正方形不行 —— 不存在正方形的塗色最大值

台北市立建國高級中學　吳尚昱
指導老師　林穎志

Abstract

In this project we are to find the maximum number $f(m,n)$ of colored dots in an array of $m \times n$ dots such that none of the four dots are vertices of a square. Exact values for $f(k,n)$, $k \leq 4$, as well as an upper and lower bound of $f(m,n)$, are found. We also conjecture that we can color at least half of the dots.

中文摘要

本篇文章的目的是探討在一個 $m \times n$ 矩形點陣中，將某些點塗色，並要求塗色的點之中，任四個皆不為同一個正方形的頂點時，能塗色的點之數量的最大值 $f(m,n)$。我們找到了所有 $f(k,n)$, $k \leq 4$ 的精確值，並給出了一個方式估計 $f(m,n)$ 的上下界。且我們猜想對任何的矩形點陣，都可以至少塗一半的點。

1　簡介 Introduction

1.1　研究問題敘述

在一個有 m 列 n 行的 $m \times n$ 矩形點陣中，將某些點塗色，並要求塗色的點之中，任 4 個皆不為同一個正方形的頂點（正方形的邊不一定要平行 $m \times n$ 矩形點陣的邊）。給定 m、n，求最多能塗色的點之數量。

1.2　研究動機與緣起

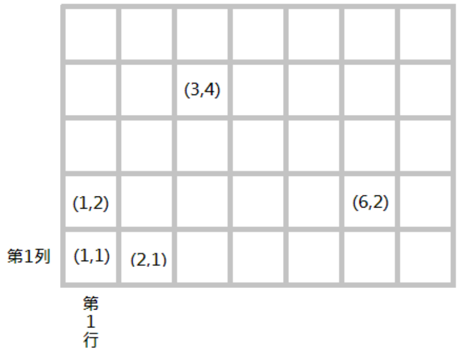
在 Google Play 上看到一款名為 “Square” 的遊戲，遊戲內容是要找到棋盤上四個形成正方形的點，覺得它的點子很有創意，經過許多發掘的過程後，想知道最多能有多少個點卻找不到正方形，於是展開了研究。

2　研究內容 Main Body

2.1　名詞定義與性質

為了圖示與敘述方便，我們添加一些定義。

1. $m \times n$ 方格紙（對應到 $m \times n$ 矩形點陣）：由 m 列 n 行的小方格排成的矩形，矩形中含有 $m \times n$ 個小方格，如右圖是一個 5×7 的方格紙。



2. 方格 (x, y)（對應到點 (x, y)）：指第 x 行第 y 列的小方格（可以想像成把最左下角的點當成原點 $(0, 0)$，而每個方格用它右上角的頂點代表）

3. 方格與點：
   每個方格代表其右上角的頂點，如此 $m \times n$ 方格紙可對應到點陣。但整個研究中，我們只在意點和點之間的相對位置，所以為了方便，可以用中心點想像，效果是相同的。

4. 形成正方形：
   存在 4 個相異塗色方格代表的點，會是某一正方形的 4 個頂點。

5. $f(m, n)$：
   在一個 $m \times n$ 的方格紙中，將某些方格塗色，並要求塗色的方格不形成正方形，我們將此時能塗色的點之數量的最大值定義為 $f(m, n)$。依照 $f(m, n)$ 的定義，顯然有：

   (a) $f(m, n) = f(n, m)$，因為行列轉換不影響結果。

   (b) $f(m, n) \leq m \times n$，因為最多就只能塗這麼多。

6. $f(a, b + c) \leq f(a, b) + f(a, c)$：
   對於任一個 $a \times (b + c)$ 不形成正方形的方格紙，可分割成 $a \times b$ 跟 $a \times c$ 的方格紙，可知 $a \times b$ 和 $a \times c$ 方格紙中皆不形成正方形，又在 $a \times b$ 的方格紙中最多有 $f(a, b)$ 個點，在 $a \times c$ 的方格紙中最多有 $f(a, c)$ 個點，合起來可得最多有 $f(a, b) + f(a, c)$ 個點。運用此性質可將較大尺寸的方格紙用較小的方格紙去估算上界。類似的，若將 $m \times n$ 方格紙切割成若干個小方格紙，則可得到

   $$f(m, n) \leq \text{各小塊函數值的總和。}$$

7. $m \times n$ 大小方格紙的塗色比：
   為了描述不同大小的 $f(m, n)$ 的難易度，使用塗色比來說明，定義為 $\dfrac{f(m, n)}{mn}$。

