費馬多邊形數定理之延伸

臺中市立臺中第一高級中學　廖松毅
指導老師　蔡政樺

Abstract

In this study, we want to extend the result of the Fermat Polygonal Number Theorem which states that every non-negative integer can be represented as the sum of n n-gonal numbers to a more general case. Instead of the sequence of the polygonal numbers, we consider the sequence whose general term is formed by a quadratic polynomial. For this kind of sequences, we try to answer the question that “how many terms are needed to be chosen from the sequence to ensure that every non-negative integer (or significant large integer) can be represented as the sum of these terms?” We give upper bounds and lower bounds of the minimal number of terms in this research.

中文摘要

在本研究中，我以費馬多邊形數定理為基礎進行延伸，該定理提到：任意非負整數 x 皆可表成 m 個 m 邊形數的和，而在我的研究中，我將探討範圍由形如 $\dfrac{m-2}{2}n^2+\dfrac{4-m}{2}n$ 的 m 邊形數通式變為更一般化的取值是一系列非負整數的二次式 $\dfrac{a}{2}(n-k)^2+\dfrac{b}{2}(n-k)+1$，並依此定義對應的數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，探討以下議題：是否存在一最小正整數 γ，使得對於任意非負整數 x，x 皆可表成由數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出 γ 項之和（或探討是否存在一最小正整數 Γ，使得對於任意足夠大的非負整數 x，x 皆可表成由數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出 Γ 項之和）。再尋求正整數 γ、Γ 與二次式 $\dfrac{a}{2}(n-k)^2+\dfrac{b}{2}(n-k)+1$ 的關係，最後，分別給出了正整數 γ、Γ 的上下界。

1　簡介 (Introduction)

1.1　研究動機

起初，我無意間在一本書：陶哲軒教你聰明解數學中看到了四平方和定理，這定理勾起了我莫大的好奇心，於是我便想要證明此定理，無奈卻是徒勞無功，因此，我上網找了這一定理的證明，在看完證明後，發現這真是美妙到令我嘆為觀止，但隨

後我發現這麼美麗的定理居然不過是費馬多邊形數定理的一個特例罷了，看完了費馬多邊形數定理後，我又對於數學之美有了更深一層的認識，也決心要持續將費馬多邊形數定理繼續推廣下去。

1.2 研究目的

本研究主要研究的核心問題為：針對給定的二次式 $f(x) = an^2 + bn + c$，定義一數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle a_{-1} = 0,\ a_n = an^2 + bn + c,\ \forall\ n \geq 0 \rangle$，研究是否存在一正整數 γ，使得對於任意非負整數 x（另一個關心的方向是：對於任意足夠大的非負整數 x），x 皆可表示成數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項之和，以及正整數 γ 與二次式 $an^2 + bn + c$ 兩者間的關係。而針對此研究議題，本研究希望完成的研究目的如下：

1.2.1 針對此議題、建構出一套嚴謹的理論，並論證出一些將來可供應用的數學定理。

1.2.2 藉由所求得定理，分別建構對於任意給定二次式 $an^2 + bn + c$，尋求其對應的正整數 γ 之上界、下界的模型。

1.2.3 藉由優化前述模型，使得所求得的上下界差距降低，最後用夾擠求得正整數 γ 的值。

2 研究內容 (Main Body)

2.1 前人的研究結果

2.1.1 四平方和定理 任意非負整數必可表成四個完全平方數的和。（證明詳見參考文獻 [1]）

2.1.2 費馬多邊形數定理 任意非負整數必可表成 m 個 m 邊形數的和。（證明詳見參考文獻 [4]）

2.2 名詞定義

2.2.1 泛費馬二次式數列與泛費馬二次式

對於給定一數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$，其中 $a_{-1} = 0$，已知對於任意非負整數 x，x 皆可表示成從原先的數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項之和，但 x 並非總是可以表示成從原先的數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $\gamma - 1$ 項之和，其中正整數 γ 為一固定數值，不隨 x 而改變。再將數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 的第「-1」項去除，而其餘項保留後，可形成另一數列 $\langle b_n \rangle_{n=0}^{\infty}$。若 $\langle b_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 的一般式為二次多項式 $f(n) = an^2 + bn + c$，則我們稱數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 為泛費馬二次式數列，二次多項式 $f(n) = an^2 + bn + c$ 為泛費馬二次式。

2.2.2　指標值與泛費馬二次式函數 Yi　承上所述，我們稱上述的 γ 值為泛費馬二次式 $f(n)=an^2+bn+c$ 的指標值，而泛費馬二次式函數即是用來表達泛費馬二次式及其指標值間的關係，也就是說，函數的「自變量」為泛費馬二次式，「應變量」為指標值。換句話說，正整數 γ 為泛費馬二次式 $f(n)=an^2+bn+c$ 的指標值，可寫為 $\mathrm{Yi}(an^2+bn+c)=\gamma$。

2.2.3　泛費馬二次式函數之定義域

(1) 狹義定義域：

當二次式 $f(n)=an^2+bn+1$ 之係數 $(a,b,1)$ 滿足下列條件時，

[1] $a\in\mathbb{N}$，$b\in\mathbb{Z}$，$a+b\equiv 0 \pmod 2$。
[2] $\forall\ n\in\mathbb{N}$，$f(n)\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$。

稱 $f(n)$ 滿足泛費馬二次式函數的狹義定義域。（根據 2.3.2 的【預備性質二】，滿足狹義定義域的二次式，其指標值必存在）

(2) 廣義定義域：

當二次式

$$f(n)=\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1=\frac{a}{2}n^2+\left(\frac{b}{2}-ad\right)n+\frac{a}{2}d^2-\frac{b}{2}d+1\text{，}$$

其中的數值 (a,b,d) 滿足下列條件時，

[1] $a\in\mathbb{N}$，$b\in\mathbb{Z}$，$d\in\mathbb{N}\cup\{0\}$，且 $a+b$ 為非負偶數。
[2] $\forall\ n\cup\{0\}$，$f(n)\geq 0$。

稱 $f(n)$ 滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域。（根據 2.3.3 的【預備性質三】，滿足廣義定義域的二次式，其指標值必存在）

2.2.4　大費馬二次式函數 Fe 與其定義域　對於一給定之泛費馬二次式 $f(n)=an^2+bn+c$，設其對應的泛費馬二次式為 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$，已知對於任意足夠大的非負整數 x，若存在一最小正整數 Γ，使得 x 皆可表成數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ 項之和，則定義此函數關係為：$\mathrm{Fe}(an^2+bn+c)=\Gamma$，並稱 Γ 為泛費馬二次式 an^2+bn+c 的亞指標值（顯然地，對於同一二次式，我們有指標值 γ 大於等於亞指標值 Γ）。另外，大費馬二次式函數 Fe 的定義域與泛費馬二次式函數 Yi 完全相同。

2.3 預備性質

2.3.1 【預備性質一】（預備性質一引用自參考文獻 [4]）若 a、b 為正奇數，且 $b^2 < 4a$、$b^2+2b+4 > 3a$，則存在四個非負整數 s、t、u、v，使得

$$\begin{cases} a = s^2+t^2+u^2+v^2 \\ b = s+t+u+v \end{cases}$$ 。

2.3.2 【預備性質二】對於所有滿足泛費馬二次式函數的狹義定義域的二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，其指標值存在。也就是說，存在一指標值 γ，使得任意非負整數 x 皆可表成由二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$ 所建構的數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中所選出的 γ 項之和。

2.3.3 【預備性質三】一個二次式的指標值存在且此二次式建構出的數列為非負整數數列的充要條件是此二次式 $g(n)$ 滿足泛費馬二次式函數的廣義定義域，即 $g(n)$ 為形如 $\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{d}{2}(n-d)+1$ 的二次式。

2.3.4 【預備性質四】若二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$ 對應的數列為非負整數數列且係數 (a,b,c) 滿足 $\gcd(a,b,c)=1$，則二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+c$ 的亞指標值存在。

