

轉動迷宮路線數

臺北市立第一女子高級中學蔣馨慧

指導老師 廖培凱

Abstract

This study is based on the combination problem of mazes and rotating bricks. As we create the rotating bricks, we insert roads, define bridges, and assign the starting point. While the rotation of bricks alters the routes, this study discusses the possible ending points and the number of the shortest routes in different scales for reaching each destination.

We first simplify the complicated model of different scales and confirm where the ending points could be. Through symmetrical changes of graphs, we find the relation between the shortest routes to different destinations. Afterward, we estimate the number of the shortest routes with additional principle and discover their recurrence relations as well as their generating functions. Furthermore, we express the generating function in terms of Chebyshev polynomials and use their properties to obtain the explicit formula. At the end of this study, we find not only the relation between the generating functions of different scales, but also the shortest routes of all scales, which interestingly correspond to the discussion of dyck path of bounded height. At the same time, we also learn that when the column and the row are identical, the sequence of the shortest routes is related to the Catalan Numbers.

中文摘要

本研究為一迷宮遊戲和可轉動方形組合結合而成的問題。在給定行列的可轉動方形組合上，置入「道路」、定義「橋」、指定起點，便得以透過方形的旋轉形成路線，製成轉動迷宮。以此探討不同規格下，轉動迷宮中所有可能到達的終點，以及抵達各個終點的最短路線數。

首先，我們簡化不同規格的圖形，了解終點位置所在。得到抵達不同終點之最短路線數的關係後，再利用加法原理，推算出在不同規格轉動迷宮中最短路線數的遞迴關係式，得其生成函數間關係。進一步，以 Chebyshev 多項式表示生成函數，得最短路線數的一般式。研究中，我們不僅得到不同規格中最短路徑數生成函數的關係，從而探討每一規格的最短路線數，並對應 dyck path of bounded height 的討論，更發現當方塊行列數相同時，其最短路線數的數列與卡特蘭數列 (the Catalan numbers) 有關。

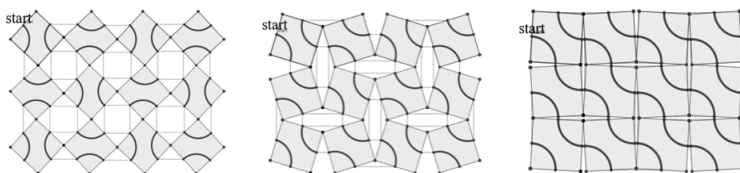
1 簡介 (Introduction)

此研究起源於旋轉方形和迷宮遊戲的結合。首先，將相鄰方形的頂點兩兩連接（如點 A、B、C 和 D），使轉動任意一個方形時，其餘會一起轉動。再者，於每個方形上置入道路（如【圖一】及定義 2.1.2），並給定起點，便可由起點出發沿著道路行走。最後，利用旋轉方形的轉動使相鄰方形的邊界重合，進而使其上的道路相互連接，以完成不同的路線，即可設計出轉動迷宮（如【圖二】）。

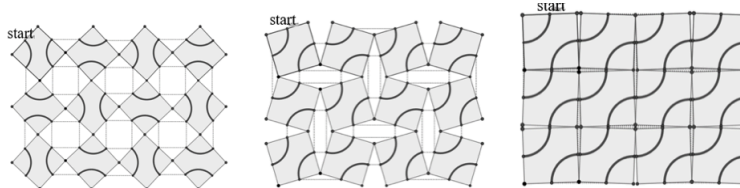


【圖一】道路

【圖二】轉動迷宮：將旋轉方形結合【圖一】成為迷宮遊戲。



【轉動迷宮示意圖（方向一）】



【轉動迷宮示意圖（方向二）】

藉由上述構想，本研究即想要設計一完整的迷宮遊戲。然而，為設計迷宮遊戲，我們便需要知道其可行終點位置，並期望探討由起點出發，抵達每一終點的路線數。因此，我們首先訂定規則，規定在迷宮內行走時，每條道路至多經過一次，導致每條道路帶有方向性（可見定義 2.1.4）。至終，當任一道路無法經由轉動再連接另一道路時，即稱之為抵達終點。透過規則，我們可以簡化複雜的轉動迷宮圖形成點和有向線段（箭頭）的連結，再藉由道路編排的方式了解箭頭的排列規律，得知可行終點位置有二：分別位於左下角和右上角。

而在討論路線數時，作品著重於「所經過道路數目最少」的最短路線方法數（最短路線數）。我們發現抵達兩終點時，最短路線數於不同規格的关系式： $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ ， $l_{2n} = 1$ （其中 r_{mn} 、 l_{mn} 分別表示轉動迷宮內方形有 m 列、 n

行時，抵達右上角終點或左下角終點的最短路線數)。因為所求為最短路線數，所以透過此關係式，便僅需觀察抵達一邊終點的有限圖形邊界規律，並唯獨考慮由起點出發至抵達終點前，兩個特定方向的移動。也因此，到達迷宮中任一處的最短路線數，皆可運用排列組合中的加法原理計算，即歸納出在不同規格的轉動迷宮(固定列數 m ，改變行數 n) 中，抵達終點時的最短路線數的關係(如 $r_{3(2t)} = r_{3(2t-1)} = 2^{t-1}$ 、 $r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = 2r_{4(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i)}$ 等)。經此方法，便可推導出同列不同行的轉動迷宮中，抵達終點的最短路線數的遞迴關係：
$$r_{m(2t)} = r_{m(2t-1)} = 2r_{m(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i)} r_{m(2i)}。$$

由此遞迴關係式，同時可導出抵達右上角終點的最短路線數的生成函數 $f_m(x)$ 。並發現當列數 m 改變時，轉動迷宮最短路線數生成函數之間的關係： $f_{m+2}(x) = \left(\frac{x}{1-2x-xf_m(x)} \right)$ 。因為 $f_m(x)$ 為一分式形式，化簡使其分子和分母為多項式時，得寫出其分子函數和分母函數的遞迴關係。又當 m 分別為奇數和偶數時，分子與分母的多項式函數均可透過變數變換分別以第二類和第三類 Chebyshev 多項式表示，因此得以將分母的多項式分解成一次因式的乘積，再透過比較係數等方法，遂可順利將 $f_m(x)$ 寫成冪級數，得到所有規格轉動迷宮的最短路線數的一般式。

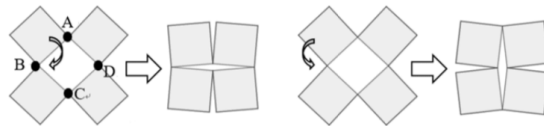
最後，我們也探究當轉動迷宮的列數趨近於無窮大(即 $m \rightarrow \infty$) 時，最短路線數的遞迴關係式、生成函數和一般式。除了可經由已知的生成函數關係和一般式得其數列，亦知其等同於轉動迷宮規格的行、列數相同的討論，得此時最短路線數的數列和卡特蘭數有關。

2 研究內容 (Main Body)

2.1 名詞定義、規則與先備知識

2.1.1 土地：以此命名每一個方形。

1. 規格：橫向為列，縱向為行，以 $m \times n$ 階土地表示轉動迷宮土地有 m 列、 n 行，其中 $m, n \geq 2$ 。
2. 轉動：由於其相接點(如圖的 A、B、C、D 點)不可分離，得知土地經過轉動後會有兩個方向的合併結果。如下圖 2×2 階土地所示。

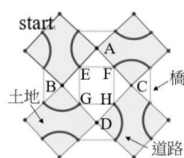


2.1.2 道路：

為設計迷宮遊戲，於土地中加入道路，即土地上的線。當土地轉動時，相鄰土地邊界重合、道路方向一致且連結，便得以沿道路移動而形成路線。而當相鄰土地僅以頂點連結時，道路排列則以縱向、橫向交錯。在本作品中，我們由土地僅以頂點連結時的狀態討論，且在第一列第一行的土地設置縱向道路，如簡介中【轉動迷宮示意圖】。

2.1.3 橋：

完成一道路欲進入下一條道路時，得以轉動「轉動迷宮」，使相鄰土地上的道路連結。即土地經兩方向轉動後，各有一條道路可選擇以繼續路線。而「橋」即是依上述移動規則所設置：為了在固定不動的平面上同時討論兩種旋轉情況，離開任一土地上的道路後，「土地經轉動使兩土地道路連結」可視為「土地固定不轉動，選擇橋，再進入下一土地上的道路」。如【圖三】中，在左下角的土地上，離開點 G 位於的道路時，迷宮得經旋轉，使 E 、 G 兩點重合，即等同在 E 、 G 兩點間畫一條虛線連結。稱此虛線為「橋」，討論圖形如【圖三】。



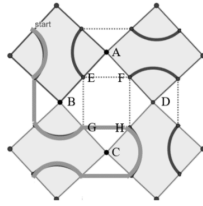
【圖三】

2.1.4 起點、終點與移動規則

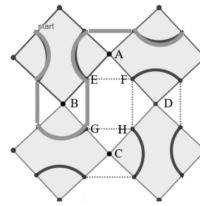
1. 起點：每塊土地上道路的端點，經過土地旋轉，均無法再和相鄰土地上的道路連接者，可做為起點。經後續觀察，得知位於轉動迷宮左上角、右上角、左下角和右下角的點皆可做為起點。而在本作品中，僅考慮以左上角的道路端點為「起點」。
2. 移動規則：起點出發後，僅能沿著道路和橋移動，且不可重複已經過的道路。離開一道路後，可以經由土地的旋轉進入下一條道路，但一旦進入一道路端點便須移動至此道路的另一端點。舉例而言：離開點 G 所位於的道路後，可轉動迷宮以進入點 E 所位於的道路，但一旦走到點 E ，便須走完其所位於的道路，而不能停留於點 E ，再轉動土地以走向點 F 。即必須「路、橋相間」地移動。

