

圖形中的數獨

新北市立鷺江國民中學 鄭宇翔

指導老師 連琨銘

Abstract

First we discussed the parity of the following question "When n lines are given on the plane, any three lines do not intersect at one point, and arbitrary two lines are not parallel so that $n - 1$ intersections along any line are just labeled $1, 2, \dots, n - 1$ one time." The results show that there is a solution when the number of lines is even and no solution when the number of lines is odd. Then we used the viewpoints of "vertex coloring" and "edge coloring" in graph theory to think about the same problem and highlight the mathematical structure behind the problem. Finally, we discussed the case of "Replace a line into a circle"; "There are m lines parallel, any three lines do not intersect at one point" and "There are p lines intersect at one point, and any two lines are not parallel." And we discussed the last part from the perspectives of Hypergraph and Incident Matrix, some interesting conclusions are obtained.

中文摘要

本文一開始以直線數奇偶性來探討「在平面上給定 n 條直線，任三條線不共點，任兩條線不平行，讓沿著任何一條直線上的 $n - 1$ 個交點，都剛好出現 $1, 2, 3, \dots, n - 1$ 各一次」，求解的存在性。研究結果顯示直線數是偶數時有解，而直線數是奇數時無解。接著用圖論中「點著色」及「邊著色」的觀點來思考同一問題，突顯出該問題背後的數學結構。最後進一步探討「將直線替換成圓」，「有 m 條直線平行，任三條不共點」以及「有 p 條直線共點，任兩條不平行」的情況。其中最後一部分「有 p 條直線共點，任兩條不平行」的情況，從超圖 (Hypergraph) 和關聯矩陣 (Incident Matrix) 的觀點，得到一些有趣的結論。

1 簡介

1.1 研究動機

某次的數學輔導課，老師丟給我一道有關在直線交點上填數字的問題，這道問題出自科學研習月刊 57 卷第 5 期第 58 頁「標好標滿」[2]。題目敘述如下：

「桌上畫著四條直線，兩兩相交。小志想在每個交點上標一個數字，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 1,2,3 各一次。」

題目中的小志，假如能讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 1,2,3 各一次，這樣的情況我們就稱為「標好標滿」。我第一眼的印象，感覺這題目很像是一種特別的數獨 (Sudoku)，只是把常見數獨中 9×9 的格子，轉換成相交直線上的交點。我直接動手做，一下子就完成了。但在實際動手畫五條直線求解時卻遇到困難，怎麼試都無法成功，我覺得是無解，但要如何證明呢？我自己畫了好幾張紙嘗試填數字失敗後，居然在眼中慢慢浮現兩條線一組的畫面。

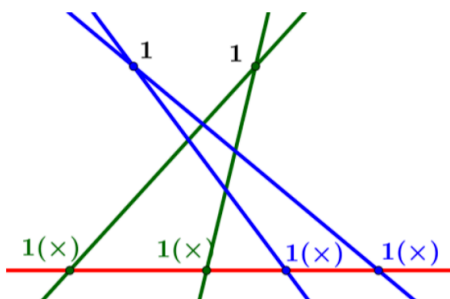


圖 1：五條直線兩兩相交情形

如圖 1，兩條綠色的線和兩條藍色的線在紅色的線上共有 4 個交點，當在兩條綠色線交點處標 1，也在兩條藍色線交點處標 1，則在紅色線上的 4 個交點都無法再標上 1。得到這個結論後我非常興奮向老師分享。我對這個問題非常有興趣，想要往直線數 n 來延伸嘗試尋求規律。我請教老師要從什麼地方下手，老師建議我先上網查數獨 [5]、拉丁方陣和圖論的相關知識 [4]，並且帶著我一起討論文獻中的內容，慢慢地我從參考文獻得到許多看問題的觀點。

1.2 研究目的與問題

我們將原題目敘述中的直線數改寫為 n ，得到以下問題描述：

「在平面上給定兩兩相交的 n 條直線，任三線不共點。然後再將每條直線與其他直線相交的 $n - 1$ 個交點上，標上 $1, 2, 3, \dots, n - 1$ 的數字，使得同一條直線上點的標號，都剛好出現 $1, 2, 3, \dots, n - 1$ 數字各一次。」

此時，我們突發奇想，假如在平面上給定的 n 條直線有三線共點或者有平行的情況發生，是否能「標好標滿」？或者我們將平面上的 n 條直線改成 n 個圓，那麼

標號的情況為何？研究過程中，根據我們的問題情境，我們參考了文獻 [3, 4] 相關的圖論知識，使用以下的術語定義。

1.3 術語解釋與符號定義

1.3.1 圖論知識 以下為在本研究將會用到的圖論知識。

1. 圖 (graph)：圖 G 是由一些頂點 (vertex) 與邊 (edge) 所組合而成的結構。設圖 G 所有的頂點所成集合為 $V(G)$ ，且圖 G 所有的邊所成集合為 $E(G)$ 。若存在一條邊連結頂點 u, v ，我們可以將此邊記為 uv ，即 $uv \in E(G)$ 。
2. 簡單圖 (simple graph)：若圖 G 中，任意兩頂點之間最多只有一條邊相連，而且不會有一條邊連接相同一點，則稱 G 為簡單圖。
3. 子圖 (subgraph)：圖 H 及圖 G 滿足 $V(H) \subset V(G)$ 且 $E(H) \subset E(G)$ ，我們稱 H 為 G 的子圖。
4. n -完全圖 (n -complete graph)：圖 G 中有 n 個頂點且任兩點都有邊相連，我們就稱圖 G 為 n -完全圖，以 K_n 表示。
5. 獨立點集 (independent set)：若圖 G 中有一點集 $X \subset V(G)$ ，且 X 中任意相異兩個頂點沒有邊連結，我們稱 X 為一獨立點集。
6. 二分圖 (bipartite graph)：指圖 G 的點集 $V(G)$ 可以表示成兩個互斥獨立點集 X 和 Y 的聯集，也就是 $V(G) = X \cup Y$ 且 $X \cap Y = \phi$ ，且 $E(G)$ 裡面邊僅能連接 X 和 Y 之間的點。若 $X = m$ 且 $Y = n$ 且對任意兩個頂點 $v_1 \in X$ 和 $v_2 \in Y$ ， $v_1 v_2 \in E(G)$ ，則圖 G 為完全二分圖 (complete bipartite graph) 記為 $K_{m,n}$ 。
7. k -分圖 (k -partite graph)：若圖 G 的點集 $V(G) = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$ 且所有的 X_i 均為獨立點集且 $X_i \cap X_j = \phi, i \neq j$ ， $E(G)$ 裡面邊僅能連接相異獨立點集之間的點，則圖 G 稱為 k -分圖。若對所有 $i = 1, 2, \dots, k$ ， $|X_i| = n_i$ 且對所有 $v_i \in X_i$ 和 $v_j \in X_j$ ， $v_i v_j \in E(G)$ ，則圖 G 為完全 k -分圖 (complete k -partite graph) 記為 $K_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ 。
8. 線的 k -分圖 (k -partite graph)：若圖 G 的線集 $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$ 且所有的 E_i 均為獨立線集且 $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$ ，則圖 G 稱為線的 k -分圖。若對所有 $i = 1, 2, \dots, k$ ， $|E_i| = m_i$ 且對所有 $e_i \in E_i$ 和 $e_j \in E_j$ ， $e_i e_j \in V(G)$ ，則圖 G 為線的完全 k -分圖 (complete k -partite graph)。記為 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ (或 $K'_{m_1, m_2, \dots, m_k}$)。