2.4 數學定理與模型

2.4.1 【探究過程一】首先，在證明了各類型的泛費馬二次式之指標值存在後，我們想知道泛費馬二次式函數中的一些基本性質，其中相當重要的便是：考慮一個滿足狹義定義域的二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，在做了平移變換後，得到了一個滿足廣義定義域的二次式 $\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1$，這兩個二次式的指標值之間有何關係？

【基本例探究】 先從以下的基本例出發，假設

$$\langle a_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}\right\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0,0,1,3,6,10,\dots\rangle \text{，}$$

$$\langle b_n\rangle = \left\langle \frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}\right\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0,0,0,1,3,6,10,\dots\rangle \text{。}$$

根據費馬多邊形數定理，可知這兩個二次式的指標值

$$\mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\right) = \mathrm{Yi}\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\right) = 3\text{。}$$

由上式可知，縱使泛費馬二次多項式數列不同，但其 γ 值依舊可能相同。再進一步分析，此兩數列存在一種平移變換關係，因為數列 $\langle a_n\rangle$ 的第 1、2、3、4、$\cdots$ 項

依序為數列 $\langle b_n \rangle$ 的第 2、3、4、5、$\cdots$ 項。因此我們想深入探究在此情形下的兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係。定理一即在說明在兩個泛費馬二次式數列之間的平移變換關係，對其所對應的 γ 值之關係式。

【定理 1】

對於兩個分別滿足泛費馬二次式函數的狹義與廣義定義域的二次式 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$、$\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)^2+1$，其中 $\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$ 的指標值將會大於等於 $\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1$ 的指標值，寫為

$$\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)\geq \mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1\right)。$$

證明. 令 $f(n)=\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1$，$g(n)=\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1$，數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\ldots\rangle=\langle f(0),f(1),f(2),\ldots\rangle$，$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle g(0),g(1),g(2),\ldots\rangle$。因為 $f(n)=g(n+d)$，亦即 $a_n=b_n+d$，對於所有非負整數 n 皆成立。換句話說，數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的每一項皆存在於數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中，故根據指標值所代表的意義可知，若 $f(n)$ 的指標值為 γ，則任意非負整數 x 皆可表成數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項和，於是可推知任意非負整數 x 皆可表成數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項和，亦即 $\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1\right)\leq\gamma=\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)$，得證。 □

2.4.2 【探究過程二】我們可藉由四平方和定理得知，二次式 n^2 的指標值為 4，於是，我們想：是否可以以此為基礎，發現型如 an^2+1 的二次式的指標值。更進一步來說，若已知泛費馬二次式 $f(n)$ 的指標值，可否藉此得知泛費馬二次式 $af(n)+1$ 的指標值 (其中 $a\in\mathbb{N}$)?

【基本例探究】 觀察可發現，二次式 $f(n)$ 與 $af(n)+1$ 之間存在一個乘上常數倍加一的關係，於是，我們便嘗試著由指標值的定義式出發，運用基本的移項、展開等技巧一一列舉並驗證了以下的結果：若 a 為正整數，則

(1) $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ 的指標值為 3 $\Rightarrow \mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{a}{2}n+1\right)=a+2$。

(2) n^2 的指標值為 4 $\Rightarrow \mathrm{Yi}\left(an^2+1\right)=3$。

(3) $\frac{m-2}{2}n^2+\frac{4-m}{2}n$ 的指標值為 m

$$\Rightarrow\quad \mathrm{Yi}\left(\frac{a(m-2)}{2}n^2+\frac{a(4-m)}{2}m+1\right)\leq a+m-1。$$

於是，我們將此結果一般化地寫作【定理2】。

【定理 2】

已知泛費馬二次式 $f(n)$ 的常數項為 0，且其指標值為 γ，若 a 為一正整數，則 $af(n)+1$ 的指標值小於等於 $a+\gamma-1$，即 $\mathrm{Yi}(af(n)+1)\le a+\gamma-1$。

證明. (1) 設數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle a_{-1},a_0,a_1,\dots\rangle=\langle 0,0,f(1),\dots\rangle$，數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle b_{-1},b_0,b_1,\dots\rangle=\langle 0,1,af(1)+1,\dots\rangle$，非負整數

$$y=\sum_{i=1}^{\gamma}b_{\alpha_i}=\sum_{i=1}^{\gamma}a\cdot a_{\alpha_i}+1=a\sum_{i=1}^{\gamma}(a_{\alpha_i})+\gamma \tag{1}$$

(2) 因為 $f(n)$ 的指標值為 γ，故對於任意非負整數 x，x 皆可表成數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項之和。也就是說，存在 γ 個非負整數 α_1、α_2、α_3、$\cdots$、α_γ，使得 $x=\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}$（因為 $a_0=a_{-1}$，故不需考慮 a_{-1} 項）。因此，在 (1) 式中 $y=\sum_{i=1}^{\gamma}b_{\alpha_i}=a\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}+\gamma$ 可表示任意模 a 餘 γ 的非負整數，故若設 $z=y+r=\sum_{i=1}^{\gamma}b_{\alpha_i}+r=a\sum_{i=1}^{\gamma}a_{\alpha_i}+\gamma+r$ 其中 $r\in\{0,1,2,\dots,a-1\}$，則 z 可表達出任意大於等於 γ 的非負整數，其中 y 為數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 γ 項之和，r 為數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 $a-1$ 項之和，所以 z 為數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 $a+\gamma-1$ 項之和。

(3) 又因為 $a+\gamma-1>\gamma-1$，故任意小於等於 $\gamma-1$ 的非負整數均可表成數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 $a+\gamma-1$ 項之和。

於是，結合 (2) 與 (3) 的結論可知，$\mathrm{Yi}\,(af(n)+1)\le a+\gamma-1$，得證。 □

2.4.3 【探究過程三】在【探究過程二】中，我們在已知二次式 $f(n)$ 的指標值的情況下，針對形如 $af(n)+1$ 的二次式，探討其指標值，並由此得知二次式 $a\left(\dfrac{m-2}{2}n^2+\dfrac{4-m}{2}n\right)+1$ 的指標值上界為 $a+m-1$。因此接下來我們想要運用特定方法，系統性地探討同一系列的二次式的指標值上界。

首先，我們希望能夠藉由改編 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的技巧，以尋找出更一般化的二次式的指標值，因此我們需要決定究竟要如何系統性的探討二次式指標值上界。經過一番探討，最後由於我們將應用【預備性質一】的緣故，故我們決定將二次式的表達式由 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n^2+1$ 改為 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，其中 $k=\dfrac{a+b}{2}$，並依據此型式進行以下探討。(根據泛費馬二次式函數 Yi 的狹義定義域，$k\in\mathbb{N}$。)

藉此，我們將可根據 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的技巧以求得泛費馬二次式形如 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的指標值上界。

【模型一】

(1) 已知二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 為泛費馬二次式，數列

$$\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\left\langle c_{-1}=0, c_n=a\left(\frac{n^2-n}{2}+kn+1\right)\right\rangle ,$$

設此二次式指標值為 γ，亦即任意非負整數皆可表成由數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項之和。

(2) 定義二數與二集合如下：

$$b_x \in Q=\{b_0, b_0+2, b_0+2, \ldots, b_0+2(a-1)\}$$
$$r_x \in R=\{4,5,6,\ldots,3+\gcd(a,2k)\}$$ ，其中 b_0 為一正奇數。

(3) 根據貝祖定理，集合 $S\equiv\{kb+r \mid b\in Q,\ r\in R\}$ 構成一個模 a 的完全剩餘系，故對於任意非負整數 x，存在一數對 (b,r)，使得 $x\equiv kb+r \pmod{a}$。並定義一數

$$a_x=\frac{2(x-kb_x-r_x)}{a}+b_x=\left(1-\frac{2k}{a}\right)b_x+\frac{2(x-r_x)}{a}$$
$$\Rightarrow x=a\left(\frac{a_x-b_x}{2}\right)+kb_x+r_x ,$$

