ABCPH) \cup \overleftrightarrow{OP'}$ ，且此時 $O[P, Q]$ 是 P 對 Q -佩多圓心的對稱點。



Proof. 此時 P -圓西瓦三角形將退化成 P 點， $C_aP = C_bP = C_cP = P$ 。

若一點 Q 使得 $H \in \mathcal{H}(P, Q)$ ，令 P, Q 的等角共軛點分別為 P', Q'

考慮以 P 為位似中心的 $\frac{1}{2}$ 倍位似變換，有 $\overline{PH}$ 中點 P_o 在 Q -佩多圓上，

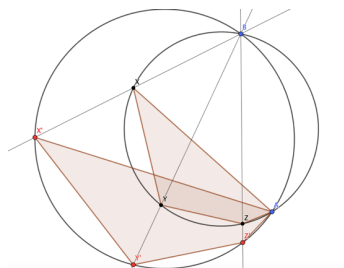
而 P_o 也在九點圓上，由 Theorem 2.1.14， P_o 是 $QABC$ 或 $Q'ABC$ 的龐色列點。根據 Property 2.1.16， P_o 也是 $ABCP$ 的龐色列點，而通過 ABC ，以 P_o 為中心的等軸雙曲線是唯一的，必 Q, Q' 有一個在 $(ABCPH)$ 上，即 $Q \in (ABCPH) \cup \overleftrightarrow{OP'}$ 。

□

3.5 P, Q 為同一點

想法：欲證明 $H \in \mathcal{H}(P, P)$ ，由於 $\triangle C_aP C_bP C_cP \sim \triangle P_aP P_bP P_cP$ ，故聯想到艾可爾斯定理可以確定 $\triangle A_{PP} B_{PP} C_{PP} \sim \triangle C_aP C_bP C_cP$ ，希望將 H 加入這組相似系統，即找到點 X, Y 分別在 (ABC) ， $(P_aP P_bP P_cP)$ 上，使得 $XC_aP C_bP C_cP \sim YP_aP P_bP P_cP \sim HA_{PP} B_{PP} C_{PP}$ 且 X 對 Y 對稱點為 H ，即可完成證明。

Lemma 1. 兩圓 C, C' 交於兩點 A, B ，過 B 做三條直線分別再交 C, C' 於 $X, X'; Y, Y'; Z, Z'$ 則四邊形 $AXYZ, AX'Y'Z'$ 相似。



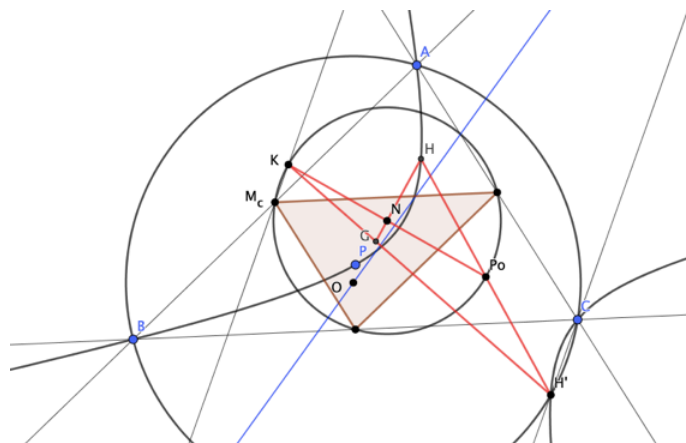
Proof.

$$\angle AXY = \angle ABY = \angle AX'Y', \angle AYX = \angle ABX = \angle AY'X'$$

即 $\triangle AXY \sim \triangle AX'Y'$ ，同理 $\triangle AYX \sim \triangle AY'X'$ ， $\triangle AZX \sim \triangle AZ'X'$ ，故 $AXYZ \sim AX'Y'Z'$ 。

□

Lemma 2. 通過平面上一點 P 的三角形 ABC 外接等軸雙曲線 C ，其中心為 Po 。 C 對三角形 ABC 的等角共軛軌跡 C' 是 Po 對三角形 ABC 三邊中點構成的三角形的斯坦納線。