3. 終點：由起點出發，依照移動規則，經過土地兩方向的旋轉後，均無法再和相鄰土地上的道路連結的道路端點，稱為「終點」。

以 2×2 階轉動迷宮為例。在點 G 若選擇橫向的橋通往點 H ，可移動到左下角的終點，如【路線一】。而在點 G 若選擇縱向的橋通往點 E ，則可到達右上角的終點，如【路線二】。



【路線一】



【路線二】

2.1.5 最短路線

根據遊戲規則，由起點至終點形成的所有路線中，所經過道路數目最少者即稱為「最短路線」。其中，在各規格的討論中，「最短路線數」指所有路線中「最短路線」的數量。

2.1.6 Chebyshev 多項式

若令 $x = \cos\theta$ ，則可將第一類到第四類 Chebyshev 多項式分別定義為如下的函數：

$$T_n(x) = \cos(n\theta) \text{、} U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \text{、} V_n(x) = \frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} \text{、}$$

$$W_n(x) = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\sin(\frac{1}{2}\theta)} \text{。}$$

$$T_0(x) = U_0(x) = V_0(x) = W_0(x) = 1 \text{，}$$

$$T_1(x) = 1 \text{、} U_1(x) = 2x \text{、} V_1(x) = 2x - 1 \text{、} W_1(x) = 2x + 1 \text{。}$$

並滿足遞迴關係式： $P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x)$ （其中 $P_n(x)$ 為 $T_n(x)$ 、 $U_n(x)$ 、 $V_n(x)$ 、 $W_n(x)$ ）。為了往後的討論，於此先求第二類 Chebyshev 多項式 $U_n(x)$ 、第三類 Chebyshev 多項式 $V_n(x)$ 的一階導函數，經計算可得

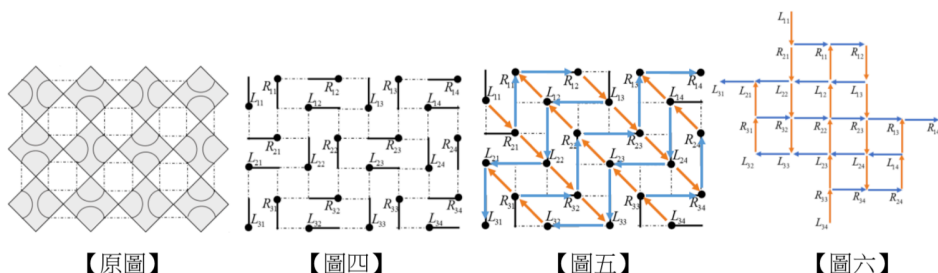
$$\frac{dU_n(x)}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{-nT_{n+1}(x) + U_{n-1}(x)}{1-x^2} \text{，}$$

$$\frac{dV_n(x)}{dx} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\cos[(n+\frac{1}{2})\theta]}{\cos(\frac{1}{2}\theta)} \right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{nW_n(x) + U_{n-1}(x)}{1+x} \text{。}$$

2.2 圖形簡化

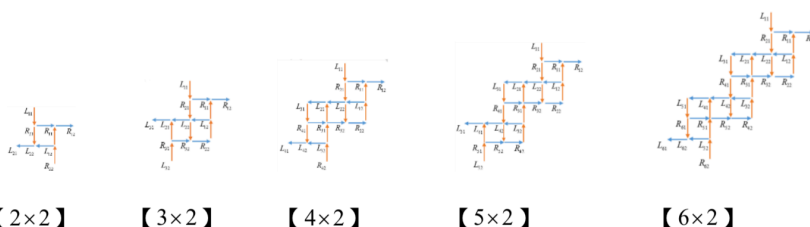
2.2.1 模型簡化成有向圖

為方便討論，我們首先省略土地邊界，分別以實線和虛線表示路和橋。且由於不可重複已經過的道路，因此每條道路可以一點表示。於是我們命名第 i 列第 j 行土地中左下角的點為 L_{ij} 、右上角的點為 R_{ij} ，以其分別代表兩條道路，如【圖四】中。因移動規則，可畫出連接兩點的箭頭方向，如【圖五】。往後說明書中我們皆以左下點 L_{ij} 和右上點 R_{ij} 連接圖討論整體圖形，如【圖六】。



2.2.2 圖形簡化成路線圖

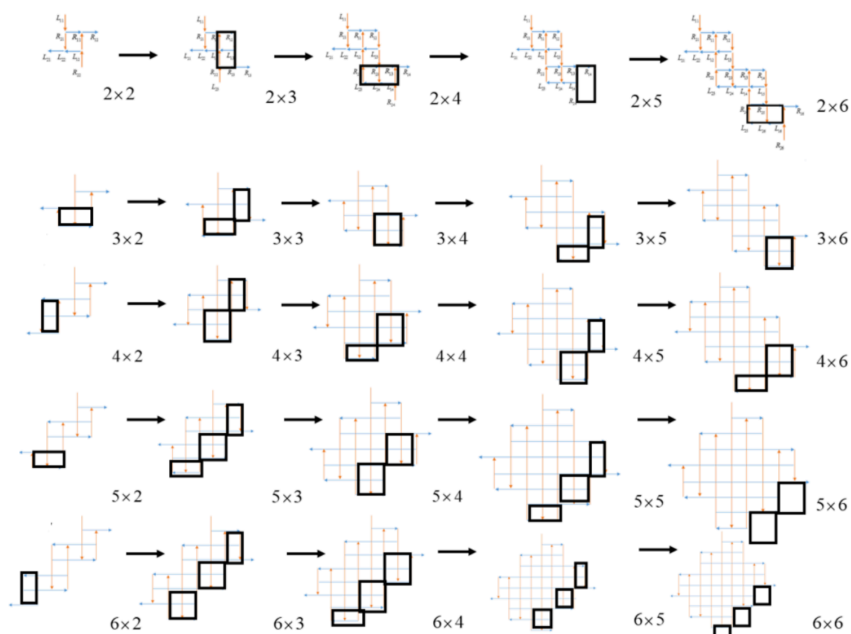
首先觀察 $m \times 2$ 階時的簡化圖形。觀察箭頭交錯所形成的格子數，得到從 $(2m) \times 2$ 階到 $(2m + 1) \times 2$ 階時，圖形增加 1×2 個格子 () 從 $(2m + 1) \times 2$ 階到 $(2m + 2) \times 2$ 階時，圖形增加 2×1 個格子 ()。



再依序觀察 $2 \times n$ 階、 $3 \times n$ 階、 $4 \times n$ 階時，圖形分別從 $m \times (2n)$ 階到 $m \times (2n + 1)$ 階以及從 $m \times (2n + 1)$ 階到 $m \times (2n + 2)$ 階時的增加規律。舉例而言，由 $2 \times (2n)$ 到 $2 \times (2n + 1)$ 會增加一個 2×1 的方形 (); $2 \times (2n + 1)$ 到 $2 \times (2n + 2)$ 則會增加一個 1×2 的方形 ()。 $3 \times (2n)$ 到 $3 \times (2n + 1)$ 會增加一個 2×1 和一個 1×2 的方形； $3 \times (2n + 1)$ 到 $3 \times (2n + 2)$ 則會增加一個 2×2 的方形。可得下表格子增加的規律：

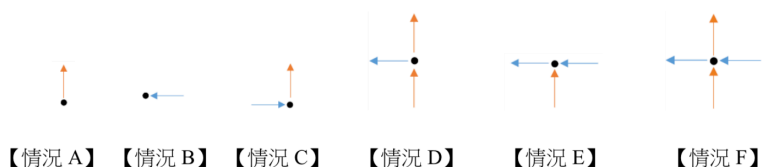
	$m \times (2n)$ 階 到 $m \times (2n + 1)$ 階	$m \times (2n + 1)$ 階 到 $m \times (2n + 2)$ 階
$m = 2k$	增加 1 個  、 $\frac{k}{2} - 1$ 個 	增加 $\frac{k}{2} - 1$ 個  、1 個 
$m = 2k + 1$	增加 1 個  、1 個  、 $\frac{k}{2} - 1$ 個 	增加 $\frac{k}{2} - 1$ 個 

僅於下圖列舉 $m = 2$ 到 $m = 6$ 情況：



2.3 終點位置

經圖形簡化，得將轉動迷宮精簡為點和有向線段（箭頭）的連接。為了求終點位置，我們觀察每個點和箭頭的關係，即為以下六種情況（僅考慮有向線段進、出點的情形，不考慮有向線段的方向）：



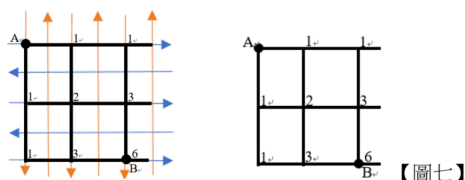
情況 A： L_{11} 、 R_{mn} （當 m 是偶數）、 L_{mn} （當 m 是奇數）。情況 B： L_{m1} 、 R_{1n} 。