並令 $c=1-\dfrac{2k}{a}$，$d=\dfrac{2(x-r_x)}{a}$，即 $a_x=cb_x+d$ 因為 $a\mid(x-kb_x-r_x)$，因此 a_x 與 b_x 同為正奇數。

(4) 考慮【預備性質一】的兩個前提的不等式：$\begin{cases}4a_x>b_x^2\\ b_x^2+2b_x+4>3a_x\end{cases}$，代入 a_x 與 b_x 的關係式可得：$\begin{cases}0>b_x^2-4cb_x-4d\\ b_x^2+(2-3c)b_x+(4-3d)\end{cases}$

$$\Rightarrow\ b_x\in I=\left(\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2},\frac{4c+\sqrt{16c^2+16c}}{2}\right)$$

而因為 b_x 總共必須有 a 個正奇數的取值，因此區間 I 的長度應要大於 $2a$，即

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16c}}{2}-\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right|\geq 2a 。$$

解此不等式得：

$$d>28a^2-14ac+2\sqrt{6}(4a-c-2)\sqrt{a(2a-c-2)}-28a+4c+4 。$$

(5) 又因為 $d=\dfrac{2(x-r_x)}{a} \;\Rightarrow\; \dfrac{2x}{a}>d$，並對上述的解進行分析，得 x 的解為：

$$x>14a^3-7a^2c+a\sqrt{6}(4a-c-2)\sqrt{a(2a-c-2)}-14a^2+2ac+2a \text{ 。}$$

(6) 由於這條件過於複雜，故我們為簡化計算，依據 a、c 兩數的關係求出不等式

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16c}}{2}-\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right|\geq 2(s+1)$$

成立的充分條件如下：$x>46a^3-46a^2+10a-23a^2c+2ac^2+10ac$。

(7) 當不等式

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16c}}{2}-\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right|\geq 2(s+1)$$

成立時，則可知 a_x、b_x 滿足【預備性質一】，即存在四非負整數 s、t、u、v，滿足 $\begin{cases} a_x=s^2+t^2+u^2+v^2 \\ b_x=s+t+u+v \end{cases}$ 。又由於 x、a_x、b_x、r_x 這四個數之間有關係式：

$$x=\frac{a}{2}(a_x-b_x)+kb_x+r_x \;\Rightarrow\; x=c_s+c_t+c_u+c_v+(r_x-4) \text{ ，}$$

且 r_x-4 此數可由 r_x-4 個 1 表示，故滿足不等式

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16c}}{2}-\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right|\geq 2a$$

的非負整數 x 可表成數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的 $4+(r_x-4)$ 項之和，並根據 r_x 的定義可知，$r_x\leq 3+\gcd(a,2k)$。

因此我們只要運用電腦窮舉出組成所有小於等於 $46a^3-46a^2+10a-23a^2c+2ac^2+10ac$ 的非負整數的情況，設這些數最多需要由數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 取出 γ' 項來表達，於是：

[1] 若 $\gamma'\geq 3+\gcd(a,2k)$，則泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的指標值 $\gamma=\gamma'$。

[2] 若 $\gamma'<3+\gcd(a,2k)$，則泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的指標值 $\gamma\leq 3+\gcd(a,2k)$。

【整理】以下，我們將模型一的步驟稍作整理以便理解：

(1) 確認所求泛費馬二次式的 a、k 值。
(2) 窮舉出組成所有小於等於 $46a^3 - 46a^2 + 10a - 23a^2c + 2ac^2 + 10ac$ 的非負整數的情況 $(c = 1 - 2k)$。
(3) 依步驟 (2) 的結果可知所求泛費馬二次式之指標值上界（或其指標值的確切值）。

2.4.4 【探究過程四】在得知泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$ 的指標值上界後，我們另外一個關心的議題無疑便是此二次式的指標值之下界，於是我們應用窮舉法計算出一系列在係數不大的情況下，泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$ 的指標值下界，並嘗試從中尋找一些關係，而後，在發現找到的下界與正整數 a、k 並未有一個簡潔的關係式後，我們便根據找到的下界規律，將泛費馬二次式的表達式再由 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$ 變更為 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + k'n + 1$，其中 $k' = k - a$，以求能夠有一套較為簡單明瞭的下界規律。

【基本例探究】 承上所述，我們探討形如 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + k'n + 1$ 的泛費馬二次式的指標值下界，並將結果分為以下五個部分：

(1) 當 $k' > 0$ 時；
(2) 當 $k' = 0$ 時；
(3) 當 $k' = -1, -2$ 時；
(4) 當 $k' \le -3$ 且 $a + 2k' \le 0$ 時；
(5) 當 $k' \le -3$ 且 $a + 2k' > 0$ 時。

並分別運用窮舉法窮舉至一定數值後，觀察並整理這四種情況的二次式指標值下界規律後，進一步論證成為【定理3】。

【定理 3】

對於一個形如 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right) + k'n + 1$ 的泛費馬二次式，令其指標值為 γ，於是有：

(1) 若 $k' > 0$，則 $\gamma \ge a + k' + 1$；
(2) 若 $k' = 0$，則 $\gamma \ge a + 2$；
(3) 若 $k' = -1, -2$，則 $\gamma \ge a + 1$；
(4) 若 $k' \le -3$ 且 $a + 2k' \le 0$，則 $\gamma \ge a + k' + 1 + \left\lfloor \frac{a-1}{a+k'+1} \right\rfloor$；
(5) 若 $k' \le -3$ 且 $a + 2k' > 0$，則 $\gamma \ge a + k' + 2$。

證明. 以下，我們將對上述的五種情況分別一一給出證明：

(1) 當 $k' > 0$ 時：

考慮泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$，所對應到的泛費馬二次式數列為

$$\langle a_n \rangle_{n=-1} = \langle 0, 1, a+k'+1, 3a+2k'+1, 6a+3k'+1 \dots \rangle \quad ,$$

在組成 $2a+2k'+1$ 此數時，非負整數 $2a+2k'+1$ 至少須由

$$a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot (a+k') = (a+k'+1) \cdot 1 + 1 \cdot (a+k')$$

共 $a+k'+1$ 項之和表達，因此 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma \geq a+k'+1$，得證。

(2) 當 $k' = 0$ 時：考慮泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$，分成以下兩種情況依序證明。

[1] 當 $a = 1$ 時，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, 1, 2, 4, 7, 11, \dots \rangle$：在組成 10 此數時，顯然至少須由 $a_3 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1$，共 3 項之和表達，故 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma \geq 3 = a+2$。

[2] 當 $a \geq 2$ 時，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, 1, a+1, 3a+1, 6a+1, \dots \rangle$：在組成 $5a+2$ 此數時，非負整數 $5a+2$ 至少須由 $a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot a = (3a+1) \cdot 1 + (a+1) \cdot 1 + 1 \cdot a$ 共 $a+2$ 項之和表達，故 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma \geq a+2$。

綜合上述兩情況，得證當 $k' = 0$ 時的定理陳述。

(3) 當 $k' = -1, -2$ 時：

考慮泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$，分成以下兩種情況依序證明：

[1] 當 $k' = -1$ 時，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, 1, a, 3a-1, 6a-2, \dots \rangle$：在組成 $5a-2$ 此數時，非負整數 $5a-2$ 至少須由 $a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot (a-1) = (3a-1) \cdot 1 + a \cdot 1 + 1 \cdot (a-1)$，共 $a+1$ 項之和表達，故 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma \geq a+1$。

[2] 當 $k' = -2$ 時，$\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle 0, 1, a-1, 3a-3, 6a-5, \dots \rangle$：在組成 $6a-7$ 此數時，非負整數 $6a-7$ 至少須由 $a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot (a-2) = (3a-3) \cdot 1 + (a-1) \cdot 2 + 1 \cdot (a-2)$ 共 $a+1$ 項之和表達，故 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma \geq a+1$。