2.2 研究思路

我們使用壓上下界的方法，先證明 $f(m, n) \leq i$，再給出塗 j 個方格的方法，得到 $f(m, n) \geq j$。

若 $i=j$，則可得 $f(m,n)=i=j$（精確值）；若 $i\neq j$，則得到 $j\leq f(m,n)\leq i$（上下界）。

當然，最好的結果是全部得到精確值，上下界只是不容易得到精確值時的折衷結果。

研究的順序，我們希望能從小結果推廣到大結果，所以先從最小的 $f(1,1)$ 開始，並慢慢增加行數到 $f(1,n)$。討論完 $1\times n$ 的情況後，再從 $f(2,2)$ 開始，一直進行到 $f(2,n)$，再推進到 $f(3,3)$、$\cdots$、$f(3,n)$、$f(4,4)$、$\cdots$、$f(m,n)$。

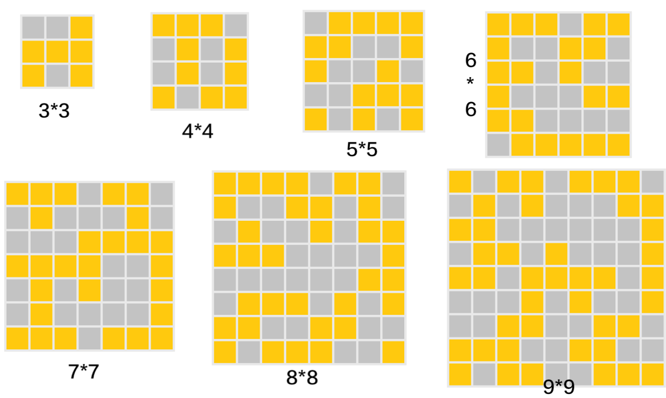
並且，我們只需要討論 $f(m,n)$ 中，$m\leq n$ 的情形即可，若 $m>n$，那麼因為 $f(n,m)=f(m,n)$，我們可以把 $m,\ n$ 的角色互換，所以之後都預設 $m\leq n$。

2.3 目前所有 $f(n,n)$ 的確定值

最令人尋味的是，從 $f(1,1)$ 到 $f(6,6)$，都呈現著「三角形數」，$f(n,n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的規律，但 $f(7,7)$ 之後，這個規律便不再適用，這也是我積極想要深入研究這個問題的原因之一。

上面的值在 $n\leq 7$ 時，都是我自己寫程式跑過的，但 $n=8,\ 9$ 時由於執行效率過差而停擺，而採用 OEIS 上的數據（參考文獻 [1]）。以下展示 $f(n,n)$ 的塗色方法，灰色表示未塗色，橘色表示塗色：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n,n)$	1	3	6	10	15	21	27	34	42



2.4 分析 $f(1,n)$

1. $f(1,1)=1$：可以塗 1 格且沒有正方形。
2. $f(1,n)=n$：將 $1\times n$ 的所有方格都塗色，也不會有正方形，故 $f(1,n)=n$。

2.5 分析 $f(2,n)$：

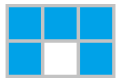
1. $f(2,2)=3$：

   若整個方格紙都塗色，會產生一個正方形，所以至少有一個格子不能塗色，又右圖沒有正方形，故 $f(2,2)=3$。

2. $f(2,3)=5$：

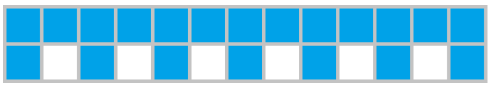
   $\because f(2,3)\le f(2,2)+f(2,1)=f(2,2)+f(1,2)=5$，
   又右圖沒有正方形，故 $f(2,3)=5$。