由簡化圖形，得以直觀理解僅有位於四個角落的點有機會成為終點，且此四點分布於情況 A 和情況 B 中。因情況 A 的點無法由另一點抵達，故僅能做為起點，否則即是不可抵達點。我們命左上角的 L_{11} 為起點，於是當 m 是偶數時，位於右下角的 R_{mn} ；當 m 是奇數時，位於右下角的 L_{mn} 即為不可抵達點。另情況 B 符合我們對終點的定義，即此點無法經由箭頭再進入下一個點。又符合情況 B 的點僅有： L_{m1} 、 R_{1n} ，因而得知此二點可作為終點。且恆得以找到一路線，沿著圖形邊界分別走向此二終點：始於起點，依序經點 L_{1t} 、 R_{2t} 、 R_{1t} 、 $R_{1(t+1)}$ （ $t = 1, 3, 5, 7, \dots$ ），可抵達終點 R_{m1} ；若依序經過點 L_{t1} 、 $R_{(t+1)1}$ 、 $L_{(t+1)2}$ 、 $L_{(t+1)1}$ （ $t = 1, 3, 5, 7, \dots$ ），則可抵達終點 L_{m1} 。又因為 L_{m1} 和 R_{1n} 分別位於轉動迷宮原始圖形的左下角和右上角，因此也分別稱為左下角終點 L_{m1} 及右上角終點 R_{1n} 。

結論：在 $m \times n$ 階轉動迷宮中，以 L_{11} 作為起點，僅有 R_{1n} 和 L_{m1} 可作為終點。

2.4 最短路線數

因所求為最短路線數，經由已知的簡化圖形及點和有向線段的關係，便僅需分別觀察抵達一邊終點的有限圖形邊界規律，並唯獨考慮由起點出發至抵達終點前，兩個特定方向的移動。也因此，到達轉動迷宮中任一處的最短路線數，皆可運用排列組合中的加法原理計算：若欲計算由起點到 P 點的最短路線數，且能抵達 P 點的只有 Q 點和 R 點，則抵達 P 點的路線數即是由起點出發到 Q 點的路線數，再加上由起點出發到 R 點的路線數。舉例而言：由【圖七】中點 A 走至點 B ，求其最短路線時，我們便僅需考慮向右和向下的箭頭，並透過加法原理，得知其最短路線數為 6。

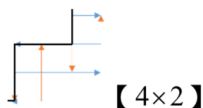


令在 $m \times n$ 階轉動迷宮中，抵達右上角終點 R_{1n} 的最短路線數為 r_{mn} 、抵達左下角終點 L_{m1} 的最短路線數為 l_{mn} 。利用排列組合的加法原理，分別在探討 r_{mn} 、 l_{mn} 時，便僅需考慮由起點出發且抵達終點前，向右和向下方方向的移動、向左和向下方方向的移動。

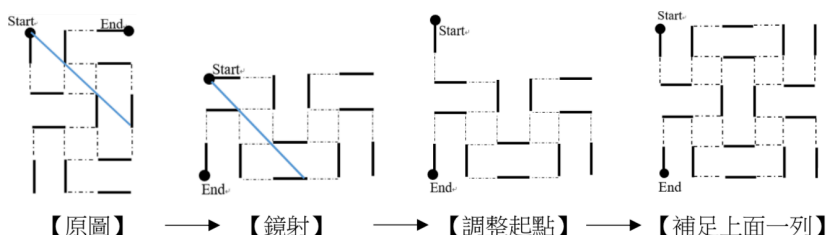
2.4.1 r_{mn} 和 l_{mn} 的關係

定理 1： $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ ， $l_{2n} = 1$ 。

證明。 1. 利用已知圖形規律和加法原理，可知當 $m = 2$ 時， $l_{mn} = l_{2n} = 1$ 。



2. 為求抵達兩終點最短路線數的關係，我們試由 $m \times n$ 階轉動迷宮構造出 $(n+1) \times m$ 階轉動迷宮。討論在 $m \times n$ 階轉動迷宮中，抵達右上角終點 R_{1n} 的最短路線數時，我們可以將轉動迷宮過起點沿對角線做對稱，使對稱後的起點維持一致，而終點則改成左下角終點 L_{m1} 。然而，此時所討論的起點便落於橫向道路上，不符初始遊戲定義，因此需於起點上方再補一條縱向道路。而因為此動作不會增加最短路線數，所以可補足剩餘空缺部分，即在原本圖形上方再增加一列轉動迷宮。故在 $m \times n$ 階轉動迷宮中，起點到右上角終點 R_{1n} 的最短路線數等同於在 $(n+1) \times m$ 階轉動迷宮中，起點到左下角終點 $L_{(n+1)1}$ 的最短路線數，得 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ 。



□

透過 r_{mn} 和 l_{mn} 的關係，往後說明書的討論我們得以只透過考慮在 $m \times n$ 階轉動迷宮中以 R_{m1} 為終點的情況，便能知道抵達兩終點的最短路線數。為顯明 r_{mn} 和 l_{mn} 的關係，舉例其數值如下表：

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	2	2	2	2	2
5	1	2	2	2	2	2
6	1	4	5	5	5	5
7	1	4	5	5	5	5
8	1	8	13	14	14	14

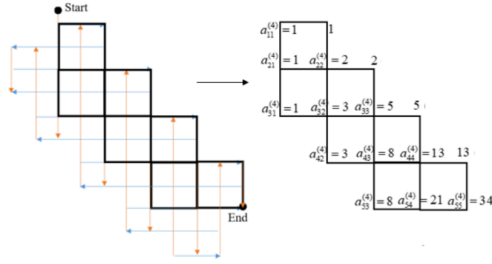
【 r_{mn} 】

$m \backslash n$	2	3	4	5	6	7
2	1	1	1	1	1	1
3	1	2	2	4	4	8
4	1	2	2	5	5	13
5	1	2	2	5	5	14
6	1	2	2	5	5	14
7	1	2	2	5	5	14
8	1	2	2	5	5	14

【 l_{mn} 】

2.4.2 r_{mn} 初始項

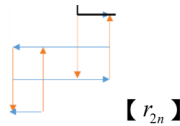
由起點到終點 R_{1n} ，只允許向右 ($\rightarrow$) 和向下 ($\downarrow$)，不允許向上 ($\uparrow$) 或向左 ($\leftarrow$)，所以在簡化圖形中只需關注往右與往下的移動方向。可知由不同路線抵達的點得以透過加法原理加總方法數，得到從起點到該點的最短路線數。若該點位於第 s 條往右的路線與第 t 條往下的路線的交點處，則我們可以將抵達該點的最短路線數記為 a_{st} 。根據 $m \times n$ 階轉動迷宮的簡化圖形，經下述針對不同的 m 討論，可知 $0 \leq s - t \leq m - 2$ 。



於 $m \times n$ 階的轉動迷宮中，終點 R_{1n} 位於第 $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ 條向右箭頭上 ($\lceil \cdot \rceil$ 為高斯符號)。或說，在 $m \times (2t)$ 和 $m \times (2t-1)$ 階的轉動迷宮中，終點 $R_{1(2t)}$ 和 $R_{1(2t-1)}$ 的位置在第 t 條往右的路線上，所以第 t 條往右的路線上最後一個交點處的路線數 a_{tt} ，即為起點到終點的最短路線數 $r_{m(2t)}$ 和 $r_{m(2t-1)}$ 。在 $m \times n$ 階的轉動迷宮中，因終點 R_{1n} 位在原始模型的右上端，與 m 無關，為了便於記錄，將 $m \times n$ 階的「 m 」，記於陣列 a_{st} 的右上角： $a_{st}^{(m)}$ 。例如， 4×9 階、 5×9 階、 6×9 階、... 的轉動迷宮，由起點到終點 R_{19} 的最短路線數分別是陣列 $a_{st}^{(4)}$ 、 $a_{st}^{(5)}$ 、 $a_{st}^{(6)}$ 中的 a_{55} 的值 $a_{55}^{(4)}$ 、 $a_{55}^{(5)}$ 、 $a_{55}^{(6)}$ 、 $a_{55}^{(7)}$ 、...。以下針對不同的 m 作討論：

1. r_{2n}

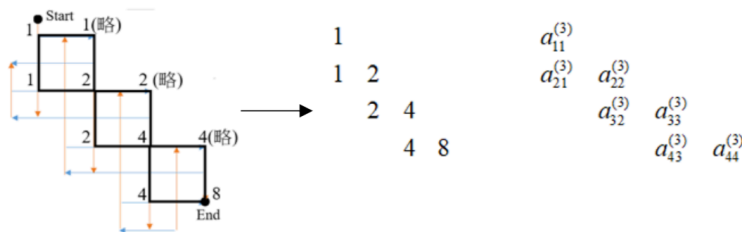
經由 $2 \times n$ 階轉動迷宮的簡化圖形和加法原理，可得 $r_{2n} = 1$ 。下圖黑色路線即為最短路線示意圖。



2. r_{3n}

經由 $3 \times n$ 階轉動迷宮簡化圖形和加法原理，只看向右和向下箭頭交會的點的路線方法數時（即黑框部分）。由於每一列末二數相同，故得將每一列最後一

個重複數字省略，並以此令在討論 $m \times n$ 階轉動迷宮時所得陣列中第 s 列第 t 個數字為 $a_{st}^{(m)}$ ，以 $a_{st}^{(m)}$ 表示討論最短路線數的過程中，利用排列組合中加法原理，只考慮特定方向的移動後，所抵達任意點的路線方法數。