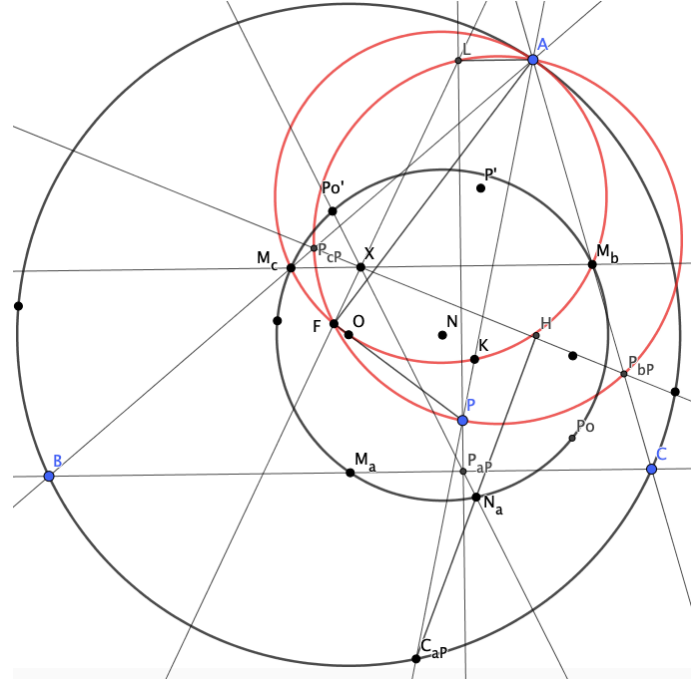


Proof. 知 $\triangle ABC$ 的九點圓為 (A, B, C, H) 的九點錐線，故 Po 在 $\triangle ABC$ 的九點圓上
 考慮 H 對 Po 的對稱點 H' ，由錐線 C 對中心 Po 對稱和九點圓性質知 H' 在 (ABC) 上且在 C 上
 令 BC, CA, AB 中點 M_a, M_b, M_c ，考慮以 $\triangle ABC$ 的重心 G 為中心，位似比 $\frac{-1}{2}$ 的位似變換：
 A, B, C, H' 的像分別 M_a, M_b, M_c, K ，知 K 在 $\triangle M_a M_b M_c$ 上且 $M_c K \parallel CH'$
 又 C' 通過 H' 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛點即通過 K 對 $\triangle M_a M_b M_c$ 的等角共軛點
 令 N 為 $\triangle ABC$ 的九點圓心，考慮 KN 截 $\triangle HGH'$ ，
 由孟氏逆定理得 K, N, Po 共線
 由 Property 2.1.6， Po 對 $\triangle M_a M_b M_c$ 的斯坦納線 $\mathcal{L}$ 通過 K 對 $\triangle M_a M_b M_c$ 的等角共軛點，即
 $\mathcal{L} \parallel C'$ ，
 又由斯坦納線性質（附錄 5.11）知， $\mathcal{L}$ 通過 $\triangle M_a M_b M_c$ 的垂心即 $\triangle ABC$ 的外心 O ，必 $\mathcal{L} = C'$

□

Lemma 3. $\triangle ABC$ 和一點 P ， P 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛點為 P' ， $\overline{BC}$ ， $\overline{CA}$ ， $\overline{AB}$ 中點分別 M_a ， M_b ， M_c ， $M_cM_b \cap P_{cP}P_{bP} = X$ ， $\overline{HC_{aP}}$ 中點為 N_a ，類似定義 N_b ， N_c ，則 N_a, P_{aP}, X ； N_b, P_{bP}, X ； N_c, P_{cP}, X 分別三點共線且此三線交於 A, B, C, P' 的龐色列點 Po'

Proof.