3. $f(2,n),\ n\ge 4$：
   若 $n=2k$，其中 k 為正整數，$f(2,2k)\le k\times f(2,2)=3k$；
   若 $n=2k+1$，其中 k 為正整數，

   $$f(2,2k+1)\le(k-1)\times f(2,2)+f(2,3)=(3k-3)+5=3k+2\ ,$$

   又 $2\times n$ 方格紙可依照下圖方式，奇數行皆塗色，偶數行每行塗一個，如此塗色可在 $n=2k$ 時達到 $3k$ 個，$n=2k+1$ 時達到 $3k+2$ 個。



結論：$f(2,n)=\begin{cases}3k \text{ if } n=2k\\ 3k+2 \text{ if } n=2k+1\end{cases}=\lceil\frac{3}{2}n\rceil$**，其中 k 為正整數。**

2.6 分析 $f(3,n)$

1. $f(3,3)=6$：

   不容易用先前結果證明，所以我們想先證明 $f(3,3)<7$。即塗 7 格一定有正方形，下證：

   (a) 因為四個角落（圖 (1) 標示 “1”）必須要有 1 個不能塗色（否則有正方形），而四邊的中點（圖 (1) 標示 “2”）也一樣，但 $9-2=7$，所以除了刪掉的 2 個，其餘 7 格都必須塗色，於是中間的方格必須塗色（以 $\circ$ 標示）。

   (b) 如圖 (2)，考慮左下 4 個點 $(2,2,2,\circ)$ 和右上 4 個點 $(1,1,1,\circ)$ 形成的正方形，分別需要少塗 1 格，也就是說，左上和右下兩格必須塗色。

   (c) 同理可推左下和右上必須塗色，但角落四格即形成正方形，故塗 7 個必形成正方形。

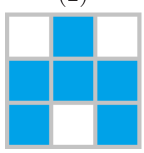
   又圖 (3) 塗 6 個沒有正方形，綜合上述，得 $f(3,3)=6$。

1	2	1
2		2
1	2	1

(1)

	1	1
2	O	1
2	2	

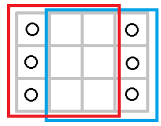
(2)



(3)

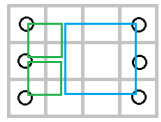
2. $f(3,4)=8$：
類似 $f(3,3)$，我們先證 $f(3,4)<9$，即塗 9 格一定有正方形，下證：

(i) 如圖 (4)，將 3×4 切成 3×3（紅色方形）跟 3×1 的方格紙，而 3×3 最多塗 6 格（$f(3,3)=6$），故右邊 3×1 方格紙須塗 3 格。（意即皆須塗色）在另一側，也可切成 3×1 和 3×3（藍色方形），同樣可得左邊 3×1 的 3 格皆須塗色。換句話說，方格紙的第 1 行、第 4 行皆須塗滿（以 ∘ 標示）。

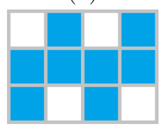


(4)

(ii) 已經塗了 6 格，相當於還有 3 格要塗，考慮第 2 行和第 3 行的情形，根據鴿籠原理有一行至少塗 2 格，不失一般性我們假設是第 2 行，如圖 (5)。但是根據圖 (5) 標示的綠色和藍色正方形，第 2 行不可能塗 2 格而不形成正方形，矛盾。故塗 9 個必形成正方形。



(5)

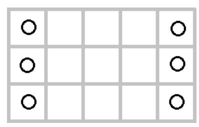


(6)

又圖 (6) 塗 8 格而沒有正方形，我們得到 $f(3,4)=8$。

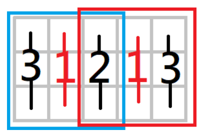
3. $f(3,5)=10$：
類似 $f(3,4)$，我們先證 $f(3,5)<11$，即塗 11 格一定有正方形，下證：

(a) 假設 3×5 方格紙裡可塗 11 格，依照證明 $f(3,4)<9$ 裡 (a) 的方法，可推得第 1 行與第 5 行都必須塗滿，如圖 (7)。



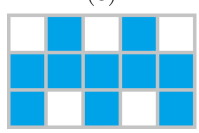
(7)