當 $s < t$ 時， $a_{st}^{(m)}$ 不取值；僅討論當 $0 \leq s - t \leq m - 2$ 時， $a_{st}^{(m)}$ 的值。由已知 $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ ，可得 $a_{st}^{(m)} = r_{m(2t)} = r_{m(2t-1)} = l_{(2t+1)m} = l_{(2t)m}$ 。我們欲將 $a_{st}^{(m)}$ 分解成 $a_{tt}^{(m)}$ 的線性組合，以討論給定 m 值， r_{mn} 的遞迴關係式。

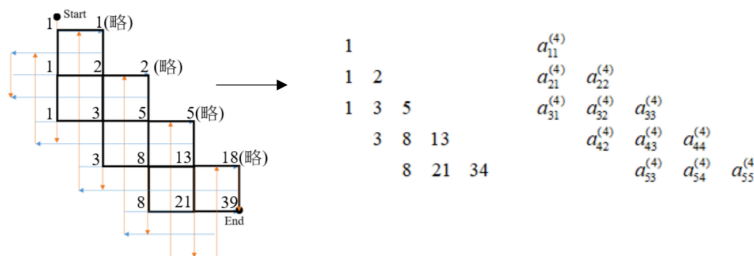
利用加法原理得遞迴關係式：
$$a_{st}^{(3)} = \begin{cases} a_{tt}^{(3)}, & s = t + 1, \\ a_{t(t-1)}^{(3)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(3)}, & s = t \end{cases}, \text{ 且}$$
$$a_{11}^{(3)} = a_{21}^{(3)} = 1。$$

定理 2： $a_{tt}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2^{t-1}$ ， $t \in \mathbb{N}$ ；因此 $r_{3(2t)} = r_{3(2t-1)} = 2r_{3(2t-2)} = 2r_{3(2t-3)} = 2^{t-1}$ 。

證明. $a_{tt}^{(3)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} + a_{t(t-1)}^{(3)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)}$ 。因此數列 $\langle a_{tt}^{(3)} \rangle$ 是首項為 1，公比為 2 的等比數列，故一般項 $a_{tt}^{(3)} = 2^{t-1}$ 。□

3. r_{4n}

經由簡化圖形和加法原理，可列出陣列 $\langle a_{st}^{(4)} \rangle$ ：



利用加法原理得到的遞迴關係式：

$$a_{st}^{(4)} = \begin{cases} a_{(t+1)t}^{(4)}, & s = t + 2 \\ a_{t(t+1)}^{(4)} + a_{tt}^{(4)}, & s = t + 1 \\ a_{t(t-1)}^{(4)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(4)}, & s = t \end{cases}$$

$$\text{且 } a_{11}^{(4)} = a_{21}^{(4)} = a_{31}^{(4)} = 1。$$

定理 3： $a_{tt}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(4)}$ ， $a_{00}^{(4)} = 0$ ， $a_{11}^{(4)} = 1$ ；因此 $r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = 2r_{4(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i)} = 2r_{4(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i-1)}$ 。

證明。 由

$$a_{tt}^{(4)} = a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{t(t-1)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{t(t-2)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{(t-1)(t-2)}^{(4)},$$

我們對 t 做數學歸納法，求將 $a_{(t-1)(t-2)}^{(4)}$ 分解成 $a_{ii}^{(4)}$ 的線性組合，欲證明 $a_{(t+1)t}^{(4)} = \sum_{i=1}^t a_{ii}^{(4)}$ 。

已知當 $t = 1$ 時， $a_{21}^{(4)} = 1 = \sum_{i=1}^1 a_{ii}^{(4)} = a_{11}^{(4)}$ 。假設 $t = k$ 時， $a_{(k+1)k}^{(4)} = \sum_{i=1}^k a_{ii}^{(4)}$ 成立，則 $t = k + 1$ 時，

$$a_{(k+2)(k+1)}^{(4)} = a_{(k+1)(k+1)}^{(4)} + a_{(k+1)k}^{(4)} = a_{(k+1)(k+1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^k a_{ii}^{(4)} = \sum_{i=1}^{k+1} a_{ii}^{(4)},$$

得證。得

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(4)} &= a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{t(t-1)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{t(t-2)}^{(4)} \\ &= 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + a_{(t-1)(t-2)}^{(4)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(4)}. \end{aligned}$$

□

2.4.3 m 和 $m+2$ 關係

我們可以逐一討論在指定的列值 m 下，不同行值 n 所形成的最短路線數數列。另亦討論不同 m 時， $a_{st}^{(m)}$ 的遞迴關係式之間的關係，如下文。

利用加法原理可得到遞迴關係式：

$$a_{st}^{(m)} = \begin{cases} a_{(s-1)t}^{(m)}, & s-t = m-2 \\ a_{s(t-1)}^{(m)} + a_{(s-1)t}^{(m)}, & 0 < s-t < m-2 \\ a_{t(t-1)}^{(m)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m)}, & s-t = 0 \end{cases}$$

且 $a_{11}^{(m)} = a_{21}^{(m)} = a_{31}^{(m)} = \cdots = a_{(m-1)1}^{(m)} = 1$ 。

定理 4： $a_{tt}^{(m+2)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)}$ ；因此

$$\begin{aligned} r_{m(2t)} &= r_{m(2t-1)} = 2r_{m(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i)} r_{m(2i)} \\ &= 2r_{m(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i-1)} r_{m(2i-1)} \end{aligned}$$

Claim 1: 已知陣列 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 中第 $i+1$ 列的數列從第 $(i+1, j_0)$ 元開始有數字，則

$$\sum_{j=j_0}^k a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)k}^{(m)}。$$

對 k 做數學歸納法：當 $k = j_0$ 時，由 $a_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係知， $a_{(i+1)j_0}^{(m)} = a_{ij_0}^{(m)}$ 。假設 $k = r > j_0$ 時， $\sum_{j=j_0}^r a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)r}^{(m)}$ ，則當 $k = r+1$ 時，由 $a_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係及假設得知，

$$a_{(i+1)(r+1)}^{(m)} = a_{(i+1)r}^{(m)} + a_{i(r+1)}^{(m)} = \sum_{j=j_0}^r a_{ij}^{(m)} + a_{i(r+1)}^{(m)} = \sum_{j=j_0}^{r+1} a_{ij}^{(m)}。$$

故由歸納法得證： $\sum_{j=j_0}^k a_{ij}^{(m)} = a_{(i+1)k}^{(m)}。$

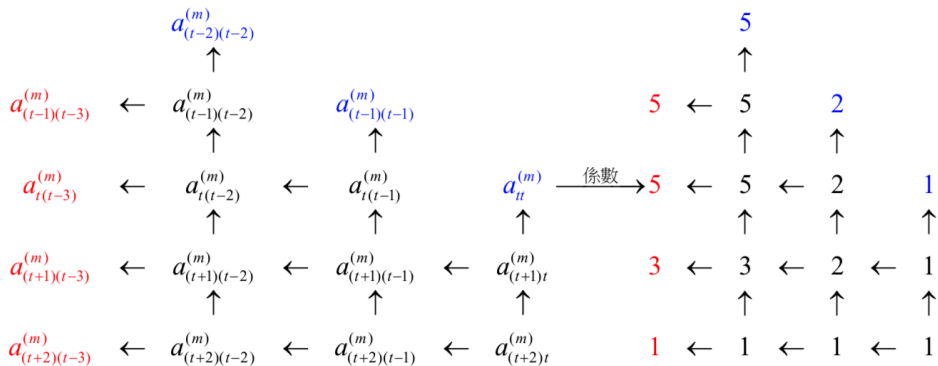
Claim 2: $a_{(t+2)t}^{(m+2)} = \sum_{k=1}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)}$ ， $m \geq 2$ 。

利用 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ ，得將 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分解成 $a_{11}^{(m)}$ 、 $a_{22}^{(m)}$ 、 $a_{33}^{(m)}$ 、 $\cdots$ 、 $a_{tt}^{(m)}$ 的線性組合，

並討論各 $a_{tt}^{(m)}$ 所對應的係數，以「係數圖」表示分解過程所得的係數。舉例來說，將 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分解為

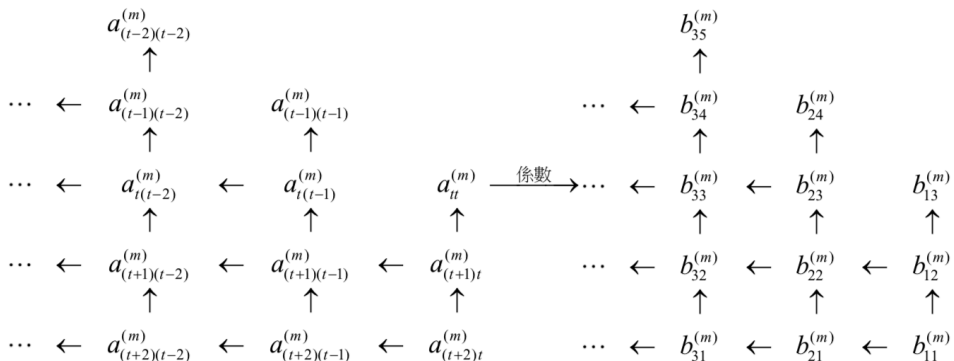
$$\begin{aligned} a_{(t+2)t}^{(m)} = & 1 \cdot a_{tt}^{(m)} + 2 \cdot a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + 5 \cdot a_{(t-2)(t-2)}^{(m)} + 5 \cdot a_{(t-1)(t-3)}^{(m)} \\ & + 5 \cdot a_{t(t-3)}^{(m)} + 3 \cdot a_{(t+1)(t-3)}^{(m)} + 1 \cdot a_{(t+2)(t-3)}^{(m)} \end{aligned}$$