做 A 到 OP 垂足 F 、 P_{aP} 對 M_bM_c 對稱點 L ， $PL \perp AL$ 。
則 $A, P, F, P_{cP}, P_{bP} \in (AP)$ ， $A, O, F, M_c, M_b \in (AO)$ 。

$$\angle XP_{cP}F = \angle P_{bP}AF = \angle XM_cF$$

X, P_{cP}, M_c, F 共圓。

$$\angle LFP_{cP} = \angle LAP_{cP} = \angle XM_cA = \angle XFP_{cP}$$

即 L, X, F 共線。

又知 (AM_bM_c) ， $\triangle ABC$ 九點圓以 M_bM_c 對稱，故 F 對 M_bM_c 對稱點 Po' 在九點圓上， Po', X, P_{aP} 共線。

且知 OP 為 Po' 對 $\triangle M_aM_bM_c$ 的斯坦納線，由 Lemma 2. 知 Po' 為 A, B, C, P' 的龐色列點。
 $XP_{cP} \cdot XP_{bP} = XF \cdot XL = XPo' \cdot XP_{aP}$ ，即 Po' 在 P-佩多圓上 (亦可由龐色列點性質得到)

由九點圓性質知 N_a 在 $\triangle ABC$ 的九點圓上，做 $\overline{AC_{aP}}$ 中點 K ，

由 $\triangle AM_bM_c$ ， $\triangle ABC$ 以 A 為中心 2 倍位似，故 K 在 (AM_bM_c) 上。

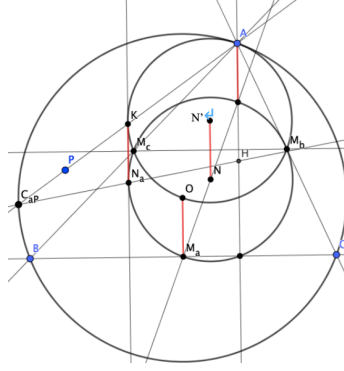
考慮 $\overleftrightarrow{FL}$ ， $\overleftrightarrow{AK}$ 和 (AM_bM_c) ， (AP) ，由 Reim 定理，

令 $\overleftrightarrow{FL} \cap (AM_bM_c) = \{F, N'_a\}$ ，有 $KN'_a \parallel LP \parallel AH$ ，

又 $\triangle AC_{aP}H$ 中 KN_a 為中位線， $AH \parallel KN_a$ 即 $N_aN'_a \perp M_bM_c$ ，因此 N_a 對 $\overleftrightarrow{M_cM_b}$ 的對稱點為 K 或 N'_a 。

若為 N'_a 則由對稱即有 N_a, P_{aP}, X, Po' 共線，

以下處理 N_a 對 M_cM_b 的對稱點為 K 的情況：



令 (AM_bM_c) 之圓心為 N' ， KN_a, NN' 中點分別 Q, R ，皆在 M_bM_c 上。由 $\Delta M_aM_bM_c \sim \Delta ABC$ ：

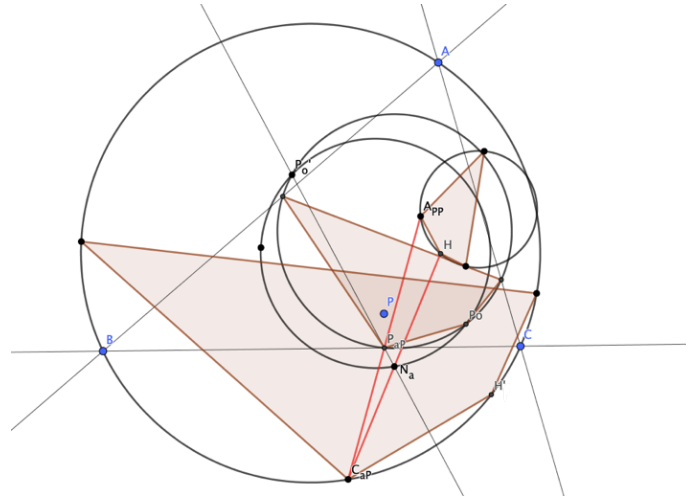
$$\overline{N_aQ} = \overline{QK} = \frac{\overline{N_aK}}{2} = \frac{\overline{HA}}{4} = \frac{-\overline{OM_a}}{2} = \overline{RN} = \overline{RN'}$$

故 $N_aN \parallel M_bM_c \parallel KN'$ ， KN_aNN' 是矩形， KN_a 是 (AM_bM_c) ， ΔABC 九點圓之公切線。此時 $K = N_a'$ ，亦有 N_a, P_aP, X, Po' 共線。

□

Remark 8. 以上證明使用了 Bocanu Marius, *On Fontene's Theorems*, (2015) 02 Mar [3] 中證明 Fontene's Theorem 所使用的輔助線。