綜合上述兩情況，得證當 $k'=-1,-2$ 時的定理陳述。

(4) 當 $k'\leq -3$ 且 $a+2k'\leq 0$ 時：

考慮泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$，所對應到的泛費馬二次式數列為 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,a+k'+1,3a+2k'+1,6a+3k'+1,\ldots\rangle$，在組成

$$\left(\left\lfloor\frac{3a+2k'+1}{a+k'+1}\right\rfloor-1\right)\cdot(a+k'+1)+a+k'$$

此數時，此數至少須由

$$a_1\cdot\left(\left\lfloor\frac{3a+2k'+1}{a+k'+1}\right\rfloor-1\right)+a_0\cdot(a+k')$$

共

$$a+k'+\left\lfloor\frac{3a+2k'+1}{a+k'+1}\right\rfloor-1=a+k'+1+\left\lfloor\frac{a-1}{a+k'+1}\right\rfloor$$

項之和表達，故當 $k'\leq -3$ 且 $a+2k'\leq 0$ 時，$a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma\geq a+k'+1+\left\lfloor\frac{a-1}{a+k'+1}\right\rfloor$，得證。

(5) 當 $k'\leq -3$ 且 $a+2k'>0$ 時：

考慮泛費馬二次式 $a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$，所對應到的泛費馬二次式數列為 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,a+k'+1,3a+2k'+1,6a+3k'+1,\ldots\rangle$，在組成 $3a+3k'+2$ 此數時，非負整數 $3a+3k'+2$ 至少須由 $a_1\cdot 2+a_0\cdot(a+k')=(a+k'+1)\cdot 2+1\cdot(a+k')$ 項之和表達，故當 $k'\leq -3$ 且 $a+2k'>0$ 時，$a\left(\frac{n^2+n}{2}\right)+k'n+1$ 的指標值 $\gamma\geq a+k'+2$，得證。

根據上述五個部分的論證，【定理3】得證。

□

2.4.5 【探究過程五】 藉由以上的【模型一】及【定理3】，我們得以獲得每一個泛費馬二次式的指標值的上下界，而經過電腦程式的檢驗後，亦可得知這些上下界已是相當完美，故在接下來，我們轉而探討一個與之前探討的函數 Yi 類似卻又不甚相同的函數 Fe（其定義詳見名詞定義 2.2.4），並找出其一系列相當類似於泛費馬二次式函數 Yi 的基本性質。

【基本例探究】 根據【定理1】、【定理2】，泛費馬二次式函數 Yi 有以下兩個性質：

(1) $\mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}n^2+\frac{b}{2}n+1\right)\geq \mathrm{Yi}\left(\frac{a}{2}(n-d)^2+\frac{b}{2}(n-d)+1\right)$。

(2) 已知泛費馬二次式 $f(n)$ 的常數項為 0，且其指標值為 γ，若 a 為一正整數，則 $\mathrm{Yi}(af(n)+1) \leq a+\gamma-1$。

因此，以下我們希望能夠借助泛費馬二次式函數 Yi 與大費馬二次式函數 Fe 兩者間的密切關係，來確認是否【定理1】、【定理2】的證明亦可直接套用至大費馬二次式函數 Fe 的相關證明上，若否，則應該對定理或證明過程的陳述做出什麼樣的修正? 進一步地觀察並分析定理的證明過程後可知，對於這兩個定理的證明過程來說，不論是泛費馬二次式函數 Yi 或大費馬二次式函數 Fe 基本上都是大同小異，故我們將此成果整理成為【定理4】。

【定理 4】
已知 $f(n)$) 為一泛費馬二次式，若其亞指標值為 Γ，則對於以下特定形式的泛費馬二次式有：

(1) $\mathrm{Fe}(f(n-d)) \leq \Gamma$。

(2) 若 $f(0)=0$，則 $\mathrm{Fe}(tf(n)+1) \leq t+\Gamma-1$。

證明. 以下我們將分開對這兩段陳述進行證明。

(1) 證明：$\mathrm{Fe}(f(n-d)) \leq \Gamma$。

設泛費馬二次式數列

$$\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle a_0=0, a_n=f(n)\rangle_{n=0}^{\infty} \quad 、$$
$$\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle b_0=0, b_n=f(n-d)\rangle_{n=0}^{\infty} \quad ，$$

注意到數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的每一項在數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中均有出現。由於泛費馬二次式 $f(n)$ 的亞指標值為 Γ，亦即對於任意足夠大的非負整數 x，皆存在 Γ 個大於等於 -1 的整數 α_1、α_2、α_3、$\cdots$、α_Γ，使得 $x=\sum_{i=1}^{\Gamma} a_{\alpha_i}$，又因為數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的每一項在數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中均有出現，故對於這些足夠大的非負整數 x，x 皆可表成數列 $\langle b_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ 項之和，亦即表示 $\mathrm{Fe}(f(n-d)) \leq \Gamma$，得證。

(2) 證明：若 $f(0)=0$，則 $\mathrm{Fe}(tf(n)+1) \leq t+\Gamma-1$。

設泛費馬二次式數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle c_0=0, c_n=tf(n)+1\rangle_{n=0}^{\infty}$。由於 $a_{-1}=0=a_0$，故事實上在此情況下 a_{-1} 是多餘的，故我們在以下證明中均不考慮 a_{-1} 此項，因為 $\mathrm{Fe}(f(n))=\Gamma$，亦即對於所有足夠大的非負整數 x，x 皆可表成數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle a_{-1}=0, a_n=f(n)\rangle_{n=0}^{\infty}$ 中取出的 Γ 項之和，寫為 $x=\sum_{i=1}^{\Gamma} a_{\alpha_i}$，

考慮一數 $x' = tx + \Gamma + r$ 其中 $\ = 0, 1, 2, \ldots, 1$，注意到 x 代表所有足夠大的非負整數、Γ 為一常數，且所有的 r 構成了一模 t 的完全剩餘系，因此 x' 亦可以代表所有足夠大的非負整數，且

$$x' = tx + \Gamma + r = t\sum_{i=1}^{\Gamma} a_{\alpha_i} + \Gamma + r = \sum_{i=1}^{\Gamma}(ta_{\alpha_i} + 1) + r = \sum_{i=1}^{\Gamma} c_{\alpha_i} + r \quad ,$$

注意到所有的 r 皆必可表成數列 $\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $t-1$ 項之和，因此 $x' = \sum_{i=1}^{\Gamma} c_{\alpha_i} + r = \sum_{i=1}^{t+\Gamma-1} c_{\alpha_i}$，亦即所有足夠大的非負整數皆可表成數列 $\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $t + \Gamma - 1$ 項之和，因此 $\mathrm{Fe}(tf(n) + 1) \leq t + \Gamma - 1$，得證。

根據以上兩部分的證明，【定理4】得證。 □

2.4.6 【探究過程六】在【定理4】中，我們得到了一些有關大費馬二次式函數 Fe 的一些基本性質，於是，在瞭解了這些基本性質後，我們便同樣希望能依據我們在研究泛費馬二次式函數時的研究脈絡，運用類似於在建構模型一時所用的手法，同樣以 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的技巧為基礎，探討大費馬二次式函數 Fe 的函數值上界。

【基本例探究】 在模型一中，我們主要是應用 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的技巧求出二次式指標值的可能上界，再用窮舉法窮舉出下界，而由於考慮的議題不同，只需考慮組成足夠大的非負整數的情況，因此我們得已大幅度的簡化模型，直接簡潔地寫出此二次式亞指標值的上界，並將其陳述成為如下【定理5】，也因為如此，【定理5】的證明過程大致上與模型一大同小異。

【定理 5】
若二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$ 為泛費馬二次式，則 $\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1\right) \leq 3 + \gcd(a, 2k)$。

證明. (1) 已知二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$ 為泛費馬二次式，數列

$$\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \left\langle c_{-1} = 0,\ c_n = a\left(\frac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1 \right\rangle_{n=0}^{\infty} \quad ,$$

設此二次式的亞指標值為 Γ，亦即任意足夠大的非負整數皆可表成由數列 $\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ 項之和。

(2) 定義二數與二集合如下：

$$b_x \in Q = \{b_0, b_0+2, b_0+4, \ldots, b_0+2(a-1)\}\text{、}$$
$$r_x \in R = \{4,5,6,\ldots,3+\gcd(a,2k)\}\text{，}$$