1.3.2 符號及名詞定義 對於本研究所要探討的問題，我們做以下定義。

定義 1. 給定 n 個圖形的序列 $\{C_i\}_{i=1}^n = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ，其中 C_i 為直線或曲線。在平面上圖形與圖形的交點所成集合為 V 。若 V 中有兩個交點 u, v 在某個 C_i 中，且沿著圖形 C_i 中沒有其他交點介於 u, v 之間，那麼我們稱 u, v 相鄰且 uv 為一個邊。 E 表示由這樣圖形序列 $\{C_i\}_{i=1}^n$ 所形成的邊之集合。特別以 $\langle \{C_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 表示本研究所探討的圖。

定義 2. 給定圖 $\langle \{C_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 若存在 $k \in \mathbb{N}$ ，將圖上的點標上數字 $1, 2, 3, \dots, k$ ，使得對所有 $i = 1, 2, \dots, n$ ， C_i 上交點的標號， $1, 2, 3, \dots, k$ 的數字至多出現一次，我們稱這樣情況為 **k-labeled**。

定義 3. 圖 G 中一個頂點 v 連接到其他頂點的邊數，我們就稱為是該頂點的度數，以 $\deg(v)$ 表示。若圖 G 有 n 個頂點 $v_1, v_2, \dots, v_n$ ，我們定義圖 G 的最大度數為 $\Delta(G)$ ，即 $\Delta(G) = \max\{\deg(v_i) : i = 1, 2, \dots, n\}$ 。

若 $\langle \{C_i\}_{i=1}^l, V, E \rangle$ 是 k -labeled，則它必為 $(k+1)$ -labeled。此外，回應一開始「標好標滿」的主題。設 C_i 上有 n_i 個交點，令 $m = \max\{n_i \mid i = 1, 2, \dots, l\}$ ，即圖形序列中存在一個 C_i 與其他圖形有最多的交點數 m 。若 $\langle \{C_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 為 m -labeled，則我們稱為「**標好**」。若 $\langle \{C_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 為 m -labeled 但無法 $(m-1)$ -labeled，則我們稱為「**標好標滿**」。

1.4 研究問題

根據研究動機，我們嘗試探討以下四個問題：

1. 探討平面上給定「任三條線不共點，任兩條線不平行」之 n 條直線標好標滿問題。
2. 探討平面上給定「任兩個圓交於兩點」之 n 個圓標好標滿問題。
3. 探討平面上給定「有 m 條線平行，任三條不共點」之 n 條直線標好標滿問題。
4. 探討平面上給定「有 p 條線共點，任兩條不平行」之 n 條直線標好標滿問題。

2 研究內容

2.1 任三條線不共點，任兩條線不平行

平面上有 n 條直線，任三條線不共點，任兩條線不平行，兩兩相交於一點，直線最多交點數為 $n-1$ 。讓沿著任何一條直線上的 $n-1$ 個交點剛好出現 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 各一次，則圖為 n -labeled。

定理 1：平面上有 n 條直線，當 n 為奇數時，則圖為 n -labeled，無法標好標滿。

證明. 令 $A = \{\text{所考慮平面上的 } n \text{ 條直線}\}$ ，我們考慮直線上「1」的標號方式。任取一條直線稱 L_1 ，令 L_1 上標「1」的點為 $L_1 \cap L_2$ ，接著自 $A \setminus \{L_1, L_2\}$ 中任取一條線稱為 L_3 ，令 L_3 上標「1」的點為 $L_3 \cap L_4, \dots$ ，依此類推，最後令 L_n 上標「1」的點為 $L_n \cap L_k, k < n$ 。但 $L_k \cap L_{k+1}$ 或 $L_n \cap L_{k-1}$ 亦標號為「1」，故知 L_k 上有兩個相異的點標號皆為「1」。因此當 n 為奇數時為 n -labeled。□

定理 2：平面上有 n 條直線，當 n 為偶數時，則圖為 $(n-1)$ -labeled，可標好標滿。

構造方法如下：

- (1) 如表 1 所示，從左上到右下的對角線不需填入數字，表格內容有對稱性。
- (2) 接著由左上到右下的斜線依序填滿 $1, 2, 3, \dots, k-1$ 。
- (3) 剩下的空格由左而右，由上而下依序填入適當的數字。
- (4) 表格的方法等於有順序的標示直線與交點上填入的數字。

表 1： $n = k$ (k 為偶數) 時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	$\dots$	$\dots$	L_{k-1}	L_k
L_1		1	2	3	4	5			$k-2$	$k-1$
L_2	1		3	4	5			$k-2$	$k-1$	2
L_3	2	3		5			$k-2$	$k-1$	1	4
L_4	3	4	5				$k-1$	1	2	$\vdots$
L_5	4	5					1	2	$\vdots$	$k-2$
L_6	5						2	$\vdots$	$\vdots$	1
$\vdots$			$k-2$	$k-1$	1	2		$\vdots$	$k/2-1$	3
$\vdots$		$k-2$	$k-1$	1	2	$\dots$	$\dots$		$k/2$	$\vdots$
L_{k-1}	$k-2$	$k-1$	1	2	$\dots$	$\dots$	$k/2-1$	$k/2$		$k-3$
L_k	$k-1$	2	4	$\dots$	$k-2$	1	3	$\dots$	$k-3$	

定義 4 (標準型拉丁方陣的數量 $L^*(n)$)。設 a_{ij} 表為 $n \times n$ 拉丁方陣第 i 列第 j 行的數值，令標準型拉丁方陣的數量記為 $L^*(n)$ 並且符合下列條件：

- (1) $a_{1j} = j$ ，對於 $2 \leq j \leq n$ ； $a_{i1} = i$ ，對於 $2 \leq i \leq n$ 。
- (2) $a_{ij} = n$ ，對於 $i = j$ 。
- (3) $a_{ij} = a_{ji}$ ，對於 $1 \leq i, j \leq n$ 。

推論 1： 平面上有 n 條直線，當 n 為偶數時，則：

$$(n-1)! \leq \text{標好標滿的方法數} \leq L^*(n)$$

證明。 由於在表格中的標號只是不同交點的代號，所以任兩個號碼互相取代。例如所有的標號 1 換成標號 3，所有的標號 3 換成標號 1，其結果依然成立（可標好標滿），如表 2 及表 3 所示。而且在不失一般性的前題下， $(n-1)! \leq \text{標好標滿的方法數} \leq L^*(n)$ 。

□

表 2： $k = 4$ 時

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		1	2	3
L_2	1		3	2
L_3	2	3		1
L_4	3	2	1	