Conclusion 5. 當取 P, Q 為同一點，則 $H \in \mathcal{H}(P, P)$ 必然成立，且此時 $O[P, P] = \Delta ABC$ 外心 O 對 P -配多圓心之對稱點。



Proof. 做 P 對 ΔABC 之等角共軛點 P' ， P, A, B, C 之旁色列點 Po ， P', A, B, C 之旁色列點 Po' ， H 對 Po 對稱點 H' ， $\overline{H'C_aP}$ ， $\overline{H'C_bP}$ ， $\overline{H'C_cP}$ 的中點分別 N_a, N_b, N_c 。

由九點圓性質知 $H' \in (ABC)$ 上，考慮以 H 為位似中心的 2 倍位似變換有：
 $H'C_aPC_bPC_cP \sim PoN_aN_bN_c$ ，又由 Lemma 3. 知 $N_aP_aP, N_bP_bP, N_cP_cP$ 三線共點於 Po' 。因此由 Lemma 1. 得

$$PoN_aN_bN_c \sim PoP_aP_bP_cP$$

即

$$H'C_aPC_bPC_cP \sim PoP_aP_bP_cP$$

套入艾可爾斯定理推廣

$$H'C_aPC_bPC_cP \sim PoP_aP_bP_cP \sim HA_{PP}B_{PP}C_{PP}$$

，故 $HA_{PP}B_{PP}C_{PP}$ 共圓，此時 $O[P, P] = \Delta ABC$ 外心 O 對 P -配多圓心之對稱點。

□

3.6 Q 為 $\triangle ABC$ 垂心 H

此情況較為複雜，以下證明將分成兩部分，在 (i),(ii),(iii) 將先找出幾個使 P 滿足條件的軌跡並證明其正確性，再於 (iv),(v) 中使用齊次座標的方法證明找到的軌跡包含所有情況。

(i) 當 $P \in \overleftrightarrow{AH} \cup \overleftrightarrow{BH} \cup \overleftrightarrow{CH}$ ，則 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 。

Proof. 當 $P \in \overleftrightarrow{AH}$ ，則 C_{aP} 是 H 對 AB 的對稱點， $A_{PH} = H$ ，故 $\mathcal{H}(P, H)$ 通過 H 。由對稱性， $P \in \overleftrightarrow{BH}, P \in \overleftrightarrow{CH}$ 亦有 $\mathcal{H}(P, H)$ 通過 H 。□

(ii) 當 $P \in (ABC)$ ，則 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 。

Proof. 此時 $C_{aP} = C_{bP} = C_{cP} = P$ ，考慮對 P 的 $\frac{1}{2}$ 倍位似變換 Φ ，有：

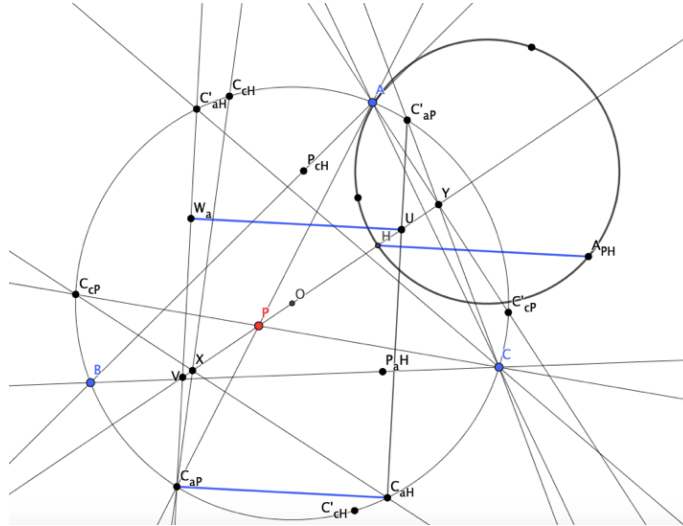
$\Phi(A_{PH}) = P_{aH}$, $\Phi(B_{PH}) = P_{bH}$, $\Phi(C_{PH}) = P_{cH}$