其中 b_0 為一正奇數。

(3) 根據貝祖定理可知，集合 $S \equiv \{kb+r \mid b \in Q,\ r \in R\}$ 構成一個模 a 的完全剩餘系，故對於任意的非負整數 x，存在一數對 (b_x, r_x)，使得 $x \equiv kb+r \pmod{a}$，並定義一數 $a_x = \dfrac{2(x-kb_x-r_x)}{a} + b_x = \left(1-\dfrac{2k}{a}\right)b_x + \dfrac{2(x-r_x)}{a}$

$$\Rightarrow\ x = a\left(\frac{a_x-b_x}{2}\right) + kb_x + r_x\text{，}$$

並令 $c = 1-\dfrac{2k}{a}$、$d = \dfrac{2(x-r_x)}{a}$，即 $a_x = cb_x + d$ 因為 $a \mid (x-kb_x-r_x)$，因此 a_x 與 b_x 同為正奇數。

(4) 考慮【預備性質一】的兩個前提的不等式：$\begin{cases} 4a_x > b_x^2 \\ b_x^2 + 2b_x + 4 > 3a_x \end{cases}$，代入 a_x 與 b_x 的關係式可得：$\begin{cases} 0 > b_x^2 - 4cb_x - 4d \\ b_x^2 + (2-3c)b_x + 4 - 3d > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow\ b_x \in I = \left(\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}, \frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2}\right)\text{，}$$

而因為 b_x 總共必須有 a 個正奇數的取值，因此區間 I 的長度應要大於 $2a$，即

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2} - \frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right| > 2a\text{，}$$

解此不等式得：

$$d > 28a^2 - 14ac + 2\sqrt{6}(4a-c-2)\sqrt{a(2a-c-2)} - 28a + 4c + 4\text{。}$$

(5) 也就是說，對於任意足夠大的 d，d 皆為不等式

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2} - \frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right| > 2a$$

的解，而 d、x 又有關係式 $d=\dfrac{2(x-r_x)}{a}$，因此對於任意足夠大的非負整數 x，x 皆為該不等式的解，也就是說，存在兩相對應的正奇數 a_x、b_x 滿足【預備性質一】，即存在四非負整數 s、t、u、v，滿足

$$\begin{cases} a_x=s^2+t^2+u^2+v^2 \\ b_x=s+t+u+v \end{cases} 。$$

又由於 x、a_x、b_x、r_x 這四個數之間有關係式：$x=\dfrac{a}{2}(a_x-b_x)+kb_x+r_x \Rightarrow x=c_s+c_t+c_u+c_v+(r_x-4)$，且 r_x-4 此數可由 r_x-4 個 1 表示，故滿足不等式

$$\left|\frac{4c+\sqrt{16c^2+16d}}{2}-\frac{3c-2+\sqrt{(3c-2)^2+12d-16}}{2}\right|>2a$$

的非負整數 x（即足夠大的非負整數）可表成數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的 $4+(r_x-4)\leq 3+\gcd(a,2k)$ 項之和。於是，我們得證：$\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\leq 3+\gcd(a,2k)$。

□

2.4.7 【探究過程七】接下來，在求出泛費馬二次式的亞指標值上界後，我們想關心該怎麼找到該泛費馬二次式的亞指標值下界，並將分別運用同餘理論與比較兩集合大小這兩種方法，求出兩種下界，並從中取最大值即為最後所得的最佳下界。

【基本例探究】 如前所述，我們將分別運用同餘理論、比較兩集合大小的技巧，求出兩種泛費馬二次式亞指標值的下界，應用到的基本概念詳細說明如下：

(1) 同餘理論：

若我們發現到：對於所有足夠大且模 m 餘 r 的非負整數，皆至少須表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ' 項之和，其中 m、r 為任意的非負整數，則可知，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ' 項之和，亦即泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 Γ'。

(2) 比較兩集合大小：

定義二集合分別為：

$$A_n=\{x\mid 0\leq x<a_n,\ x\in\mathbb{Z}\}、B_n=\{x=a_i+a_j\mid a_i\leq a_j,\ x<a_n\}$$

由此可知 A_n 代表所有小於 a 的非負整數，B_n 代表所有可由數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的兩項之和表達且小於 a_n 的非負整數，故 $|A_n|-|B_n|$ 代表小於 n 且無法被表達成兩項之和的非負整數個數。考慮極限 $\lim\limits_{n\to\infty}(|A_n|-|B_n|)$，若此極限趨近於無窮大，我們可知將有無窮多個非負整數無法被表達成數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的兩項之和，亦即無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 3 項之和，故泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 3。

(3)

【定理 6】
對於泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，其亞指標值有兩個下界，分別為 $\gcd(a,k)$、3，寫為 $\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq\max\{\gcd(a,k),3\}$。

證明. 以下，我們將【定理6】分為兩個部分：$\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq\gcd(a,k)$ 及 $\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq 3$。再分別證明：

1. 證明：$\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq\gcd(a,k)$

   已知泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應到的泛費馬二次式數列為 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,k+1,a+2k+1,3a+3k+1,6a+4k+1,\ldots\rangle$。考慮在組成模 $\gcd(a,k)$ 餘 0 的非負整數 x 時，觀察可知，由於 $\forall\ a_i$，$a_i\equiv 1\pmod{\gcd(a,k)}$，故模 $\gcd(a,k)$ 餘 0 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $\gcd(a,k)$ 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $\gcd(a,k)$ 項之和，亦即泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 $\gcd(a,k)$，得證。
2. 證明：$\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq 3$

   已知泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應到的泛費馬二次式數列為 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,k+1,a+2k+1,3a+3k+1,6a+4k+1,\ldots\rangle$，並分成以下三種情況進行證明。

   [1] 當 $(a,k)=(1,1)$ 時：

定義集合 $A_n = \{x \mid 0 \leq x < a_n,\ x \in \mathbb{Z}\}$、$B_n = \{x = a_i + a_j \mid a_i \leq a_j,\ x < a_n\}$。於是，$|A_n| = a_n = \left(\dfrac{n^2-n}{2} + n + 1\right) = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{n} + 1$。注意到：

$$a_{\lceil 3n/4 \rceil} = \frac{1}{2}\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil^2 + \frac{1}{2}\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil + 1 \geq \frac{9}{32}n^2 + \frac{3}{8}n + 1 > \frac{1}{2}a_n\text{，}$$

也就是說，在 $a_{\lceil 3n/4 \rceil}$ 之後的項兩兩相加並不會落在集合 B_n 中，故：

$$\begin{aligned}
&|B_n| \leq n + 1 + C_2^{n+1} - C_2^{n-\lceil 3n/4 \rceil} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(|A_n| - |B_n|) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right) - \left(n + 1 + C_2^{n+1} - C_2^{n-\lceil 3n/4 \rceil}\right) \\
&= \infty\text{ 。}
\end{aligned}$$

故將有無窮多個非負整數無法被表達成數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的兩項之和，亦即無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 3 項之和，故泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 3。

[2] 當 $(a,k) = (1,2)$ 時：

定義集合 $A_n = \{x \mid 0 \leq x < a_n,\ x \in \mathbb{Z}\}$、$B_n = \{x = a_i + a_j \mid a_i \leq a_j,\ x < a_n\}$。於是，$|A_n| = a_n = \left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + 2n + 1 = \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{3}{2}n + 1$。注意到：

$$a_{\lceil 3n/4 \rceil} = \frac{1}{2}\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil^2 + \frac{3}{2}\left\lceil \frac{3}{4}n \right\rceil + 1 \geq \frac{9}{32}n^2 + \frac{9}{8}n + 1 > \frac{1}{2}a_n\text{，}$$