表 3： $k = 4$ 時，把標號 1 和標號 3 調換

直線	L_1	L_2	L_3	L_4
L_1		3	2	1
L_2	3		1	2
L_3	2	1		3
L_4	1	2	3	

說明。 當使用表格來討論問題後，很自然的會想到不同標號填入表格的方法數有多少種，我觀察到數字標號不在乎數字本身的「大小」或「順序」，只是表達「不同」，因此互換數字不會改變表格的可行性，意思是說當直線標好標滿問題有解，不會因為互換數字而變成無解。

數學專題課和老師討論時，老師問我：「假如把點變成線，線變成點，這時的情況為何？」老師引導我從圖論的觀點來討論「標好標滿」問題。我就在紙上把圖案畫下來討論，發現和著色問題有關，於是我們將有關著色問題相關定義羅列如下 [4]。

定義 5. 一個圖 G 上點的 k -著色 (k -coloring) 是指一個函數 $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ，而一個正常 k -著色 (proper k -coloring) 是指滿足 $f(x) \neq f(y)$ 對所有 $xy \in E(G)$ 都成立的 k -著色。

定義 6. 一個圖 G 上點的著色數 (chromatic number) $\chi(G)$ 是使得 G 存在正常 k -著色的最小非負整數 k 。如果 $\chi(G) \leq k$ ，也會說 G 可以被 k -著色 (k -colorable)。

定義 7. 一個圖 G 的 k -邊著色 (k -edge-coloring) 是指一個函數 $f: E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 。一個正常的 k -邊著色 (proper k -edge-coloring) 是指滿足 $f(e) \neq f(e')$ 對所有相鄰的邊 e 和 e' 都成立的 k -邊著色。

定義 8. 一個圖 G 的邊著色數 (chromatic index) $\chi'(G)$ 是使得 G 存在正常 k -邊著色的最小非負數 k ，為了方便，如果 G 沒有邊，定義 $\chi'(G) = 0$ 。

定義 9. 一個重圖 G 的線圖 (line graph) $L(G)$ ，它的點集 $V(L(G)) = E(G)$ 且 $L(G)$ 的兩個點相鄰若且唯若它們在 G 中是相鄰的兩條邊。為了方便，我們常將 $L(G)$ 簡記為 G' 。

由定義 9 得知， G 的邊著色問題其實就相當於是考慮其線圖的點著色問題。所以 $\chi'(G) = \chi(L(G))$ (簡記為 $\chi'(G) = \chi(G')$)。

定理 3： 若圖 $G = \langle \{C_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 且 $\chi(G) = k$ ，則圖 G 為 k -labeled。

證明. 由定義 2 可得到定理 3。 □

定理 4： 當 n 是偶數時， $\chi'(K_n) = n - 1$ ，故 K_n 可以標好標滿。
當 n 是奇數時， $\chi'(K_n) = n$ ，故 K_n 無法標好標滿。

證明. 當 n 是偶數時： $\{L_i\}_{i=1}^n$ 最多交點數為 $n - 1$ 。可以用下面的方式給出 K_n 的正常 $(n - 1)$ -邊著色。在平面上取正 $n - 1$ 邊形的中心和所有頂點當作 K_n 的點 $0, 1, 2, \dots, n - 1$ ，把 $(0, 1), (2, n - 1), (3, n - 2), \dots, (n/2, n/2 + 1)$ 這些邊塗色 1，接著，把這組邊旋轉 $\frac{360}{n-1}$ 度，得到另一組邊，塗色 2。繼續做旋轉著色的動作，一直到用 $n - 1$ 種顏色。如此剛好把圖著好顏色，故得 $\chi'(K_n) = n - 1$ 。底下以 K_6 為例，用紅色、藍色、綠色、橘色、紫色代表 5 種不同號碼標號。

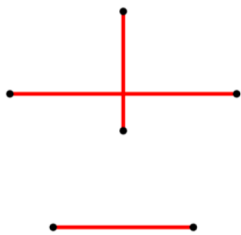


圖 2： K_6 的第 1 種顏色 (紅色)

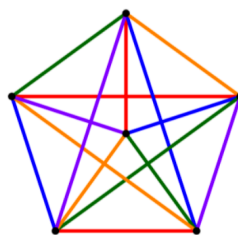


圖 3： K_6 用 5 種不同顏色完成塗色

當 n 是奇數時：由於任何簡單圖 G 必符合 $\chi'(G) \geq n - 1$ 且

$$\chi'(G) \geq \frac{|E|}{\left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor} = \frac{n(n-1)}{2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor},$$

當 n 是偶數時這兩個下界是一樣的，但當 n 是奇數時，後者變成 $\chi'(G) \geq n$ 。因此在完全圖中： $n \leq \chi'(K_n) \leq \chi'(K_{n+1}) = n$ 。故 $\chi'(K_n) = n$ 。 □

2.2 直線變成圓，任一個圓都和其他圓交於 2 點

在討論完直線的問題後，我試著思考用圓來代替直線結果會是如何。因為兩個圓相交時會交於兩點，所以我開始考慮將原問題「平面上四條直線，兩兩相交於一點，任三線不共點，讓沿著任何一條直線上的三個交點都剛好出現 1,2,3 各一次」改為「平面上四個圓，兩兩相交於兩點，任三圓不共點，讓沿著任何一條圓周上的六個交點都剛好出現 1,2,3,4,5,6 各一次」，結果是成立的，因此我們得到下列定理：

定理 5-1： 圖 $G_1 = \langle \{C_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ ，其中 C_i 代表圓；圖 $G_2 = \langle \{L_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ ，其中 L_i 代表直線。

結論 (1) 「圖 G_1 標好標滿問題」等價於「圖 G_2 標好標滿問題」。

結論 (2) 當 k 是奇數時，無法標好標滿。

結論 (3) 當 k 是偶數時可標好標滿。圖 G_1 為 $2(k-1)$ -labeled，圖 G_2 為 $(k-1)$ -labeled。

表 4： $k = 4$ 時

圓形	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1		(1, 4)	(2, 5)	(3, 6)
C_2	(1, 4)		(3, 6)	(2, 5)
C_3	(2, 5)	(3, 6)		(1, 4)
C_4	(3, 6)	(2, 5)	(1, 4)	

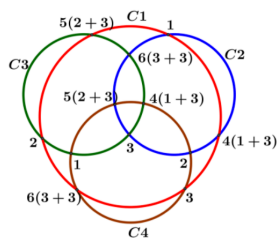


圖 4： $k = 4$ 時，圓的標好標滿問題

證明. (1) 以 $k = 4$ 的情況來說明。

(2) 任兩條直線相交於一點，任兩個圓相交於兩點。

(3) 每一個「直線的標號標滿問題」的解，都有一個對應的「圓的標好標滿問題」的解。所以兩個問題是等價的。 □

定理 5-2： 圖 $G_1 = \langle \{B_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ ，其中 B_i 代表在三度空間中，藤球上的圓；圖 $G_2 = \langle \{C_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ ，其中 C_i 代表在二度空間中，平面上的圓；