時，其分解過程可以下圖表示



因在 $\langle a_{ij}^{(m)} \rangle$ 的排列裡，每一行最多只有 $m-1$ 項，且分解過程中，一旦得到 $a_{ii}^{(m)}$ 的係數即保留它不動，不再將之分解，因此有 $a_{ii}^{(m)}$ 係數 = $a_{i(i-1)}^{(m)}$ 係數 = $a_{i(i-2)}^{(m)}$ 係數。而且「係數圖」由右下開始往左往上利用加法原理寫出「係數」的時候，欲保留最左邊一行為 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 分解後的項時（即為「係數圖」中紅色的部份），該行每一項的係數都等於右邊一項的係數。

令「係數圖」中， $a_{ij}^{(m)}$ 的位置對應的係數為 $b_{(t+1-j)(t+3-i)}^{(m)}$ ，即：



若最左邊的一行為第 i_0 行，其中 $i_0 \geq 1$ ，則當 $j \leq i_0$ 時， $b_{i_0 j}^{(m)} = b_{(i_0+1)j}^{(m)}$ ，且 $i > i_0$ 時，

$$b_{ij}^{(m)} = \begin{cases} b_{jj}^{(m)}, & i - j = -1 \text{ or } -2 \\ b_{(i-1)j}^{(m)}, & i - j = m - 4 \\ b_{i(j-1)}^{(m)} + b_{(i-1)j}^{(m)}, & 0 < i - j < m - 4 \\ b_{j(j-1)}^{(m)} + b_{(j-1)(j-1)}^{(m)}, & i - j = 0 \end{cases},$$

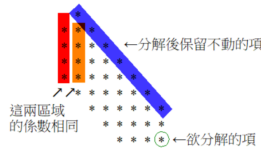
則可發現當 $i > i_0$ 且 $i - j \geq 0$ 時， $b_{ij}^{(m)}$ 的遞迴關係與 $a_{ij}^{(m-2)}$ 的遞迴關係相同，即 $b_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-2)}$ ；當 $i - j = -1$ 或 -2 時， $b_{ij}^{(m)} = a_{ii}^{(m)}$ 。

因此若將「係數圖」利用加法原理從第 $(t+2, t)$ 元的 $b_{11}^{(m)}$ 推到第一行（即 $i = 1$ ）的 $b_{tt}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-1)}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-2)}^{(m)}$ 、 $\dots$ 、 $b_{t(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ ， $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 即可分解成

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t b_{(t+1-k)(t+3-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m)} + \sum_{k=3}^{\min\{t+2, m-1\}} b_{t(t+3-k)}^{(m)} a_{k1}^{(m)}。$$

又因第一行為「係數圖」最左邊的一行，所以 $b_{tt}^{(m)}$ 、 $b_{t(t-1)}^{(m)}$ 、 $\dots$ 、 $b_{t(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ 分別等同於 $b_{(t-1)t}^{(m)}$ 、 $b_{(t-1)(t-1)}^{(m)}$ 、 $\dots$ 、 $b_{(t-1)(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m)}$ ，又分別等於 $a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)}$ 、 $a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)}$ 、 $\dots$ 、 $a_{(t-1)(t+3-\min\{t+2, m-1\})}^{(m-2)}$ ，因此 $a_{(t+2)t}^{(m)}$ 得寫成：

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)} a_{21}^{(m)} + \sum_{k=4}^{\min\{t+2, m-1\}} a_{(t-1)(t+3-k)}^{(m-2)} a_{k1}^{(m)}。$$



因為對於所有的 k ， $a_{k1}^{(m)} = 1$ ，且由 Claim 1 整理上式可得 $\sum_{k=4}^{\min\{t+2, m-1\}} a_{(t-1)(t+3-k)}^{(m-2)} = a_{t(t-1)}^{(m-2)}$ ，又 $a_{(t-1)(t-1)}^{(m-2)} + a_{t(t-1)}^{(m-2)} = a_{tt}^{(m-2)}$ ，因此

$$a_{(t+2)t}^{(m)} = \sum_{k=2}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)} + a_{tt}^{(m-2)} = \sum_{k=1}^t a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)}。$$

最後，整理式子便可得證定理 4。

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(m+2)} &= a_{t(t-1)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} = a_{t(t-2)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} \\ &= 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + a_{t(t-2)}^{(m+2)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)}。 \end{aligned}$$

同時，利用定理 4 的遞迴關係得以整理其生成函數。

定理 5： $\langle a_{tt}^{(m)} \rangle$ 的生成函數滿足 $\begin{cases} f_2(x) = \frac{x}{1-x}, f_3(x) = \frac{x}{1-2x}, \forall m \geq 2, \\ f_{m+2}(x) = \frac{x}{1-2x-xf_m(x)} \end{cases}$ ，
 $m \in \mathbb{N}$ 。

證明。 為求以 $\langle a_{tt}^{(m)} \rangle$ 作為係數的生成函數，定義 $a_0^{(m)} = 0, a_1^{(m)} = 1, \forall m \geq 3, m \in \mathbb{N}$ 。已知

$$a_{tt}^{(m)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)} \Leftrightarrow a_{tt}^{(m)} - 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m)} = \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t-k)(t-k)}^{(m-2)} a_{kk}^{(m)}。 \quad (*)$$

在不失一般性的情況下，將 $a_{tt}^{(m)}$ 寫為 a_t 。假設 $f_{m+2}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, f_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$ ，且 $a_0 = b_0 = 0$ ，則 $f_m(x)f_{m+2}(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_2b_0 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + \dots$ ，且 $\frac{f_{m+2}(x)}{x} - 1 - 2f_{m+2}(x) = (a_2 - 2a_1)x + (a_3 - 2a_2)x^2 + (a_4 - 2a_3)x^3 + \dots$ 。由 (*) 式知 $\frac{f_{m+2}(x)}{x} - 1 - f_{m+2}(x) = f_{m+2}(x) \cdot f_m(x)$ ，得冪級數 $f_{m+2}(x) = \frac{x}{1-2x-xf_m(x)}$ 。□

2.4.4 最短路線數一般式

由定理 5 已知 $f_2(x) = \frac{x}{1-x}, f_3(x) = \frac{x}{1-2x}$ ，且 $f_{m+2}(x) = \frac{x}{1-2x-xf_m(x)}$ ，故可知 $f_m(x)$ 均可化簡成分子、分母都是多項式的分式函數。設 $f_m(x) = \frac{h_m(x)}{g_m(x)}$ ，其中 $g_m(x)$ 和 $h_m(x)$ 都是多項式，則

$$f_{m+2}(x) = \frac{h_{m+2}(x)}{g_{m+2}(x)} = \frac{x}{1-2x-x \cdot \frac{h_m(x)}{g_m(x)}} = \frac{x \cdot g_m(x)}{(1-2x) \cdot g_m(x) - x \cdot h_m(x)},$$

因此可令，

$$\begin{cases} h_{m+2}(x) = xg_m(x) \\ g_{m+2}(x) = (1-2x)g_m(x) - xh_m(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_{m+2}(x) = xg_m(x) \\ g_{m+2}(x) = (1-2x)g_m(x) - x^2g_{m-2}(x) \end{cases}。$$

且由 $f_2(x) = \frac{x}{1-x}$ 和 $f_3(x) = \frac{x}{1-2x}$ ，可令 $g_0(x) = g_1(x) = 1$ 。故可得

$$f_{m+2}(x) = \frac{x \cdot g_m(x)}{g_{m+2}(x)}, \text{ 其中 } \begin{cases} g_0(x) = g_1(x) = 1 \\ g_{m+2}(x) = (1-2x)g_m(x) - x^2g_{m-2}(x) \end{cases}, \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}。$$

又因 $g_{2n}(x)$ 和 $g_{2n+1}(x)$ 分別可變數變換成第三類和第二類 Chebyshev 多項式：
 $g_{2n}(x) = (-x)^n \cdot V_n(1 - \frac{1}{2x})$ ， $g_{2n+1}(x) = (-x)^n \cdot U_n(1 - \frac{1}{2x})$ ，因此可得定理 6。

定理 6： 對於自然數 n ，

$$f_{2n}(x) = -\frac{V_{n-1}(1 - \frac{1}{2x})}{V_n(1 - \frac{1}{2x})}, f_{2n+1}(x) = -\frac{U_{n-1}(1 - \frac{1}{2x})}{U_n(1 - \frac{1}{2x})}$$

因篇幅有限，以上定理 6 省略大部分和組合多項式關係的證明。

定理 7：

$$a_{tt}^{(2n)} = \sum_{k=1}^n A_{n,k} (2 - 2 \cos \theta_k)^t, a_{tt}^{(2n+1)} = \sum_{k=1}^n B_{n,k} (2 - 2 \cos \varphi_k)^t。$$

$$\text{其中, } \theta_k = \frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}}, \varphi_k = \frac{k\pi}{n+1},$$