也就是說，在 $a_{\lceil 3n/4 \rceil}$ 之後的項兩兩相加並不會落在集合 B_n 中，故：

$$\begin{aligned}
&|B_n| \leq n + 1 + C_2^{n+1} - C_2^{n-\lceil 3n/4 \rceil} \\
&\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(|A_n| - |B_n|) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1\right) - \left(n + 1 + C_2^{n+1} - C_2^{n-\lceil 3n/4 \rceil}\right) \\
&= \infty\text{ 。}
\end{aligned}$$

故將有無窮多個非負整數無法被表達成數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中的兩項之和，亦即無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 3 項之和，故泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 3。

[3] 當 $(a,k) \neq (1,1),\ (1,2)$ 時：

定義集合 $A_n = \{x \mid 0 \leq x < a_n,\ x \in \mathbb{Z}\}$、$B_n = \{x = a_i + a_j \mid a_i \leq a_j,\ x < a_n\}$。於是，$|A_n| = a_n = a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1 = \dfrac{a}{2}n^2 + \dfrac{2k-a}{2}n + 1$，

$$\begin{aligned} &|B_n| \leq n+1+C_2^{n+1} \\ \Rightarrow &(|A_n| - |B_n|) \geq \left(\frac{a}{2}n^2 + \frac{2k-a}{2}n + 1\right) - \left(n+1+C_2^{n+1}\right) = \infty \\ &= \left(\frac{a-1}{2}n^2 + \frac{2k-a-3}{2}n\right) \end{aligned}$$

又因為正整數數對 $(a,k) \neq (1,2), (1,2)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(|A_n| - |B_n|) \geq \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-1}{2}n^2 + \frac{2k-a-3}{2}n\right) = \infty\ 。$$

因此，對於任意的泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$，其亞指標值皆有一下界為 3，即 $\mathrm{Fe}\left(a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1\right) \geq 3$，得證。

因以上兩個部份分別得證，故【定理6】得證。

$\square$

2.4.8 【探究過程八】在【定理6】中，我們已針對所有的泛費馬二次式探討了其亞指標值的下界，然而，事實上，與【定理5】所給出的上界相較之下，這些下界並非相當好的下界，因此，我們轉而針對部分滿足特定條件的泛費馬二次式進行探討，希望能夠優化【定理6】所給出的下界。

【基本例探究】 此處，我們依然由同餘理論開始著手，探討不同的泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$，所構成的泛費馬二次式數列各項模 8 後的結果。

觀察可知，在某些特定的 a、k 值的條件下，泛費馬二次式數列各項模 8 後的可能性將相當地少，故根據前述的同餘原理，我們將可提升這些泛費馬二次式的亞指標值下界，並將詳細結果整理為【定理7】。

【定理 7】

當泛費馬二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right) + kn + 1$，滿足下列條件之一時，該泛費馬二次式的亞指標值有一下界為 4。

(1) $a \equiv 2 \pmod 8$ 且 $k \equiv 3,7 \pmod 8$；

(2) $a \equiv 4 \pmod 8$ 且 $k \equiv 2, 4, 6, 0 \pmod 8$；

(3) $a \equiv 6 \pmod 8$ 且 $k \equiv 7 \pmod 8$；

(4) $a \equiv 0 \pmod 8$ 且 $k \equiv 4, 0 \pmod 8$。

（特別地，當 $a \equiv k \equiv 0 \pmod 8$ 時，泛費馬二次式的亞指標值下界為 8）

證明. 以下，我們將定理中所述的九種同餘情況一一進行分析並證明之。

(1) 當 $a \equiv 2 \pmod 8$ 且 $k \equiv 3 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 4,\ a_{8m+2} \equiv 1,\ a_{8m+3} \equiv 0,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 4,\ a_{8m+6} \equiv 1,\ a_{8m+7} \equiv 0\ 。$$

故模 8 餘 7 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(2) 當 $a \equiv 2 \pmod 8$ 且 $k \equiv 7 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 0,\ a_{8m+2} \equiv 1,\ a_{8m+3} \equiv 4,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 0,\ a_{8m+6} \equiv 1,\ a_{8m+7} \equiv 4\ 。$$

故模 8 餘 7 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(3) 當 $a \equiv 4 \pmod 8$ 且 $k \equiv 2 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 3,\ a_{8m+2} \equiv 1,\ a_{8m+3} \equiv 3,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 3,\ a_{8m+6} \equiv 1,\ a_{8m+7} \equiv 3\ 。$$

故模 8 餘 0 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(4) 當 $a \equiv 4 \pmod 8$ 且 $k \equiv 4 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n\rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m}\equiv 1,\ a_{8m+1}\equiv 5,\ a_{8m+2}\equiv 5,\ a_{8m+3}\equiv 1,$$
$$a_{8m+4}\equiv 1,\ a_{8m+5}\equiv 5,\ a_{8m+6}\equiv 5,\ a_{8m+7}\equiv 1\ 。$$

故模 8 餘 0 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(5) 當 $a \equiv 4 \pmod 8$ 且 $k \equiv 6 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n\rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m}\equiv 1,\ a_{8m+1}\equiv 7,\ a_{8m+2}\equiv 1,\ a_{8m+3}\equiv 7,$$
$$a_{8m+4}\equiv 1,\ a_{8m+5}\equiv 7,\ a_{8m+6}\equiv 1,\ a_{8m+7}\equiv 7\ 。$$

故模 8 餘 4 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(6) 當 $a \equiv 4 \pmod 8$ 且 $k \equiv 0 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n\rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m}\equiv 1,\ a_{8m+1}\equiv 1,\ a_{8m+2}\equiv 5,\ a_{8m+3}\equiv 5,$$
$$a_{8m+4}\equiv 1,\ a_{8m+5}\equiv 1,\ a_{8m+6}\equiv 5,\ a_{8m+7}\equiv 5\ 。$$

故模 8 餘 4 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負

整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(7) 當 $a \equiv 6 \pmod 8$ 且 $k \equiv 6 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 0,\ a_{8m+2} \equiv 5,\ a_{8m+3} \equiv 0,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 0,\ a_{8m+6} \equiv 5,\ a_{8m+7} \equiv 0\ 。$$

故模 8 餘 4 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(8) 當 $a \equiv 0 \pmod 8$ 且 $k \equiv 4 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 5,\ a_{8m+2} \equiv 1,\ a_{8m+3} \equiv 5,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 5,\ a_{8m+6} \equiv 1,\ a_{8m+7} \equiv 5\ 。$$

故模 8 餘 4 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 4 項之和，即其亞指標值大於等於 4，得證。

(9) 當 $a \equiv 0 \pmod 8$ 且 $k \equiv 0 \pmod 8$。

在此情況下，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$，所對應的數列 $\langle a_n \rangle$ 各項模 8 之後的結果可整理為：（在此不考慮 a_{-1} 項）

$$a_{8m} \equiv 1,\ a_{8m+1} \equiv 1,\ a_{8m+2} \equiv 1,\ a_{8m+3} \equiv 1,$$
$$a_{8m+4} \equiv 1,\ a_{8m+5} \equiv 1,\ a_{8m+6} \equiv 1,\ a_{8m+7} \equiv 1\ 。$$

故模 8 餘 0 的非負整數 x 至少須表示成泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 8 項之和，因此，無論取多麼大的非負整數 M，總有無窮多個大於 M 的非負整數需表示為數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 8 項之和，即其亞指標值大於等於 8，得證。

因以上九種情況皆成立，故【定理 7】得證。 □

2.4.9 【探究過程九】 在【定理 6】中，我們提出了二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的指標值的兩個下界：$\gcd(a,k)$ 與 3，然而，實際上來說，這兩個下界都不是非常好的下界，它們與上界之間都有一段不小的距離，就算我們在【定理 7】中嘗試著些許地優化了下界，優化的程度仍然有限，因此我們想要繼續地去嘗試優化亞指標值的下界。

【基本例探究】 如同我們在【定理 6】的基本例探究中所述，若我們想要求得二次式的亞指標值，則目前主要運用的是兩種方法：比較兩集合大小與同餘理論，運用這兩種方法，我們分別可以找出 3 與 $\gcd(a,k)$ 這兩個下界。於是，我們開始思考結合這兩種方法的可能性，發現到事實上這兩種方法可以相當順利地結合在一起，而運用這樣結合而產生出來的新方法，我們便可以對亞指標值的下界進行更進一步的優化，並將成果整理成為【定理 8】。