結論 (1) 「圖 G_1 標好標滿問題」等價於「圖 G_2 標好標滿問題」。

結論 (2) 當 k 是奇數時，無法標好標滿。

結論 (3) 當 k 是偶數時可標好標滿。圖 G_1 為 $2(k-1)$ -labeled，圖 G_2 為 $2(k-1)$ -labeled。

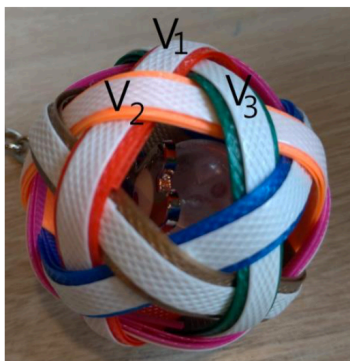


圖 5-1：「6 線藤球」，東南亞常見運動比賽，俗稱「腳踢的籃球」

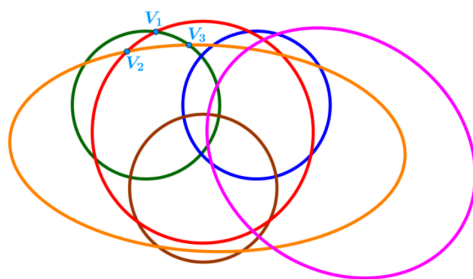


圖 5-2：想像將 6 線藤球壓扁在平面上，任兩圓相交於兩點的示意圖

- 證明.**
- 1 藤球是由數個二度空間圓所組成在三度空間的物件。
 - 2 任一個組成藤球的圓彼此之間沒有平行，而且任兩圓都相交於兩點。
 - 3 當我們將三度空間的藤球壓扁在平面上維持任兩圓都相交於兩點，亦即我們可以建立一個圖 $G_1 = \langle \{B_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ 與圖 $G_2 = \langle \{C_i\}_{i=1}^k, V, E \rangle$ 的 1-1 對應 (如圖 5-1 及圖 5-2)。

□

定理 5-3：「六線藤球標好標滿問題」與其中一種「阿基米德多面體頂點標號問題」等價。

證明. 由於六線藤球背後的結構就是其中一種「阿基米德多面體」，因此二者標號問題等價。

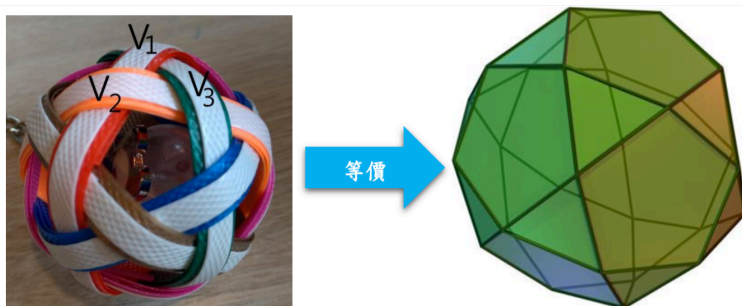


圖 5-3：六線藤球與阿基米德多面體

□

2.3 有 m 條線平行，任三條不共點

接著我考慮直線中有平行時的情況，但是有平行的情況時，每一條直線上的交點數量就不一定相同，所以我試著找出在符合標好標滿前題下，用最少的標號標出所有點的數量。

推論 2： 平面上圖 $\langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任三條線不共點，將圖 G 平行的線分成一類，分為 k 個部分，形成線的 **k-分圖 (k-partite graph)**，記為 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ，則圖 G 為 **n-labeled**。

證明. 由於在定理 1、定理 2、定理 3 中，已經證明任何一個圖在直線標好標滿問題中為 **n-labeled** (偶數條直線標號數 $= n - 1$ ；奇數條直線標號數 $= n$)。在有直線平行的情況下，某些直線交點數下降，每一條直線的交點數小於等於 $n - 1$ 。因此，故圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 必為 **n-labeled**。□

接下來，引入圖論 [4] 的想法，把平行的直線分為同一集合，例如有五條直線平行，則把這五條直線視為一集合。假如一條直線沒有其他直線平行，則視為這個集合中只有一個元素。

推論 3： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任三條線不共點，且為線的完全二分圖 E_{m_1, m_2} ， $\sum_{i=1}^2 m_i = n$ ，則圖 E_{m_1, m_2} 為 $\max\{m_1, m_2\}$ -labeled。

證明 (1). 由於二分圖 E_{m_1, m_2} 中，一條直線最多只有 $\max\{m_1, m_2\}$ 個交點，可想像成 $\max\{m_1, m_2\}$ 個數字排成拉丁方陣，假設 $m_1 \geq m_2$ ，則減掉 $m_1 - m_2$ 列，可完成 $m_1 \times m_2$ 的拉丁矩陣，即可完成所有標號填寫，因此為 $\max\{m_1, m_2\}$ -labeled。□

	1	2	-----	m_1
1	1	2	-----	$m_1 - 2$ $m_1 - 1$ m_1
	2	3	-----	$m_1 - 1$ m_1 1
m_2	m_2	$m_2 + 1$	-----	$m_2 - 3$ $m_2 - 2$ $m_2 - 1$
m_1				

圖 6： m_1 個數字排成拉丁方陣

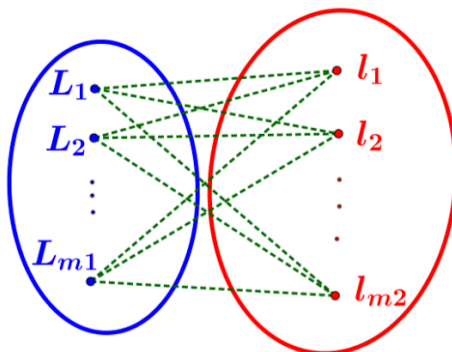


圖 7：完全二分圖的線圖

證明 (2). 由定義 9 和引理 2 可以很容易觀察到，平面上線的完全二分圖 E_{m_1, m_2} 的線圖 $L(E_{m_1, m_2})$ 中頂點 (vertices) 的最大度數 $\Delta(L(E_{m_1, m_2})) = \max\{m_1, m_2\}$ ，因此為 $\max\{m_1, m_2\}$ -labeled。

□

引理 1 (Vizing Theory [4])：對於任何有限的簡單圖 G ，其線的著色數 (chromatic number) 永遠符合 $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ 。

引理 2：對於任何有限的簡單圖 G ，其點的著色數 (chromatic number) 永遠符合 $\Delta(G') \leq \chi(G) \leq \Delta(G') + 1$ 。

證明. 由引理 1 可得引理 2。

□

推論 4：平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 為線的完全 k -分圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ， $\sum_{i=1}^k m_i = n$ ，則圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 為 $\left\{ \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} + 1 \right\}$ -labeled。

證明. 因為在線的 k -分圖中，頂點的最大度數 $\Delta(G') = \sum_{i=1}^k m_i - \min\{m_i\}$ 。所以需要的標號數 $\chi(G) \leq \Delta(G') + 1 = \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} + 1$ 。

□

定理 6：平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 為線的完全 k -分圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ， $\sum_{i=1}^k m_i = n$ ，若將 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 放在 k 維度空間拉丁方陣，則圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 為

$$\left\{ \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} \right\} \text{-labeled}。$$