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \frac{1}{2 - 2 \cos \theta_k} \frac{g_{2n-2}(\frac{1}{2 - 2 \cos \theta_k})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(1 - \frac{2 - 2 \cos \theta_i}{2 - 2 \cos \theta_k}\right)} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta_k) V_{n-1}(\cos \theta_k)}{n(1 + \cos \theta_k) V_n(\cos \theta_k) + (1 - \cos \theta_k)(n W_n(\cos \theta_k) + U_{n-1}(\cos \theta_k))}。 \\ B_{n,k} &= \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi_k} \frac{g_{2n-1}(\frac{1}{2 - 2 \cos \varphi_k})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(1 - \frac{2 - 2 \cos \varphi_i}{2 - 2 \cos \varphi_k}\right)} \\ &= \frac{(1 + \cos \varphi_k) U_{n-1}(\cos \varphi_k)}{(1 + \cos \varphi_k) n U_n(\cos \varphi_k) + n T_{n+1}(\cos \varphi_k) - U_{n-1}(\cos \varphi_k)}。 \end{aligned}$$

證明. 因為 $a_{tt}^{(2n)}$ 和 $a_{tt}^{(2n+1)}$ 證明手法雷同，故以下僅證明前者。因 $g_{2n}(x) =$

$(-x)V_n(1 - \frac{1}{2x})$ ，且 $V_n(x)$ 可分解為相異一次因式的乘積，所以

$$f_{2n}(x) = \frac{xg_{2n-2}(x)}{g_{2n}(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_{n,k}}{1 - (2 - 2\cos\theta_k)x},$$

故 $a_{tt}^{(2n)} = \sum_{k=1}^n A_{n,k}(2 - 2\cos\theta_k)^t$ ，其中 $\theta_k = \frac{(k-\frac{1}{2})\pi}{n+\frac{1}{2}}$ 、

$$A_{n,k} = \frac{\frac{1}{2 - 2\cos\theta_k} g_{2n-2}(\frac{1}{2 - 2\cos\theta_k})}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(1 - \frac{2 - 2\cos\theta_i}{2 - 2\cos\theta_k}\right)}。$$

又 $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \left(1 - \frac{2 - 2\cos\theta_i}{2 - 2\cos\theta_k}\right) = g'_{2n}(\frac{1}{2 - 2\cos\theta_k})$ ，因此

$$A_{n,k} = \frac{(1 + \cos\theta_k)V_{n-1}(\cos\theta_k)}{n(1 + \cos\theta_k)V_n(\cos\theta_k) + (1 - \cos\theta_k)(nW_n(\cos\theta_k) + U_{n-1}(\cos\theta_k))}。$$

由 Chebyshev 多項式和 $f(x)$ 的變數變換，進而可推得 r_{mn} 。舉例如下：

1. r_{4n}

$$f_4(x) = \frac{xg_2(x)}{g_4(x)} = \sum_{k=1}^2 \frac{A_{2,k}}{1 - (2 - 2\cos\theta_k)x},$$

$$\text{其中 } \theta_1 = \frac{(1-\frac{1}{2})\pi}{2+\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{5}, \theta_2 = \frac{(2-\frac{1}{2})\pi}{2+\frac{1}{2}} = \frac{3\pi}{5},$$

$$A_{2,1} = \frac{\frac{1}{2 - 2\cos\theta_1} \cdot g_1(\frac{1}{2 - 2\cos\theta_1})}{1 - \frac{2 - 2\cos\theta_2}{2 - 2\cos\theta_1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}},$$

$$A_{2,2} = \frac{\frac{1}{2 - 2\cos\theta_2} \cdot g_1(\frac{1}{2 - 2\cos\theta_2})}{1 - \frac{2 - 2\cos\theta_2}{2 - 2\cos\theta_2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}},$$

即

$$a_{tt}^{(4)} = \sum_{k=1}^2 A_{2,k}(2 - 2\cos\theta_k)^t = \frac{\sqrt{5} - 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^t + \frac{\sqrt{5} + 1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^t。$$

2. r_{5n}

$$f_5(x) = \frac{x \cdot g_3(x)}{g_5(x)} = \sum_{k=1}^2 \frac{B_{2,k}}{1 - (2 - 2 \cos \varphi_k)x} ,$$

$$\text{其中 } \varphi_1 = \frac{\pi}{3} 、 \varphi_2 = \frac{2\pi}{3} 、$$

$$\begin{aligned} B_{2,k} &= \frac{\frac{1}{2-2\cos\varphi_k} \cdot g_3\left(\frac{1}{2-2\cos\varphi_k}\right)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^2 \left(1 - \frac{2-2\cos\varphi_i}{2-2\cos\varphi_k}\right)} \\ &= \frac{(1 + \cos\varphi_k)U_1(\cos\varphi_k)}{2(1 + \cos\varphi_k)U_2(\cos\varphi_k) + 2T_3(\cos\varphi_k) - U_1(\cos\varphi_k)} , \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(5)} &= \sum_{k=1}^2 B_{2,k}(2 - 2 \cos \varphi_k)^t = B_{2,1}(2 - 2 \cos \varphi_1)^t + B_{2,2}(2 - 2 \cos \varphi_2)^t \\ &= \frac{\frac{1}{2-2(\frac{1}{2})} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}}{1 - \frac{2-2(-\frac{1}{2})}{2-2(\frac{1}{2})}} \cdot 1^t + \frac{\frac{1}{2-2(-\frac{1}{2})} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})}}{1 - \frac{2-2(\frac{1}{2})}{2-2(-\frac{1}{2})}} \cdot 3^t = \frac{1+3^{t-1}}{2} 。 \end{aligned}$$

3. r_{6n}

$$f_6(x) = \frac{x \cdot g_4(x)}{g_6(x)} = \sum_{k=1}^3 \frac{A_{3,k}}{1 - (2 - 2 \cos \theta_k)x} ,$$

$$\text{其中 } \theta_1 = \frac{\pi}{7} 、 \theta_2 = \frac{3\pi}{7} 、 \theta_3 = \frac{5\pi}{7} ,$$

$$\begin{aligned} A_{3,k} &= \frac{\frac{1}{2-2\cos\theta_k} \cdot g_4\left(\frac{1}{2-2\cos\theta_k}\right)}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^3 \left(1 - \frac{2-2\cos\theta_i}{2-2\cos\theta_k}\right)} \\ &= \frac{(1 + \cos\theta_k)V_2(\cos\theta_k)}{3(1 + \cos\theta_k)V_3(\cos\theta_k) + (1 - \cos\theta_k)(3W_3(\cos\theta_k) + U_2(\cos\theta_k))} 。 \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(6)} &= \sum_{k=1}^3 A_{3,k}(2 - 2 \cos \theta_k)^t \\ &\approx 0.54313 \times 0.19806^t + 0.34930 \times 1.55496^t + 0.10757 \times 3.24698^t 。 \end{aligned}$$

□

2.4.5 $m \rightarrow \infty$

由圖形考慮，所謂 $m \rightarrow \infty$ ，即可實際對應在迷宮規模為行、列數相同的情況。利用加法原理得遞迴關係式：
$$a_{st}^{(\infty)} = \begin{cases} a_{s(t-1)}^{(\infty)} + a_{(s-1)t}^{(\infty)}, & s > t \\ a_{t(t-1)}^{(\infty)} + a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)}, & s = t \end{cases}, \text{ 且對於任意的}$$
正整數 s ，恆有 $a_{s1}^{(\infty)} = 1$ 。並得列出下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	3	5							
4	1	4	9	14						
5	1	5	14	28	42					
6	1	6	20	48	90	132				
7	1	7	27	75	165	297	429			
8	1	8	35	110	275	572	1001	1430		
9	1	9	44	154	429	1001	2002	3432	4862	
10	1	10	54	208	637	1638	3640	7072	11934	16796

引理 8.1：當 $s \geq t + 2$ 時， $a_{st}^{(\infty)} = \sum_{i=1}^t a_{ii}^{(\infty)} a_{(s-1-i)(t+1-i)}^{(\infty)}$ 。

證明。以下均討論 $a_{st}^{(\infty)}$ 的情況，故省略 $a_{st}^{(\infty)}$ 為 a_{st} 。對 n 作數學歸納法證明，而在歸納證明的檢查初始項、作歸納假設，及利用歸納假設驗證下一項的結果時，都分別利用歸納法。證明程序如下：

第一部份證明 $t = 1$ 和 $t = 2$ 時此定理成立。

第二部份，先證明如果 $t < k$ 時定理成立，則 $(s, t) = (k + 2, k)$ 時，此定理成立。而以此條件作歸納假設，再證明 $s = k$ 時此定理也會成立。

首先，第一部份檢驗 $t = 1$ 和 $t = 2$ 時的情況：當 $t = 1$ 時， $a_{s1} = 1 = a_{11} \times a_{(s2)1}$ ，原式顯然成立。

當 $t = 2$ 時，先對 s 作數學歸納法說明當 $s \geq 4$ 時，有 $a_{s2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(s-1-i)(3-i)}$ ；當 $s = 4$ 時，由遞迴關係式得知

$$a_{42} = a_{41} + a_{32} = a_{41} + a_{31} + a_{22} = 1 + 1 + a_{22} = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{11} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(3-i)(3-i)},$$