【定理 8】
若二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 為泛費馬二次式，則此二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的亞指標值下界為 $2+\gcd(a,k)$，寫作 $\mathrm{Fe}\left(a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1\right)\geq 2+\gcd(a,k)$。

證明. (1) 由於已知二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 為泛費馬二次式，因此二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的亞指標值存在。

(2) 運用反證法，設二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的亞指標值小於等於 $1+\gcd(a,k)$。令二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 對應的數列為 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}=\langle 0,1,k+1,\dots\rangle$。

(3) 考慮所有足夠大且模 $\gcd(a,k)$ 餘 2 的非負整數 x，因為二次式 $a\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的亞指標值小於等於 $1+\gcd(a,k)$，並且數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 當中的每一項模 $\gcd(a,k)$ 皆餘 1，所以這些 x 必須要可以表成數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的二項之和。

(4) 定義集合 A_m 包含所有小於等於 m 且模 $\gcd(a,k)$ 餘 2 的非負整數、集合 B_m 包含了所有小於等於 m 且可以表成數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的二項之和的非負整數。於是，我們便開始對 A_m、B_m 的集合大小進行分析，首先，我們可以輕易地確認集合 $|A_m|=\left\lfloor\frac{m-2}{\gcd(a,k)}\right\rfloor+1$。

(5) 接下來，我們便開始分析集合 B_m 的大小，我們發現到在數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中，c_i，$i=\left\lfloor\dfrac{(a/2-k)+\sqrt{(a/2-k)^2+2a(m-1)}}{a}\right\rfloor$（也就是數列的第 i 項）恰小於等於 m，且他的下一項將會大於 m，因此，在不考慮 c_{-1} 此項的情況下，數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 $i+1$ 項將會小於等於 m，在這些項中取任兩項相加的取值最多共有 C_2^{i+1} 種可能；然而，另外，我們又發現到，在數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中 c_j，$j=\left\lfloor\dfrac{(a/2-k)+\sqrt{(a/2-k)^2+2a(m/2-1)}}{a}\right\rfloor$（也就是數列的第 j 項）恰小於等於 $\frac{m}{2}$，且他的下一項將會大於 $\dfrac{m}{2}$，因此，數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中有 $i-j$ 項將會介於 $\dfrac{m}{2}$ 與 m 之間，因此，在我們剛剛求出來的 C_2^{i+1} 種可能中，至少有 C_2^{i-j} 個數將會大於 m，因此，我們可求得 $B_m\le C_2^{i+1}-C_2^{i-j}$。

(6) 令 $N(m)=C_2^{i+1}-C_2^{i-j}$ 其中 $i=\left\lfloor\dfrac{a/2-k+\sqrt{(a/2-k)^2+2a(m-1)}}{a}\right\rfloor$、$j=\left\lfloor\dfrac{a/2-k+\sqrt{(a/2-k)^2+2a(m/2-1)}}{a}\right\rfloor$。在 m 趨近於無窮大時，由於 a、k 皆為常數，$N(m)$ 將會趨近於

$$
\begin{aligned}
C_2^{\frac{\sqrt{2am}}{a}}-C_2^{\frac{\sqrt{2am}-\sqrt{am}}{a}} &= \frac{\sqrt{\frac{2m}{a}}\left(\sqrt{\frac{2m}{a}}-1\right)}{2}-\frac{\left(\sqrt{\frac{2m}{a}}-\sqrt{\frac{m}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{2m}{a}}-\sqrt{\frac{m}{a}}-1\right)}{2}\\
&= \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{m}{a}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{a}\right)
\end{aligned}
$$
。

(7) 於是，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty}|A_m|-|B_m|=\lim_{m\to\infty}|A_m|-N(m)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left\lfloor\frac{m-2}{\gcd(a,k)}\right\rfloor+1-\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{m}{a}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\right)\\
&\approx\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\gcd(a,k)}+1-\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\left(\frac{m}{a}\right)-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\gcd(a,k)}-\frac{2\sqrt{2}-1}{2a}\right)m+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}+1\\
&\le\lim_{m\to\infty}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2a}\right)m+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{a}}+1=\infty。
\end{aligned}
$$

(8) 由此可知，當 m 趨近於無窮大時，有無窮多個模 $\gcd(a,k)$ 餘 2 的非負整數 x

不可被表成數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的兩項之和，於是與我們的假設矛盾，因此可知，二次式 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的亞指標值下界為 $2+\gcd(a,k)$，得證。

□

2.4.10 【探究過程十】 在【預備性質四】當中，我們給出了形如 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 的二次式的亞指標值存在的充分條件：$\gcd(a,b,c)=1$，於是，我們現在想要開始探討：若二次式 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 滿足此充分條件的話，此二次式的亞指標值的上界。退一步地說，若我們無法求得一般化的上界，我們至少想了解在特定條件下，這種二次式的亞指標值上界為何。

【基本例探究】 由於我們探討的是亞指標值的上界，於是我們回想起，在先前的【定理 7】當中，我們同樣也是探討亞指標值上界，因此我們便希望能夠稍稍改寫【定理 7】的證明技巧，以套用至現今的情況，幫助我們求得二次式 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 的亞指標值上界。而【定理 7】又是由【模型一】以及費馬多邊形數定理的證明技巧衍生而來，因此我們也可發現到 Melvyn B. Nathanson 證明費馬多邊形數定理的技巧、【模型一】、【定理 5】、【定理 9】，這四者之間有著相當緊密的連結。

【定理 9】

對於二次式 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$，已知其對應的數列 $\langle c_n\rangle_{n=-1}^{\infty}$ 為非負整數數列，若其係數 (a,c) 滿足 $\gcd(a,c)=1$，則二次式 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 的亞指標值上界為 $a+3$。

證明. (1) 根據【預備性質四】，滿足【定理 **??**】前提的二次式 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 的亞指標值存在。

(2) 令 $k=a+b$，將探討的二次式由 $\dfrac{a}{2}n^2+\dfrac{b}{2}n+c$ 的形式轉化成 $a\left(\dfrac{n^2-n}{2}\right)+kn+1$ 的形式以方便進行探討，並定義三個集合如下：$Q=\{b_0\}$、$R=\{4c,5c,6c,\ldots,(a+3)c\}$、$S=\{kb+r\mid b\in Q,\ r\in R\}$，其中 b_0 為一正奇數，又因為 $\gcd(a,c)=1$，根據貝祖定理，集合 S 將會是模 a 的完全剩餘系。

(3) 因為集合 S 構成一個模 a 的完全剩餘系，故對於任意的非負整數 x，存在一數對 (b,r)，使得 $x\equiv kb+r\pmod a$，於是，我們定義一數 $a_x=2\left(\dfrac{x-kb_x-r_x}{a}\right)+b_x=\left(1-\dfrac{2k}{a}\right)b_x+2\left(\dfrac{x-r_x}{a}\right)$

$$\Rightarrow\ x=a\left(\frac{a_x-b_x}{2}\right)+kb_x+r_x=\left(a\left(\frac{a_x-b_x}{2}\right)+kb_x+4c\right)+(r_x-4c)$$

令 $e=1-\dfrac{2k}{a}$、$d=\dfrac{2(x-r_x)}{a}$，即 $a_x=eb_x+d$ 。因為 $a\mid(x-kb_x-r_x)$，因

此 a_x 與 b_x 同為正奇數。

(4) 考慮【預備性質一】的兩個前提的不等式：$\begin{cases} 4a_x > b_x^2 \\ b_x^2 + 2b_x + 4 > 3a_x \end{cases}$，代入 a_x 與 b_x 的關係式可得：$\begin{cases} 0 > b_x^2 - 4eb_x - 4d \\ b_x^2 + (2-3e)b_x + (4-3d) \end{cases}$

$$\Rightarrow \ b_x \in I = \left(\frac{3e - 2 + \sqrt{(3e-2)^2 + 12d - 16}}{2}, \frac{4d + \sqrt{16e^2 + 16d}}{2} \right)$$