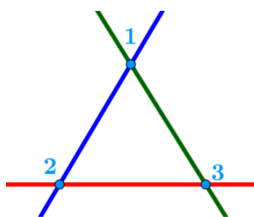


圖 8-1：平面上 $E_{1,1,1}$ ，為 3-labeled

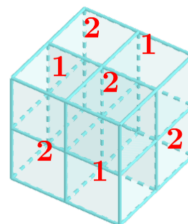


圖 8-2：三維空間 $E_{1,1,1}$ 為 2-labeled

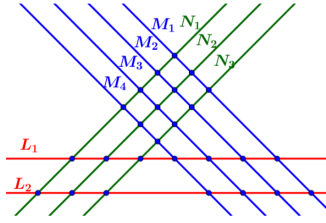


圖 9-1：在平面上 $E_{2,3,4}$ 為 8-labeled

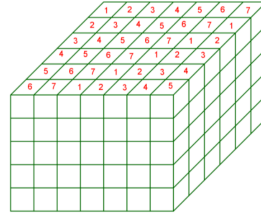


圖 9-2：三度空間中 $E_{2,3,4}$ 為 7-labeled

說明. 由於前述證明有用到平面上拉丁方陣的想法，底下我創新想像 k 維度空間拉丁方陣，藉此來討論最少使用標號：

1. k 維度空間拉丁方陣意指將二維拉丁方陣擴展至 k 維。
 2. 在平面上， $E_{1,1,1}$ 為 3-labeled，如圖 8-1。
 3. 但在三度空間中 $E_{1,1,1}$ 為 2-labeled。如圖 8-2。
 4. 在平面上， $E_{2,3,4}$ 為 8-labeled，如圖 9-1。
 5. 在三度空間中， $E_{2,3,4}$ 為 7-labeled，如圖 9-2。
- (1) $2 + 3 = 5$, $2 + 4 = 6$, $3 + 4 = 7$ 。想像有一個 $5 \times 6 \times 7$ 的長方體，如圖 9-2。
 - (2) 每一個小正方形填入 1 個標號。
 - (3) 在最上方 6×7 的長方形中，我們可用 7 個標號完成錯位的排列。
 - (4) 現在 6×7 的長方形有 5 層，從第一層開始，下方層的數字是上方層的數字加 1。其中 $7 + 1 = 1$ 。
 - (5) 由於我們有 7 種標號，但只有 5 層，所以一定可以完成所有錯位的標號。
 - (6) k 為有限的前提下，若 $m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ 放在 k 維度空間拉丁方陣，則圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 為 $\left\{ \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} \right\}$ -labeled。

□

2.4 平面上有 n 條直線，任兩條不平行，有 p 條直線共點。

接續研究問題 3：「有 m 條線平行，任三條不共點」的反向思維，我考慮「所有直線都不平行，但是有 p 條直線共點」的情況，同樣的此時每一條線上的交點數量就不一定相同，所以我試著找出在符合標好標滿的前題下，用最少的標號標出所有點的數量。

推論 5： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行，有 p ($2 \leq p \leq n$) 條直線共點，此外其他任三線不共點，則圖 G 為 **n-labeled**。

證明. 由於在定理 1、定理 2、定理 3 中，已經證明任何一個圖在直線標好標滿問題中為 **n-labeled** (偶數條直線標號數為 $n - 1$ ；奇數條直線標號數為 n)。在有直線共點的情況下，某些直線交點數下降，每一條直線的交點數小於等於 $n - 1$ 。因此，圖 G 為 n -labeled。□

推論 6： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行，有 p ($2 \leq p \leq n$) 條直線共點，此外其他任三線不共點，則所有直線交點數為 $C_2^n - (C_2^p - 1)$ 。

證明.

1. 平面上有 n 條直線，任二條線不平行，任三條不共點的情況下，共產生 C_2^n 個交點。
2. 當 p ($2 \leq p \leq n$) 條直線共點，代表 C_2^p 個交點聚集成 1 點。

□

推論 7： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，則所有直線交點數為 $C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$ 。

證明.

1. 平面上有 n 條直線，任二條線不平行，任三條不共點的情況下，共產生 C_2^n 個交點。
2. p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過該點的直線數，則 $C_2^{p_i}$ 個交點聚集成 1 點。

□

說明. 以圖 10 平面上有 7 條直線為例， $p_1 = 3$ ， $p_2 = 4$ ， $p_3 = 3$ ， $p_4 = 3$ ，則 $C_2^7 - \sum_{i=1}^4 (C_2^{p_i} - 1) = 10$ 。

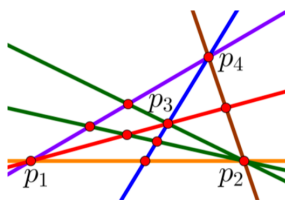


圖 10：4 處有共點

□

推論 8： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，則 $\Delta(G') \leq \chi(G) \leq \Delta(G') + 1$ 。

證明. 有直線共點依然是平面上的簡單圖 (simple graph)，由引理 2 得 $\Delta(G') \leq \chi(G) \leq \Delta(G') + 1$ 。□

定理 7： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，則我們可以得到一個上、下界來表示 $\chi(G)$ 的範圍：

$$\Delta(G') \leq \chi(G) \leq C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$$

證明. 1. 由推論 7 可知，在有直線共點的情況下，總交點數為

$$C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$$

2. $\Delta(G')$ 代表一條直線上最多的交點數。

3. 因此我們得到圖 G 的最小著色數範圍 $\Delta(G') \leq \chi(G) \leq C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$ 。□

推論 9： 「平面上 n 個圓，兩兩相交於兩點， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 個圓共 1 點，但不可共 2 點，則交點數為 $2C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$ 。

證明.

1. 平面上 k 個圓，兩兩相交於兩點，任三個圓不共點，共可產生 $2C_2^n$ 個交點。

2. 但現在通過點 $v_i \in V$ 有 p_i 個圓共點，減去原來 p_i 個圓共點情形，再加上點 v_i ，所以交點數為

$$2C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$$

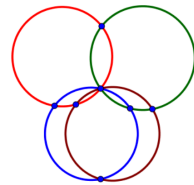


圖 11：四圓共 1 點

□

在 2.2 章節中，將直線推廣到圓，使得任兩個圓有兩個交點，任一個圓上有六個交點，此時的「圓」可視為是一種「特別的直線」，這種直線之間的交點不是 1 點，

而是 2 點。這是超圖 (Hypergraph) 的概念，我們參考文獻 [6]，嘗試用超圖的概念來看待接下來的問題。

定義 10. 超圖 H 是一個集合組 (V, E) ，其中 V 是有限集合，該集合的元素被稱為頂點 (或節點)， E 是 V 非空子集的集合，被稱為超邊 (或超連接)。

定義 11. 若 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 且 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ，則超圖 $H = (V, E)$ 存在一個關聯矩陣 (a_{ij}) ，其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{當 } v_i \sim e_j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$v_i \sim e_j$ 表頂點 v_i 和邊 e_j 相連。

推論 10： 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，把「圖 G 的線圖」轉換成「超圖 H 」，則 $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ 成立。