$\Rightarrow \Phi(\mathcal{H}(P, H))$ 是 $\triangle ABC$ 的九點圓。

又 P, H 中點在 $\triangle ABC$ 的九點圓上，即知 $\mathcal{H}(P, P)$ 必然通過 H 。□

(iii) 當 $P \in \overleftrightarrow{OH}$ ，則 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 。

想法：容易發現 $HA_{PH}C_{aH}C_{aP}$, $HB_{PH}C_{bH}C_{bP}$, $HC_{PH}C_{cH}C_{cP}$ 是平行四邊形，欲構造共圓四點 $UW_aW_bW_c$ 使 $HA_{PH}, HB_{PH}, HC_{PH}$ 分別和 UW_a, UW_b, UW_c 平行且長度比例相同即可證明命題。



Proof. 考慮 $A, C_{aP}, C_{cH}, C, C_{cP}, C_{aH}$ 由帕斯卡定理：

$$C_{aP}C_{cH} \cap C_{cP}C_{aH} = X \in \overleftrightarrow{OH}$$

令 $C_{aP}, C_{cP}, C_{cH}, C_{aH}$ 對 (ABC) 的對徑點分別是 $C'_{aP}, C'_{cP}, C'_{cH}, C'_{aH}$ 。

考慮 $C_{aP}, C'_{aP}, C_{aH}, C_{cP}, C'_{cP}, C_{cH}$ 由帕斯卡定理：

$$C'_{aP}C_{aH} \cap C'_{cP}C_{cH} = U \in \overleftrightarrow{XO} = \overleftrightarrow{OH}$$

考慮 $C_{aP}, C'_{aH}, C_{aH}, C_{cP}, C'_{cH}, C_{cH}$ 由帕斯卡定理：

$$C_{aP}C'_{aH} \cap C_{cP}C'_{cH} = V \in \overleftrightarrow{XO} = \overleftrightarrow{OH}$$

由對稱性知 $U \in C'_{bP}C_{bH}$, $V \in C_{bP}C'_{bH}$ 。

即 $C_{aP}C_{aH}C'_{aP}C'_{aH}$ 構成長方形，可於 $C_{aP}C'_{aH}$ 上取 W_a ，使 $C_{aP}C_{aH}UW_a$ 構成長方形，且有 $W_a \in (VU)$ ，

$$C_{aP}P_{aH} = P_{aH}A_{PH}, HP_{aH} = P_{aH}C_{aH} \Rightarrow HA_{PH} = C_{aP}C_{aH} = W_aU$$

，且 $HA_{PH} \parallel C_{aP}C_{aH} \parallel W_aU$ 。

亦可類似取到 $W_b, W_c \in (VU)$ 這將使 $UW_aW_bW_c \cong HA_{PH}B_{PH}C_{PH}$ ，即 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 。□

Remark 9. 以上證明參考自：<https://artofproblemsolving.com/community/c6h345850>

根據 (i),(ii),(iii) 可以得到：當 $P \in (ABC) \cup \overleftrightarrow{AH} \cup \overleftrightarrow{BH} \cup \overleftrightarrow{CH} \cup \overleftrightarrow{OH}$ ，則 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ ，但是並不能確定是否已找到所有使得 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 的 P 。因此以下將證明滿足 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 的 P 只能在 $(ABC) \cup \overleftrightarrow{AH} \cup \overleftrightarrow{BH} \cup \overleftrightarrow{CH} \cup \overleftrightarrow{OH}$ 上。

令 $\mathcal{X} = (ABC) \cup \overleftrightarrow{AH} \cup \overleftrightarrow{BH} \cup \overleftrightarrow{CH} \cup \overleftrightarrow{OH}$ ， $\mathcal{X}' = \{P | H \in \mathcal{H}(P, H)\}$