原式成立。假設 $s = k \geq 4$ 時， $a_{k2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii} a_{(k-1-i)(3-i)} = a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-3)1}$ 。

則當 $s = k + 1$,

$$\begin{aligned}
 a_{(k+1)2} &= a_{(k+1)1} + a_{k2} = a_{(k+1)1} + a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-3)1} \\
 &= a_{11}a_{(k-1)1} + a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-2)1} \\
 &= a_{11}a_{(k-2)2} + a_{22}a_{(k-2)1} = \sum_{i=1}^2 a_{ii}a_{(k-i)(3-i)} ,
 \end{aligned}$$

故由數學歸納法得證，當 $s \geq 4$ 時，有 $a_{s2} = \sum_{i=1}^2 a_{ii}a_{(s-1-i)(3-i)}$ 。

接著證明第二部分：Claim：當 $t < k$ ，且 $s \geq t + 2$ 時，若 $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii}a_{(s-1-i)(t+1-i)}$

恆成立，則 $a_{(k+2)k} = \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(k+1-i)(k+1-i)}$ 也會成立。

由遞迴關係式得知：

$$\begin{aligned}
 a_{(k+2)k} &= a_{(k+2)(k-1)} + a_{(k+1)(k-1)} + a_{kk} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}a_{(k+1-i)(k-i)} + \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}a_{(k-i)(k-i)} + a_{kk} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} \left(a_{(k+1-i)(k-i)} + a_{(k-i)(k-i)} \right) + a_{kk} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}a_{(k+1-i)(k+1-i)} + a_{kk}a_{11} = \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(k+1-i)(k+1-i)} .
 \end{aligned}$$

Claim：當 $t < k$ ， $s \geq t + 2$ ，以及當 $(s, t) = (k + 2, k)$ 時， $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii}a_{(s-1-i)(t+1-i)}$

若成立，則當 $t = k$ 時，只要 $s \geq k + 2$ ， $a_{st} = \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(s-1-i)(k+1-i)}$ 亦成立。

對於 s ，以數學歸納法證明，首先，當 $s = k + 2$ 時，由上一段的證明得知，此式成立。設 $s = r \geq k + 2$ 時，原式成立，即 $a_{rk} = \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(r-1-i)(k+1-i)}$ ，則當 $s = r + 1$ 時，

$$\begin{aligned}
 a_{(r+1)k} &= a_{(r+1)(k-1)} + a_{rk} = \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii}a_{(r-i)(k-i)} + \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(r-1-i)(k+1-i)} \\
 &= \sum_{i=1}^{k-1} a_{ii} \left(a_{(r-i)(k-i)} + a_{(r-1-i)(k+1-i)} \right) + a_{kk}a_{(r-1-k)1} \\
 &= \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(r-i)(k+1-i)} .
 \end{aligned}$$

故由數學歸納法得證，當 $t = k$ 時，只要 $s \geq k + 2$ ， $a_{sk} = \sum_{i=1}^k a_{ii}a_{(s-1-i)(k+1-i)}$ 也會成立。由以上的證明，可知當 $s \geq t + 2$ 時， $a_{st} = \sum_{i=1}^t a_{ii}a_{(s-1-i)(t+1-i)}$ 。□

定理 8.2： 當 $t > 2$ 時， $a_{tt}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)}$ 。

證明。 當 $t > 2$ 時，

$$\begin{aligned} a_{tt}^{(\infty)} &= a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + a_{t(t-1)}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + a_{t(t-2)}^{(\infty)} \\ &= 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)}。 \end{aligned}$$

□

利用 $a_{tt}^{(\infty)}$ 的遞迴關係式，我們也可以得到生成函數 $f(x)$ 。

定理 8.3： 當 $t \geq 2$ 時， $a_{tt}^{(\infty)}$ 的生成函數為 $f(x) = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ 。

證明。 以 a_t 表示 $a_{tt}^{(\infty)}$ ，將 $a_{tt}^{(\infty)}$ 的生成函數 $f(x)$ 以冪級數表示，可得 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$ 。則

$$(f(x))^2 = a_1^2x^2 + (a_1a_2 + a_2a_1)x^3 + (a_1a_3 + a_2^2 + a_3a_1)x^4 + \cdots = \sum_{t=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_i a_{t-i} \right) x^t，$$

又

$$f(x) - 2xf(x) = a_1x + (a_2 - 2a_1)x^2 + (a_3 - 2a_2)x^3 + \cdots = a_1x + \sum_{t=2}^{\infty} (a_t - 2a_{t-1})x^t。$$

由定理 8.2 知， $\langle a_{tt}^{(n)} \rangle = \langle a_t \rangle$ 的遞迴關係式， $a_t = 2a_{t-1} + \sum_{i=1}^{t-2} a_i a_{t-1-i}$ ，即 $a_t - 2a_{t-1} = \sum_{i=1}^{t-2} a_i a_{t-1-i}$ 。因此， $f(x) - 2xf(x) - a_1x - (a_2 - 2a_1)x^2 = x(f(x))^2$ ，即 $x(f(x))^2 - (1 - 2x)f(x) + x = 0$ ，如同以生成函數方式的證明可得

$$f(x) = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 4x}}{2x}。$$

□

於參考資料 [2] 中發現， $a_{tt}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)}$ 即為卡特蘭數的遞迴關係式。其一般式可表示為 $a_{tt}^{(\infty)} = \frac{1}{1+t} \binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!}$ 。另外，此討論中最短路線數圖形的生成方式，亦符合卡特蘭數的定義之一。

定理 8.4：（卡特蘭數的一般式）

$$a_{tt}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)} = \frac{1}{1+t} \binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!} ;$$

$$r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!} .$$

2.5 討論

透過圖形簡化，我們知道轉動迷宮可簡化表示為點和有向線段的組合。且因為遊戲規則說明不能重複已走過的道路，即不能重複已走過的點和有向線段，因此得知在轉動迷宮模型中的終點位置只有兩個。討論最短路線數時，由簡化路線的規則，可以導出迷宮規模 m 列時，最短路線數的遞迴關係和生成函數 $f_m(x)$ ，並得知 m 和 $m+2$ 之間的遞迴關係以及兩者生成函數之間的關係。由生成函數 $f_m(x)$ 轉換至一般式時，雖曾嘗試直接分解其分母為一次多項式的相乘，但因 $f_m(x)$ 為分子、分母都是 m 次的分式函數，所以 m 值較大時，我們便不會分解它。雖然如此，但我們可以用歸納法得到 $f_m(x)$ 分母的多項式恰有 m 個實根，且與 $f_{m+1}(x)$ 分母的多項式的 $m+1$ 個實根交錯分布，此點和 Chebyshev 多項式相同。其中，我們發現 $f_m(x)$ 分母的多項式可以經變數變換，以 Morgan-Voyce 多項式表示。又從參考資料 [3] 得知 Morgan-Voyce 多項式和 Chebyshev 多項式的關係。因為手法皆為變數變換，故我們透過變數變換，直接將生成函數由 Chebyshev 多項式表示，即可利用其性質，順利將分母分解，並推導出所有規格最短路線數的一般式。有趣的是，在整理作品時，我們更從參考資料 [7] 發現：最短路線數的討論即對應 dyck path of bounded height 的討論。

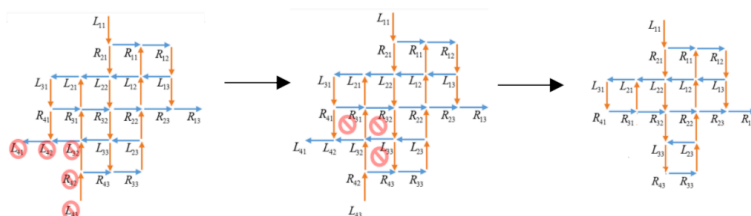
最終，我們期望能夠探討各路線長度所分別對應的路線數以及總路線數。但在此討論前，我們經由觀察已知：在任意規模的迷宮路線中，所有路線長度有短到長形成的數列，公差為 4。又由短到長的路線長度所對應的路線數量先逐漸增加，再逐漸減少，且最長路線數不少於最短路線數。

討論路線數時，複雜的迷宮邊界導致我們不易歸納出各種路線長度所對應的路線數。因此本文著重討論的「最短路線數」碰到的邊界最少，當屬相對容易處理的

部分。而「最長路線數」所碰到的邊界最多，因此我們以最長路線數作為首要研究展望內容。

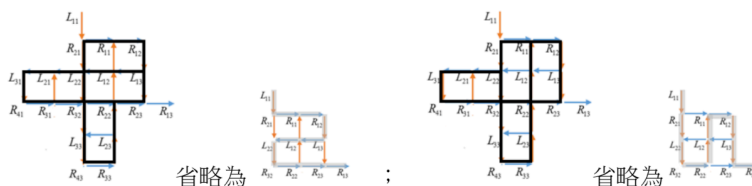
2.5.1 最長路線數

最長路線成立於，符合遊戲規則的條件下，經過最大量的點的路線。由於終點位置有二，所以討論其中一邊時，須避免走向另一終點。舉例而言：當討論 4×3 階的轉動迷宮，抵達終點 R_{13} 的最長路線數時，我們可以再精簡圖形。過程如下：為了不經過終點 L_{41} ，根據有向線段和點的關係，亦不會經過 L_{42} 。且已知 L_{43} 為不可抵達點，即不會經過 R_{42} ，並可推得不會通過 L_{32} 。故可將包含這些點的方格省略後再討論。