證明. 已知 p 條直線共點時， $\chi(G) \leq \Delta(G') + 1$ 成立 [推論 8]。當把「圖 G 的線圖」轉換成「超圖 H 」或「關聯矩陣」，在結構上是 1-1 對應的等價結構。因此則 $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ 是成立的。□

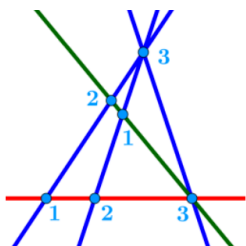


圖 12-1：共點情形 (1)

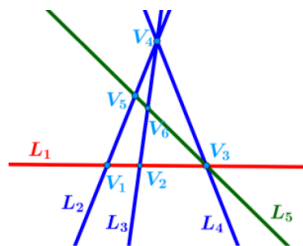


圖 12-2：共點情形 (2)

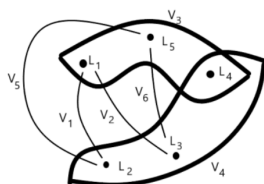


圖 12-3：超圖 (Hypergraph)

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
L_1	1	1	1	0	0	0
L_2	1	0	0	1	1	0
L_3	0	1	0	1	0	1
L_4	0	0	1	1	0	0
L_5	0	0	1	0	1	1

圖 12-4：關聯矩陣 (Incident Matrix)

- 說明.** 1. 圖 12-3 是將圖 12-2 的線圖 (Line graph) 以超圖的方式呈現。圖 12-4 是圖 12-3 的關聯矩陣。
2. 從圖 12-4 可以很清楚的觀察到， L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 轉換成點，而且這 5 個點的最大度數為 3 (一條直線上最多只有 3 個點)，所以需要的標號小於或等於 $3 + 1 = 4$ 。

□

推論 11： 在圖 G (或超圖 H) 的點 (vertex) 和邊 (edge) 所形成的二分圖中，若 $N(V_i) = \{L_j : V_i \sim L_j\}$ 且 $N(V_i) \cap N(V_j) = \phi$ ，則 V_i 和 V_j 可以標上同一個數字。

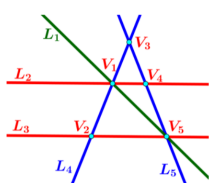


圖 13-1：共點及共線情形

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5
L_1	1	0	0	0	1
L_2	1	0	0	1	0
L_3	0	1	0	0	1
L_4	1	1	1	0	0
L_5	0	0	1	1	1

圖 13-2：關聯矩陣

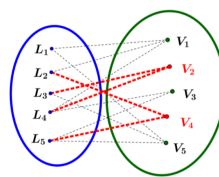


圖 13-3：二分圖

證明. 若 $N(V_i) \cap N(V_j) = \phi$ ，代表 V_i 和 V_j 不在同一條線上，所以可以標上相同的數字。

□

說明. 我們在討論圖 G (或超圖 H) 的關聯矩陣時，我們發現用二分圖的方式將圖 G (或超圖 H) 中的點和邊分成兩個集合。舉例來說，觀察圖 13-1、圖 13-2、圖 13-3。 $N(V_2) = \{L_3, L_4\}$ ； $N(V_4) = \{L_2, L_5\}$ 。故 V_2 和 V_4 不在同一條直線上，因此可以標上相同的數字。

□

有了上述的二分圖，我們便可利用演算法的觀念，幫助我們決定圖 G (或超圖 H) 之標號數為 **k-labeled**。

[計算標號演算法 01]

```
count = 0
for i in range(1, m+1):
    for j in range(i+1, m+1):
        if  $N(V_i) \cap N(V_j) \neq \phi$ :
            count = count + 1
```


推論 12：

1. 「貪婪演算法」與「計算標號演算法 01 版」所得到的標號數不一定是最少標號數 $\chi(G)$ 。
2. 「計算標號演算法 01 版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。

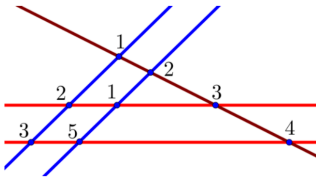


圖 14-1：利用貪婪演算法得 5-labeled

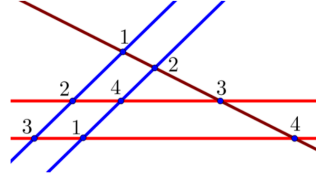


圖 14-2：適當的安排標號得 4-labeled

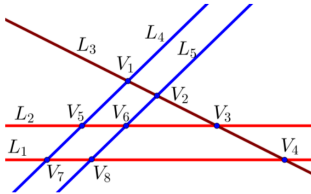


圖 14-3：將點和線依序標上代號

$$N(V_1) = \{L_3, L_4\}, N(V_2) = \{L_3, L_5\}$$

$$N(V_3) = \{L_2, L_3\}, N(V_4) = \{L_1, L_3\}$$

$$N(V_5) = \{L_2, L_4\}, N(V_6) = \{L_2, L_5\}$$

$$N(V_7) = \{L_1, L_4\}, N(V_8) = \{L_1, L_5\}$$

圖 14-4：列出圖 14-3 的 $N(V_i)$

- 證明.**
1. 在圖 14-1 中，我們先在最多交點的咖啡色直線上，標上 1,2,3,4。
 2. 接著利用貪婪演算法的原則，可能得出圖 14-1 中的情形，即 5-labeled。
 3. 但假如我們適當的安排標號，同樣的圖只需要 4-labeled。
 4. 從圖 14-2 中，經由「計算標號演算法 01 版」得到標號數為 18，遠遠大於 5。

□

說明. 「計算標號演算法 01 版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。因此我們想到結合兩者得到下列「計算標號演算法 02 版」

□

[計算標號演算法 02]

推論 13 (計算標號演算法 02 版)：

步驟一：先利用「貪婪演算法」填入標號。

步驟二：再利用 $N(V_i) \cap N(V_j) = \phi$ ，則 V_i 和 V_j 可以標上同一個數字，測試所有可能的結果，則必可得到其中一組結果為最少標號數。

說明.