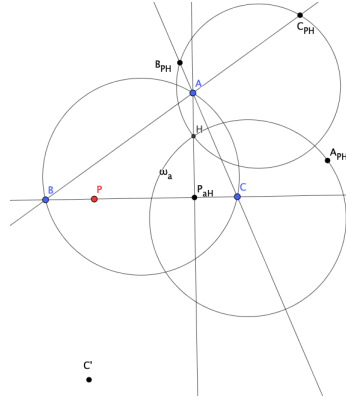
想法： $(ABC), \overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{BH}, \overleftrightarrow{CH}, \overleftrightarrow{OH}$ 兩兩不重合 ($\triangle ABC$ 非等腰三角形)
即 $\mathcal{X}$ 在齊次座標下是一個只跟 a, b, c 有關的 6 次多項式， $\deg(\mathcal{X}) = 6$ 。因此若能證明 $\mathcal{X}'$ 在齊次座標下最多 6 次，且 $\exists P, P \notin \mathcal{X}'$ (i.e. $\deg(\mathcal{X}') > 0$)，即有 $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$

(iv) $\exists P, P \notin \mathcal{X}'$

Proof. 考慮 $P \in \overleftrightarrow{BC}$ 的情況，若 $\forall P \in \overleftrightarrow{BC}$ ， $H \in \mathcal{H}(P, H)$ ，
則 $C_{bP} = C$ ， $C_{cP} = B$ ，故 B_{PH}, C_{PH} 皆為定點，且 $B_{PH} \neq C_{PH}$ ($\triangle ABC$ 非等腰三角形)，
 $A_{PH} \in (HB_{PH}C_{PH})$ 。
但 C_{aP} 可為 (ABC) 上任意點，即 A_{PH} 可為 (ABC) 對 P_{aH} 點對稱的圓 ω_a 上任意點，
必 $\omega_a = (HB_{PH}C_{PH})$ ，令 C_{PH} 對 P_{aH} 對稱點為 C' ，則 $C' \in (ABC)$ 且 $BC' \parallel P_{aH}P_{cH}$

$$\angle CAB = \angle CP_{aH}P_{cH} = \angle CBC'$$

$\Rightarrow BC'$ 是 (ABC) 的切線， $C' = B$ ，則 C_{PH} 對 P_{aH} 對稱點為 B ， $C_{PH} \in BC$ ，矛盾。



□

(v) $\mathcal{X}'$ 在齊次座標下最多 6 次

Proof. 令 A, B, C 是三定點 $P = (p_x : p_y : p_z)$ 。根據 Theorem 2.2.12, Theorem 2.2.11

$$\text{dei}(P, C_{aP}) \leq 2\text{dei}(P, AP) \leq 2[\text{dei}(P, P) + \text{dei}(P, A)] = 2$$

因 C_{aP} 對 P_{aH} (定點) 對稱點為 A_{PH} ，故

$$\text{dei}(P, A_{PH}) = \text{dei}(P, C_{aP}) \leq 2$$

類似

$$\text{dei}(P, B_{PH}) \leq 2, \text{dei}(P, C_{PH}) \leq 2$$

考慮以 H 為反演中心，任意長為半徑的反演變換 Φ

A_{PH} 在 (ABC) 對 P_{aH} 對稱的圓 ω_a 上， H 對 P_{aH} 對稱點在 (ABC) 上，故 $H \in \omega_a$ ， $\Phi(\omega_a)$ 是定直線

而 $\Phi(A_{PH}) = HA_{PH} \cap \Phi(\omega_a)$ ，故

$$\text{dei}(P, \Phi(A_{PH})) \leq \text{dei}(P, HA_{PH}) \leq \text{dei}(P, A_{PH}) \leq 2$$

類似

$$\text{dei}(P, \Phi(B_{PH})) \leq 2, \text{dei}(P, \Phi(C_{PH})) \leq 2 \dots (*)$$

則根據 Theorem 2.2.5

$$H \in \mathcal{H}(P, H) \iff \Phi(A_{PH}), \Phi(B_{PH}), \Phi(C_{PH}) \text{ is collinear.}$$

$$\iff \begin{vmatrix} \Phi(A_{PH}) \\ \Phi(B_{PH}) \\ \Phi(C_{PH}) \end{vmatrix} = 0$$

由 (*), $\begin{vmatrix} \Phi(A_{PH}) \\ \Phi(B_{PH}) \\ \Phi(C_{PH}) \end{vmatrix}$ 是關於 p_x, p_y, p_z 的多項式, 且

$$\deg \begin{vmatrix} \Phi(A_{PH}) \\ \Phi(B_{PH}) \\ \Phi(C_{PH}) \end{vmatrix} \leq 6$$