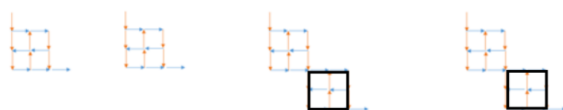


其中，我們知道最長路線的移動必須經過再精簡圖形後的所有點，但不能重複經過任何一點。故其走法必以直向或橫向「日字形」為單位，可視其為一鋪磚問題，將圖形分割討論，得到可行的縱、橫向日字型排法。延續上述例子，由下圖可知，精簡圖形可切割為兩種的「日字形」組成，分別對應兩條最長路線。得 4×3 階的轉動迷宮，抵達終點 R_{13} 的最長路線數為 2。

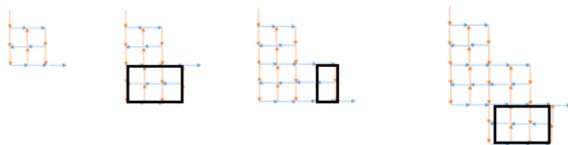
其中，圖形經省略後遺留「唯一填法，且不會影響圖形其他部分」的邊角，毋須在此再討論，因此得再省略部分圖形。



於是，便可以得到規格增加時，精簡圖形變化的規律。然而，因為尚未得到分別抵達右邊終點和左邊終點的最長路線數間明確的關係，因此此處僅先研究抵達右邊終點的最長路線數，以 c_{mn} 表示規格 $m \times n$ 階時的最長路線數。



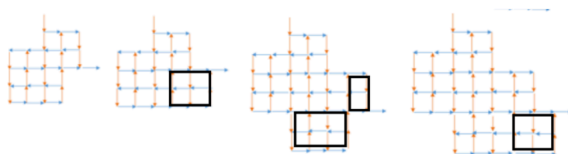
由 $m = 3$ 圖形規律，可得遞迴關係式： $c_{32} = 1$ ， $c_{3(2n+1)} = c_{3(2n+2)} = 2^{n-1}$ 。



由 $m = 4$ 圖形規律，可得遞迴關係式： $c_{42} = 1$ ， $c_{43} = 2$ ，

$$c_{4(2n)} = 3 \times 2c_{4(2n)} - c_{4(2n-1)} = 4c_{4(2n-1)} - c_{4(2n-2)} ,$$

$$c_{4(2n+1)} = 2c_{4(2n)} - c_{4(2n-1)} \circ$$

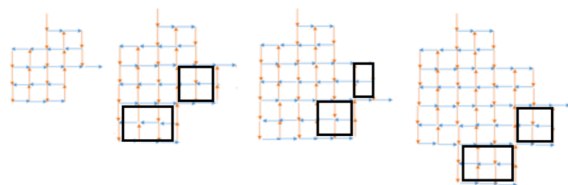


由 $m = 5$ 圖形規律，可得遞迴關係式： $c_{52} = 1$ ， $c_{53} = 8$ ， $c_{54} = 26$ ，

$$c_{5(2n+1)} = 6c_{5(2n)} - 2c_{5(2n-1)} + 2d_{n-1} ;$$

$$c_{5(2n)} = c_{5(2n-1)} - 2c_{5(2n-2)} + 2c_{5(2n-3)} + 2d_{2n-2} ;$$

$$d_1 = 10 , d_n = 10d_{n-1} + 8a_{5(2n-1)} \circ$$



【 $m = 6$ 圖形規律】已知 $m \geq 6$ 時圖形規律，但尚未求得其遞迴關係式。

3 結論 (Summary and Conclusions)

首先，在終點位置的討論中，我們由點和有向線段的關係可知，轉動迷宮內終點僅有左下角終點 L_{m1} 和右上角終點 R_{1n} 。

再者，在最短路線數的討論中，我們先得知在 $m \times n$ 階轉動迷宮中，起點到終點 R_{1n} 的最短路線數以及在 $m \times (n+1)$ 階轉動迷宮中，起點到終點 L_{m1} 最短路線數相等： $r_{mn} = l_{(n+1)m}$ ，且 $l_{2n} = 1$ 。

進一步，我們利用排列組合的加法原理，將最短路線數以陣列 $a_{st}^{(m)}$ 表示，得兩者關係： $a_{tt}^{(m)} = r_{m(2t)} = r_{m(2t-1)} = l_{(2t+1)m} = l_{(2t)m}$ 。並得到 $m = 3$ 和 $m = 4$ 的遞迴關係：

$$a_{tt}^{(3)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(3)} = 2^{t-1}, \quad t \in \mathbb{N}; \quad r_{3(2t)} = r_{3(2t-1)} = 2r_{3(2t-2)} = 2r_{3(2t-3)} = 2^{t-1};$$

$$a_{nn}^{(4)} = 2a_{(n-1)(n-1)}^{(4)} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{ii}^{(4)}, \quad a_{00}^{(4)} = 0, \quad a_{11}^{(4)} = 1,$$

$$r_{4(2t)} = r_{4(2t-1)} = 2r_{4(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i)} = 2r_{4(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{4(2i-1)}.$$

接著，求得最短路線數在列值為 m 時和列值為 $m + 2$ 時的遞迴關係：

$$a_{tt}^{(m+2)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(m+2)} + \sum_{k=1}^{t-2} a_{(t+1-k)(t+1-k)}^{(m)} a_{kk}^{(m+2)};$$

$$\begin{aligned} r_{m(2t)} &= r_{m(2t-1)} = 2r_{m(2t-2)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i)} r_{m(2i)} \\ &= 2r_{m(2t-3)} + \sum_{i=1}^{t-2} r_{(m-2)(2t+2i-1)} r_{m(2i-1)}. \end{aligned}$$

並由此遞迴關係求得 $\langle a_{tt}^{(m)} \rangle$ 的生成函數 $f_m(x)$ 滿足

$$\begin{cases} f_2(x) = \frac{x}{1-x}, \quad f_3(x) = \frac{x}{1-2x}, \\ f_{m+2}(x) = \frac{x}{1-2x-xf_m(x)}, \quad \forall n \geq 2, \quad m \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

而後，經由 Chebyshev 多項式和生成函數 $f_m(x)$ 的關係： $f_{2n}(x) = -\frac{V_{n-1}(1-\frac{1}{2x})}{V_n(1-\frac{1}{2x})}$

和 $f_{2n+1}(x) = -\frac{U_{n-1}(1-\frac{1}{2x})}{U_n(1-\frac{1}{2x})}$ ，再利用 Chebyshev 多項式可以分解成一次因式相乘的性質，我們求得一般項如下：

$$a_{tt}^{(2n)} = \sum_{k=1}^n A_{n,k} (2 - 2\cos \theta_k)^t, \quad a_{tt}^{(2n+1)} = \sum_{k=1}^n B_{n,k} (2 - 2\cos \varphi_k)^t.$$

其中， $\theta_k = \frac{(k - \frac{1}{2})\pi}{n + \frac{1}{2}}$ 、 $\varphi_k = \frac{k\pi}{n + 1}$ 、

$$A_{n,k} = \frac{(1 + \cos \theta_k)V_{n-1}(\cos \theta_k)}{n(1 + \cos \theta_k)V_n(\cos \theta_k) + (1 - \cos \theta_k)(nW_n(\cos \theta_k) + U_{n-1}(\cos \theta_k))}、$$

$$B_{n,k} = \frac{(1 + \cos \varphi_k)U_{n-1}(\cos \varphi_k)}{(1 + \cos \varphi_k)nU_n(\cos \varphi_k) + nT_{n+1}(\cos \varphi_k) - U_{n-1}(\cos \varphi_k)}。$$

至終，當行列值趨近於無限大時，可得最短路線數和卡特蘭數有關：

$$a_{tt}^{(\infty)} = 2a_{(t-1)(t-1)}^{(\infty)} + \sum_{i=1}^{t-2} a_{ii}^{(\infty)} a_{(t-1-i)(t-1-i)}^{(\infty)} = \frac{1}{1+t} \binom{2t}{t} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!}；$$

$$r_{(2t-1)(2t-1)} = r_{(2t)(2t)} = \frac{(2t)!}{(t+1)!t!}。$$

參考資料 (Reference)

- [1] 普通高級中學數學，第二冊 (2012)。新北市: 翰林。
- [2] 組合數學-2 版 (2012)，曹汝成。廣州: 華南理工大學出版社。
- [3] Chebyshev 和 Morgan-Voyce 多項式、Fibonacci 數、Pell 數、Lucas 數等的關係探討，翁翠微。數學傳播 34 卷 4 期 (pp. 31-42)。
- [4] Liu, C. L. (1969). *Introduction to Combinatorial Mathematics*. NY:McGraw-Hill.
- [5] Mason, J. C. and Handscomb, D. C. (2003), Chapter 1 Definitions, *Chebyshev Polynomials*, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Fla, USA.
- [6] Wilf, Herbert S. (1994). Chapter 1 Introductory Ideas and Examples & Chapter 2 Series (pp.1-72), *Generatingfunctionology*. Academic Press.
- [7] C. Krattenthaler. (2000). *Permutations with Restricted Patterns and Dyck Paths*. Advances in Applied Mathematics Vol. 27, 510–530.