1. 我們先利用貪婪演算法，填入一組標號。
2. 接著在 $N(V_i) \cap N(V_j) = \phi$ 處開始測試。開始測試所有可能情況。
3. 如此我們可以在貪婪演算法的幫助下，快速的測試出所有的可能結果，並得到最少標號數的結果。

□

雖然「計算標號演算法 02 版」藉由「貪婪演算法」改進「01 版」的效能與結果，但畢竟不算數學證明，因此我們嘗試從較容易處理的問題出發來求得精確的最少標號數，例如每個類別平行的線數都相同之情況。

定義 12. 將圖 G 中平行的線歸成一類，假設有 k 類，且每一類恰有 m 條平行線，形成 k -分圖，則稱圖 G 為線的**完全正 k -分圖**，記為 $E_{\underbrace{m, m, \dots, m}_{k \text{ 個}}}$ ，簡記為 $E_{k \times m}$ 。

表 5：正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 的最少標號數

$k \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
2	1	2	3	4	5	6	7
3	3	4	7	8	11	12	15
4	3	6	9	12	15	18	21
5	5	8	13	16	21	24	29
6	5	10	15	20	25	30	35
7	7	12	19	24	31	36	43

定理 8： 線的完全正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 的最少標號數：

- | | |
|------------------|---|
| 當 k 或 m 為偶數時 | 正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times m)$ -labeled。 |
| 當 k 且 m 為奇數時 | 正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times (m-1) + k)$ -labeled。 |

證明. [數學歸納法推廣到 $k \times m$]

1. 當 $m = 1$ 時：

由定理 1、定理 2、定理 3、定理 4 得下面敘述成立：當 k 為偶數時，正 k -分圖 $E_{k \times 1}$ 為 $(k-1)$ -labeled；且當 k 為奇數時，正 k -分圖 $E_{k \times 1}$ 為 $(k-1)$ -labeled。

2. 當 $m \geq 1$ 時，假設下面敘述成立：

當 k 或 m 為偶數時，正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times m)$ -labeled；當 k 且 m 為奇數時，正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times (m-1) + k)$ -labeled。

3. 討論 $m+1$ 的情況：

- (1) 當 k 為偶數時： $E_{k \times (m+1)}$ 圖形等於 $E_{k \times m}$ 圖形再平行疊加 1 個 E_{k+1} 的圖形，故最少標號數為 $((k-1) \times m + (k-1))$ ，即 $((k-1) \times (m+1))$ -labeled。
- (2) 當 k 為奇數且 $m+1$ 為奇數時： $E_{k \times (m+1)}$ 圖形等於 $E_{k \times m}$ 圖形再平行疊加 1 個 E_{k+1} 的圖形，故最少標號數為 $(k-1) \times m + k$ 。
- (3) 當 k 為奇數且 $m+1$ 為偶數時： $E_{k \times (m+1)}$ 圖形等於 $E_{k \times (m-1)}$ 圖形再平行疊加 1 個 E_{k+2} 的圖形，故最少標號數為 $((k-1) \times (m-1) + (k-1) \times 2)$ ，即 $(k-1) \times (m+1)$ -labeled。

[平行疊加的數學方法證明填入標號方法的存在性]

1. 局部是 $(2k)^2$ 個點。 $k = 1, 2, 3, \dots$

- (a) 參考圖 15-1：從局部的圖形來看，兩條線交於 1 個點，平行疊加另外兩條線形成 4 個點，最少必須多使用一種標號。
- (b) 重點不是 1 和 2 這兩個數字，而是必須多使用一個標號，才能維持不衝突。
- (c) 圖 15-2 所要表示的是將 4 個點視為一個小單位，將此小單位再平行疊加擴充成 4 個中單位形成 16 個點，而且每一個小、中單位都維持對面的標號相等，但上下左右會對調。
- (d) 圖 15-3 是舉例 $E_{4 \times 1}$ 平行疊加 $E_{4 \times 1}$ 得 $E_{4 \times 2}$ 最少標號數為 $(4-1) \times 1 + 3 = 6$ 。用以說明 k 是偶數時的平行疊加 $E_{k \times 1}$ 情形。
- (e) 圖 15-4 是舉例 $E_{3 \times 1}$ 旋轉 120° 後再平行疊加 $E_{3 \times 1}$ 得 $E_{3 \times 2}$ 。標號數為 $(3-1) \times 2 = 4$ 。用以說明 k 是奇數時平行疊加 $E_{k \times 1}$ 情形。

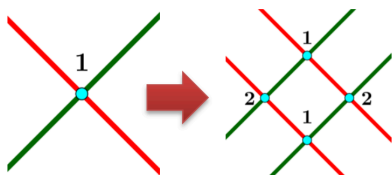


圖 15-1：探討 1 個點平行疊加後情況

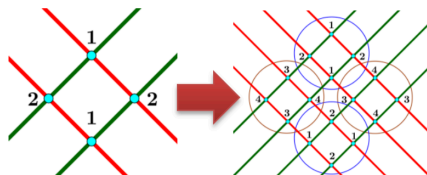


圖 15-2：探討 4 個點平行疊加後情況

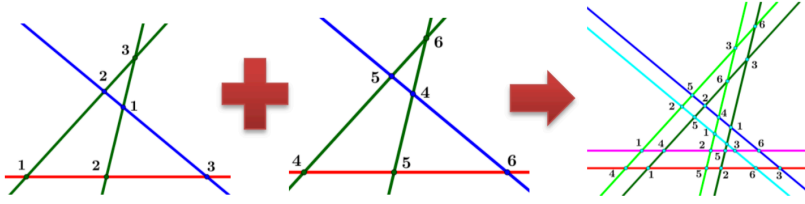


圖 15-3 : $E_{4 \times 1}$ 平行疊加 $E_{4 \times 1}$ 得 $E_{4 \times 2}$ 最少標號數為 $(4-1) \times 1 + 3 = 6$ 。

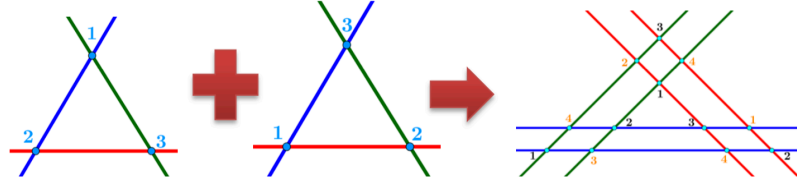


圖 15-4 : $E_{3 \times 1}$ 旋轉 120° 後再平行疊加 $E_{3 \times 1}$ 得 $E_{3 \times 2}$

2. 局部是 $(2k+1)^2$ 個點。 $k = 1, 2, 3, \dots$

- (1) 當 k 是偶數時，必為 $\Delta(G')$ -labeled。[定理 2]
- (2) 圖16 是舉例 $E_{3 \times 1}$ 平行疊加 $E_{3 \times 2}$ 形成 $E_{3 \times 3}$ 為 $3 + (3-1) \times 2$ -labeled，即 7-labeled。用以說明 k 是奇數平行疊加 $E_{k \times 2}$ 情形。

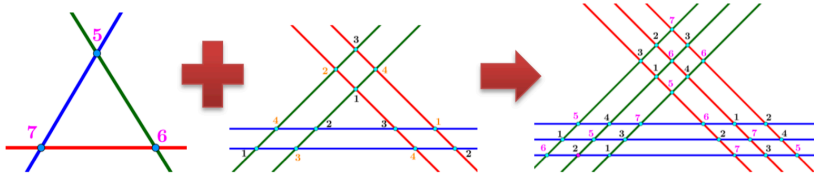


圖 16 : $E_{3 \times 1}$ 平行疊加 $E_{3 \times 2}$ 形成 $E_{3 \times 3}$ 為 $3 + (3-1) \times 2$ -labeled，即 7-labeled。

[說明] 上述用數學歸納法所推廣的正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 的標號數必為最少標號數，說明如下：

當 k 或 m 為偶數時

由於 $\Delta(E'_{k \times m}) \leq \chi(E_{k \times m})$ ，且 $(k-1) \times m = \Delta(E'_{k \times m})$ ，故正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times m)$ -labeled，為最少標號數。