即 $\deg \mathcal{X}' \leq 6$ 。

□

根據 (iv), (v), $1 \leq \deg \mathcal{X}' \leq 6$, 又根據 (i), (ii), (iii), $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}'$

且 $(ABC), \overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{BH}, \overleftrightarrow{CH}, \overleftrightarrow{OH}$ 兩兩不重合 ($\triangle ABC$ 非等腰三角形), $\deg(\mathcal{X}) = 6$, $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$, 即有:

Conclusion 6. 取 Q 為 $\triangle ABC$ 垂心 H , 則 $H \in \mathcal{H}(P, H)$ 若且唯若 $P \in (ABC) \cup \overleftrightarrow{AH} \cup \overleftrightarrow{BH} \cup \overleftrightarrow{CH} \cup \overleftrightarrow{OH}$ 。

用類似上述齊次座標方法, 我們能得到另一個更一般的結論:

3.7 P 是定點時 Q 軌跡次數上限

Conclusion 7. 當 P 是定點, $\mathcal{X} = \{Q | H \in \mathcal{H}(P, Q)\}$, 則 $\deg \mathcal{X} \leq 6$

Proof. 對於一點 $Q \in \mathcal{X}$, $\infty_{\perp BC}$ 是垂直 BC 方向的無窮遠點

由 Theorem 2.2.11 $\deg Q, P_{aQ} \leq \deg Q, P_{\infty_{\perp BC}} + \deg Q, BC \leq 1$

因 $C_{aP} + A_{PQ} = 2P_{aQ}$, $\deg Q, A_{PQ} = \deg Q, P_{aQ} \leq 1$ 且 A_{PQ} 在一條定直線 (BC 對 C_{aP} 位似兩倍的直線 ℓ_a) 上

考慮以 H 為反演中心, 任意長為半徑的反演變換 Φ

$\Phi(\ell_a)$ 是一個通過 H 的定圓,

$$\Phi(A_{PQ}) = HP_{aQ} \cap \Phi(\ell_a), \deg Q, \Phi(A_{PQ}) \leq 2 \deg Q, P_{aQ} \leq 2$$

類似,

$$\deg Q, \Phi(B_{PQ}) \leq 2, \deg Q, \Phi(C_{PQ}) \leq 2 \dots (*)$$

則根據 Theorem 2.2.5

$$Q \in \mathcal{X} \iff \Phi(A_{PQ}), \Phi(B_{PQ}), \Phi(C_{PQ}) \text{ is collinear.}$$

$$\iff \begin{vmatrix} \Phi(A_{PQ}) \\ \Phi(B_{PQ}) \\ \Phi(C_{PQ}) \end{vmatrix} = 0$$

由 (*), $\begin{vmatrix} \Phi(A_{PQ}) \\ \Phi(B_{PQ}) \\ \Phi(C_{PQ}) \end{vmatrix}$ 是關於 Q 座標的多項式且 $\deg \begin{vmatrix} \Phi(A_{PQ}) \\ \Phi(B_{PQ}) \\ \Phi(C_{PQ}) \end{vmatrix} \leq 6$

即 $\deg \mathcal{X} \leq 6$ 。

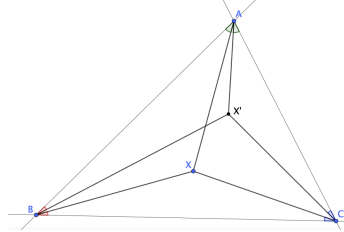
附錄

5 一些定義與已知的性質（補充）

5.1 Definition（等角共軛點）

稱一點 X 為一點 X' 對三角 ABC 之等角共軛點若且唯若

$$\angle XAB = -\angle X'AC, \angle XBC = -\angle X'BA, \angle XCA = -\angle X'CB$$

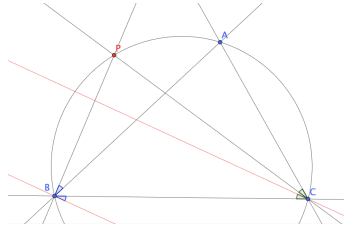


5.2 Definition（等角共軛軌跡）

平面上一點集 $\mathcal{X}$ 和三角形 ABC 的等角共軛變換 Φ ， $\mathcal{X}$ 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為 $\Phi(\mathcal{X}) = \{\Phi(x) | \forall x \in \mathcal{X}\}$