而因為 b_x 必須要為正奇數，因此區間 I 的長度應要大於 2，即

$$\left| \frac{4d + \sqrt{16e^2 + 16d}}{2} - \frac{3e - 2 + \sqrt{(3e-2)^2 + 12d - 16}}{2} \right| > 2 \text{ 。}$$

解此不等式得：

[1] 當 $e \leq 0$ 時，$d > -10e + 2\sqrt{-6e} \cdot |e-2| + 4$；

[2] 當 $e > 0$ 時，$d > -\frac{3}{4}e^2 + e + 1$。

(5) 又因為 $d = \frac{2(x - r_x)}{a} < \frac{2x}{a}$，代入剛剛求出的不等式解可知：

[1] 當 $e \leq 0$ 時，$d > -10e + 2\sqrt{-6e} \cdot |e-2| + 4 \Rightarrow x > -5ae + a\sqrt{-6e}|e - 2| + 2a$；

[2] 當 $e > 0$ 時，$d > -\frac{3}{4}e^2 + e + 1 \Rightarrow x > -\frac{3}{8}ae^2 + \frac{ae}{2} + \frac{a}{2}$。

也就是說，對於任意足夠大的非負整數 x，它都會滿足不等式

$$\left| \frac{4d + \sqrt{16e^2 + 16d}}{2} - \frac{3e - 2 + \sqrt{(3e-2)^2 + 12d - 16}}{2} \right| > 2 \text{ ，}$$

因此，它所對應出的 a_x 與 b_x 也都會滿足【預備性質一】，亦即存在四非負整數 s、t、u、v 滿足 $\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$

(6) 於是，我們回到一開始的 x、a_x、b_x 三者之間的關係式

$$x = a\left(\frac{a_x - b_x}{2}\right) + kb_x + r_x = \left(a\left(\frac{a_x - b_x}{2}\right) + kb_x + 4c\right) + (r_x - 4c) \text{ ，}$$

並以 $\begin{cases} a = s^2 + t^2 + u^2 + v^2 \\ b = s + t + u + v \end{cases}$ 代入後可發現，

$$
\begin{aligned}
x = &\left(a\left(\frac{s^2-s}{2}+ks+c\right)\right)+\left(a\left(\frac{t^2-t}{2}\right)+kt+c\right) \\
&+\left(a\left(\frac{u^2-u}{2}\right)+ku+c\right)+\left(a\left(\frac{v^2-v}{2}\right)+kv+c\right)+(r_x-4c) \\
=&(c_s+c_t+c_u+c_v)+(r_x-4c) \text{ 。}
\end{aligned}
$$

並且，顯而易見地，對於所有的 r_x，$r_x - 4c$ 皆可表成數列 $\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $a-1$ 項之和，因此對於任意足夠大的非負整數 x，由於其對應的 a_x、b_x 皆會滿足【預備性質一】，於是 x 必可被表成數列 $\langle c_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 $4+(a-1) = a+3$ 項之和，因此二次式 $\frac{a}{2}n^2 + \frac{b}{2}n + c$ 的亞指標值上界為 $a+3$，得證。

□

3 結論 (Summary and Conclusions)

3.1 研究結果

在本研究中，我們研究的核心議題有二：

3.1.1 「給定泛費馬二次式 $f(n) = an^2 + bn + c$，定義對應的泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle a_{-1} = 0,\ a_n = an^2 + bn + c,\ \forall\ n \geq 0 \rangle$，研究是否存在一最小正整數 γ，使得對於任意非負整數 x，x 皆可表示成數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 γ 項之和，以及正整數 γ 與泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 兩者間的關係。（我們稱正整數 γ 為泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 的指標值）」

本研究的【定理 1】與【定理 2】即是在揭示此議題中的正整數 γ 與泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 兩者間的基本關係，而後我們建構了模型一這套方法以求出在給定泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 的情況下，如何求出其指標值的上界。接著，【定理 3】則一一列舉了在各種情況下，泛費馬二次式的指標值下界，而在通過電腦程式的驗證後，我們發現這些上下界幾乎都是相當好的，甚至於在許多情況下皆可直接求得泛費馬二次式的指標值。

3.1.2 「給定泛費馬二次式 $f(n) = an^2 + bn + c$，定義對應的泛費馬二次式數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty} = \langle a_{-1} = 0,\ a_n = an^2 + bn + c,\ \forall\ n \geq 0 \rangle$，研究是否存在一最小正整數

Γ，使得對於任意足夠大的非負整數 x，x 皆可表示成數列 $\langle a_n \rangle_{n=-1}^{\infty}$ 中取出的 Γ 項之和，以及正整數 Γ 與二次式 $an^2 + bn + c$ 兩者間的關係。（我們稱正整數 Γ 為泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 的亞指標值）」

類似於上個研究議題的脈絡，本研究的【定理 4】說明了泛費馬二次式 $an^2 + bn + c$ 與其亞指標值 Γ 之間的一些基本關係，【定理 5】與【定理 6】則分別給出了所有的泛費馬二次式的亞指標值上界與下界，【定理 7】與【定理 8】更是對【定理 6】所給出的下界進行了優化，在超過一半的情況中，上下界的差均小於等於 1。

3.2 結論

在本篇研究中，我們擴展了費馬多邊形數定理的研究範圍，將探討的對象由多邊形數的通式 $\frac{m-2}{2}n^2 + \frac{4-m}{2}n$ 拓展為形如 $\frac{a}{2}(n-d)^2 + \frac{b}{2}(n-d) + 1$ 的泛費馬二次式，也盡量地將限制降低，僅僅要求其對應到的數列須為非負整數數列。我們便以此為基礎，運用數論與代數學的諸多知識，針對加性數論領域當中的一些議題進行探討，進而得到了相當豐碩的研究成果。總的來說，藉由本研究，可以相當有效率的得知任意的泛費馬二次式的指標值與亞指標值的上下界，然而，美中不足的是，雖說目前看來本研究所求得的上下界皆相當不錯，但以本研究的成果始終尚無法保證能夠求得所有泛費馬二次式的指標值與亞指標值的確切值。

3.3 未來展望

承上在結論當中所述，本研究尚有不足之處，因此，在未來我將持續地進行研究，以期能達成以下目標：

3.3.1 求得所有泛費馬二次式的指標值與亞指標值的確切值。

3.3.2 將研究範圍拓展至三次式，並求得三次式與指標值、亞指標值的關係。

3.3.3 持續研究更高次式的情況，以期能對華林問題做出貢獻。

3.4 應用

數學上的未解問題：華林問題

西元 1770 年，愛德華・華林發表了《代數沉思錄》(Meditationes Algebraicae)，其中說，每一個正整數至多是 9 個立方數之和；至多是 19 個四次方之和。並猜想，對於每個非 1 的正整數 k，皆存在正整數 $g(k)$，使得每個正整數都可以表示為至多 $g(k)$ 個 k 次方數（即正整數的 k 次方）之和（以上文句節錄自維基百科）。

在此問題中，萊昂哈德・歐拉之子 J.A. 歐拉猜想：$g(k) = 2^k + \left\lfloor \left(\frac{3}{2}\right)^k \right\rfloor$，但至今仍未獲證明，故在將來，此研究持續深入探討的話，可能可為華林問題還有與其相關的加性數論問題做出貢獻。

參考資料 (Reference)

[1] https://zh.wikipedia.org/wiki/四平方和定理

[2] EYPHKA! num $= \Delta + \Delta + \Delta$. By GEORGE E. ANDREWS* In 1986

[3] ALL POSITIVE INTEGERS ARE SUMS OF VALUES OF A QUADRATIC FUNCTION OF x*. BY L. E. DICKSON IN 1927

[4] A SHORT PROOF OF CAUCHY'S POLYGONAL NUMBER THEOREM PROCEEDINGS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 99, Number 1. January 1987