當 k 且 m 為奇數時

- (1) 此時正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 共有奇數條線。
- (2) 故正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 可看成「正 k -分圖 $E_{k \times (m-1)}$ (偶數條線)」平行疊加「正 k -分圖 $E_{k \times 1}$ (奇數條線)」，故「正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 的標號數」 $\geq \Delta(E'_{k \times (m-1)}) + k = \Delta(E'_{k \times m}) + 1$ 。

(3) 又因為 $(k-1) \times (m-1) + k = (k-1) \times m + 1 = \Delta(E'_{k \times m}) + 1$ ，故正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times (m-1) + k)$ -labeled，為最少標號數。

以圖16 為例說明

- (a) $E_{3 \times 2}$ 的最少標號數為 $\Delta(E'_{3 \times 2}) = 4$ ， $E_{3 \times 1}$ 的最少標號數為 $\Delta(E'_{3 \times 1}) + 1 = 3$ 。 $E_{3 \times 3}$ 的圖形可以看成 $E_{3 \times 2}$ 的圖形平行疊加 $E_{3 \times 1}$ 的圖形。
- (b) 此時 $E_{3 \times 3}$ 的最少標號數 $\geq \Delta(E'_{3 \times 2}) + \chi(E_{3 \times 1}) = 4 + 3 = 7 = \Delta(E'_{3 \times 3}) + 1$ 。

□

3 結論

3.1 探討「任三條線不共點，任兩條線不平行」直線的標好標滿問題

3.1.1 當直線數 n 是偶數時，圖為 $(n-1)$ -labeled，可標好標滿，且我們找到一種用表格構造解法的方式。[定理 2、定理 3、定理 4]

3.1.2 當直線數 n 是奇數時，圖為 n -labeled，無法標好標滿。[定理 1、定理 3、定理 4]

3.1.3 當直線數 n 是偶數時，圖為 $(n-1)$ -labeled，可標好標滿，其標好標滿的方法數範圍： $(n-1)! \leq \text{標好標滿的方法數} \leq L^*(n)$ 。[推論 1]

3.2 探討「任兩個圓交於兩點」圓的標好標滿問題

3.2.1 圓的標好標滿問題與直線的標好標滿問題是等價的。[定理 5-1]

3.2.2 藤球交點標號問題與圓的標好標滿問題是等價的。[定理 5-2]

3.2.3 六線藤球與其中一種阿基米德多面體等價。[定理 5-3]

3.3 探討平面上 n 條直線，「有 m 條線平行，任三條不共點」直線的標好標滿問題

3.3.1 在平面上 n 條直線，我們依平行與否來對直線作分類，形成完全 k -分圖。

3.3.2 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任三條線不共點，則圖 G 為 n -labeled。[推論 2]

3.3.3 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任三條線不共點，且為完全二分圖 E_{m_1, m_2} ，則圖 E_{m_1, m_2} 為 $\max\{m_1, m_2\}$ -labeled。[推論 3]

3.3.4 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任三條線不共點，且為完全 k -分圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ，則圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 為 $\left\{ \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} + 1 \right\}$ -labeled。[推論 4]

3.3.5 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ 為完全 k -分圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ ，若將 $m_1, m_2, \dots, m_k$ 放在 k 維度空間拉丁方陣，則圖 $E_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ 為 $\left\{ \left(\sum_{i=1}^k m_i \right) - \min\{m_i\} \right\}$ -labeled。[定理 6]

3.4 探討「有 p 條線共點，任兩條不平行」的直線標好標滿問題

3.4.1 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，則所有直線交點數為 $C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$ 。[推論 7] 而且我們可以得到一個上、下界來表示 $\chi(G)$ 的範圍： $\Delta(G') \leq \chi(G) \leq C_2^n - \sum_{i=1}^k (C_2^{p_i} - 1)$ 。[定理 7]

3.4.2 平面上圖 $G = \langle \{L_i\}_{i=1}^n, V, E \rangle$ ，任二條線不平行， p_i ($3 \leq p_i \leq n, i = 1, 2, \dots, k$) 代表通過點 $v_i \in V$ 的直線數，「超圖 H 」為「圖 G 的線圖」，則 $\chi(H) \leq \Delta(H) + 1$ 成立。[推論 10]

3.4.3 在圖 G (或超圖 H) 的點 (vertex) 和邊 (edge) 所形成的二分圖中，若 $N(V_i) = \{L_j : V_i \sim L_j\}$ 且 $N(V_i) \cap N(V_j) = \emptyset$ ，則 V_i 和 V_j 可以標上同一個數字。[推論 11]

3.4.4 「貪婪演算法」與「計算標號演算法 01 版」所得到的標號數不一定是最少標號數 $\chi(G)$ 。且「計算標號演算法 01 版」隨著交點數增加，重複計算的次數增加，估計最少標號數的效果大符降低。[推論 12]

3.4.5 結合「貪婪演算法」與「計算標號演算法 01 版」的想法，得到「計算標號演算法 02 版」。[推論 13]

3.4.6 正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 的最少標號數，[定理 8]：

當 k 或 m 為偶數時	，正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times m)$ -labeled。
當 k 且 m 為奇數時	，正 k -分圖 $E_{k \times m}$ 為 $((k-1) \times (m-1) + k)$ -labeled。

4 未來展望

本研究未來將朝多重空間與超圖的連結來探討，是在研究過程中遇到無法完成的繪圖問題時得到的想法，相信是本研究用不同分析觀點探討問題的創見。另一方面，本研究和圖論與超圖息息相關，而圖論與超圖在現今數位時代的應用非常廣泛，除了應用在圖形著色的方法數計數之外，也大量應用在描繪人際間關係的社群網路分析。例如社群媒體臉書應用相關概念，建構背後的人際網路架構。本篇研究最後從超圖的觀點來探討問題，其實可以將「點」與「線」視為「資源」與「目標」，希望透過研究點與線的關係，達成我們所希望的「用最少資源完成目標」的普遍理想 [6]，之後將嘗試朝下列方向探討：

1. 如何配合演算法從關聯矩陣和二分圖的模組 (model) 給出標號問題更好的上、下界？
2. 繼續往完全 k -分圖的最少標號數規律探討與證明。

參考資料 (Reference)

- [1] 洪有情 (2019)。國民中學數學課本 2 下。新北市：康軒文教事業。
- [2] 游森棚 (2018)。標好標滿。科學研習月刊。57 卷第 5 期，p.58。
- [3] 傅恆霖 (1995)。圖上的數字。數學傳播。19 卷第 3 期，p.1-15。
- [4] 張鎮華 (2017)。演算法觀點的圖論。台大出版中心。p195-228。
- [5] 蕭文強 (2015)。從「數獨」到「讀數」。香港數學教育會議。
取自 https://hkumath.hku.hk/~mks/Sudoku_MKSiu_Aug2018.pdf
- [6] 蘇怡人、李哲均 (2016)。以超圖進行人際網路分析之研究。第十五屆離島資訊技術與應用研討會。
- [7] Berge. C., (1989). **Hypergraph**. *North-Holland mathematical library*, v. 45. p115-150