5.3 Property

三角形 ABC 外接圓上一點 P 對三角形 ABC 的等角共軛點是無窮遠點



5.4 Definition

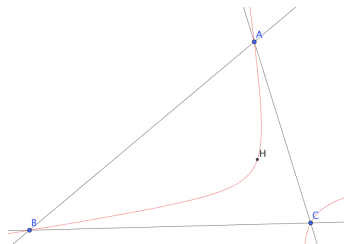
平面上一點集 $\mathcal{X}$ 和三角形 ABC 的等角共軛變換 Φ ， $\mathcal{X}$ 對 $\triangle ABC$ 的等角共軛軌跡為 $\Phi(\mathcal{X}) = \{\Phi(x) | \forall x \in \mathcal{X}\}$

5.5 Property

三角形 ABC 外接錐線的等角共軛軌跡是直線

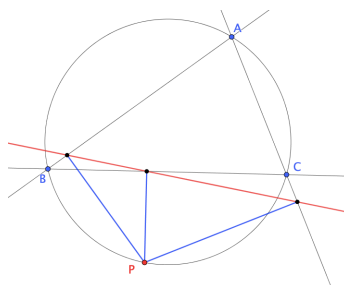
5.6 Property

非直角三角形 ABC 的一條外接雙曲線 Γ 為等軸雙曲線（兩條漸近線互相垂直）若且唯若 Γ 通過三角形 ABC 的垂心



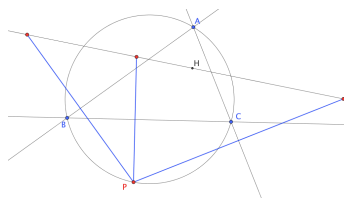
5.7 Definition (西姆松線 Simson line)

三角形 ABC ，和平面上一點 P 。 P 分別對三角形三邊做垂足，三垂足共線（此線稱為 P -西姆松線）若且唯若 P 在 ABC 外接圓上。



5.8 Definition (斯坦納線 Steiner line)

三角形 ABC ，和平面上一點 P 。 P 對三角形三邊對稱點分別為 X, Y, Z ，則 X, Y, Z 共線（稱此線為 P -線斯坦納線）若且唯若 P 在 ABC 外接圓上。



Remark 10. 西姆松線和斯坦納線互相平行

5.9 Property

P 在三角形 ABC 外接圓上時， P -斯坦納線通過三角形 ABC 垂心 [2]

參考資料

- [1] Telv Cohl, Properties of Hagge circle, Jul 14, 2016, Retrieved from:
https://artofproblemsolving.com/community/c284651t102252f284651_hagge_circle
- [2] Nguyen Ngoc Giang and Le Viet An, An Extension of the Steiner Line Theorem and Application, IJCDM, Volume 3 (2018) 82-87.
- [3] Bocanu Marius, On Fontene's Theorems, Mar 02, 2015, Retrieved from:
https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2015-02/article_1_bocanu.pdf
- [4] Jan Vonk, The Feuerbach Point and Reflections of the Euler Line, Fo-rum Geometricorum, Volume 9 (2009) 47–55.
- [5] 黃家禮 (1997)。幾何明珠 (頁 172) 台北：九章
- [6] Nguyen Van Linh, Hagge circles revisited, Dec 24, 2011, Retrieved from:
<https://nguyenvanlinh.files.wordpress.com/2011/12/hagge-circles-revisited.pdf>
- [7] Salmon's Conic Sections, p. 153, Ex. 3, and p. 302, Ex. 15.
- [8] Christopher J. Bradley and Geoff C. Smith, On a Construction of Hagge, Forum Geometricorum, Volume 7 (2007) 231–247.
- [9] Christopher J Bradley, The Story of Hagge and Speckman, CJB, 2010, 1.
- [10] Vladyslav Zveryk, The Method of Moving Points, July 29, 2019, Re-trieved from:
<https://www.scribd.com/document/429515067/The-Method-of-Moving-Points-1>