(b) 我們將 3×5 分成 $3\times 2+3\times 1+3\times 2$，可知道第 2 行和第 4 行最多只能各塗色 2 格，而此種情況塗色的格子是 $(2,1)$、$(2,3)$ 跟 $(4,1)$、$(4,3)$，但是如此便會形成有色正方形。換句話說，第 2 行和第 4 行總共最多塗 3 格。如此一來，第 3 行至少要塗 $11-6-3=2$ 格，另一方面第 3 行也只能剛好塗 2 格，若全塗則會和第 1 行形成正方形。



(8)

(c) 第 1、3、5 行的情況已討論完畢，如圖 (8)，所以第 2 行和第 4 行共須塗 $11-6-2=3$ 格，根據鴿籠原理有一行至少塗 2 格，不失一般性我們假設是第 2 行，但是如此第 1 行、第 2 行及第 3 行共塗了至少 7 格，和 $f(3,3)=6$ 矛盾，故塗 11 個必形成正方形。



(9)

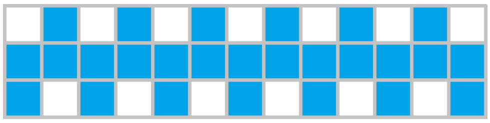
又圖 (9) 塗 10 格而沒有正方形，我們得到 $f(3,5)=10$。

4. $f(3,n)$：
依前面結果，$f(3,1)=3,\ f(3,2)=5,\ f(3,3)=6,\ f(3,4)=8,\ f(3,5)=10,$

我們發現從 $f(3,3)$ 開始即有 $f(3,k)=2k$ 的模式，我們不妨試試數學歸納法，來證明在任何 $k\geq 3$ 時確實符合 $f(3,4)$。

證明. $f(3,3)=6=2\times 3$、$f(3,4)=8=2\times 4$、$f(3,5)=10=2\times 5$，$n=3,4,5$ 時符合 $f(3,n)=2n$。若 $f(3,n)=2n$，則 $f(3,n+3)\leq f(3,n)+f(3,3)=2(n+3)$，又因為 $3\times n$ 方格紙可利用下圖 (10) 的方式，奇數行塗第 1、2 列，偶數行塗第 2、3 列，這樣的塗色法不形成正方形，故 $f(3,t)\geq 2t$，$f(3,n+3)\geq 2(n+3)$。

綜合上述，我們得到當 $n\geq 3$ 時，$f(3,n)=2n$。



(10)

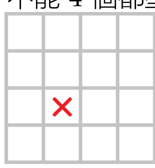
結論：$f(3,n)=\begin{cases} 2n+1 & \textbf{if } n<3 \\ 2n & \textbf{if } n\geq 3 \end{cases} = 2n+\lfloor \frac{1}{n}+\frac{1}{2}\rfloor$。 □

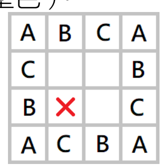
2.7 分析 $f(4,n)$：

分析 $f(4,n)$ 的方式跟分析 $f(3,n)$ 的方法差不多，差別只是情況變更多了。（以下圖示說明：“×” 表示不塗色，“◯” 表示塗色，同一組字母表示這組字母裡至少有一個 “×” 不可同時塗色，**通常是因為若全為 “◯” 時會形成正方形。**）

1. $f(4,4)=10$：

   先證明 $f(4,4)<11$。利用反證法，我們假設 $f(4,4)\geq 11$，也就是存在一種塗法最少塗了 11 格（最多只有 5 格不塗色）且不存在正方形。接下來針對這種塗法分析：中間 4 格至少有 1 個沒有被塗色（不能 4 個都塗色）。由於對稱性，我們不妨假設它是 $(2,2)$。用右圖所標示的 A、B、C 進行分組，可得知外圈至少有 3 格沒有被塗色。如此中間最多只能再有一格沒有塗色。

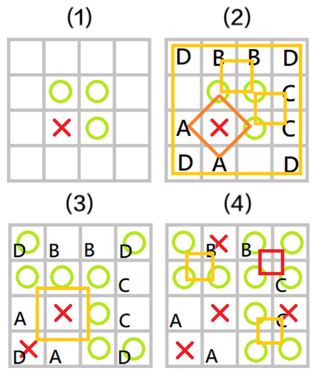
   

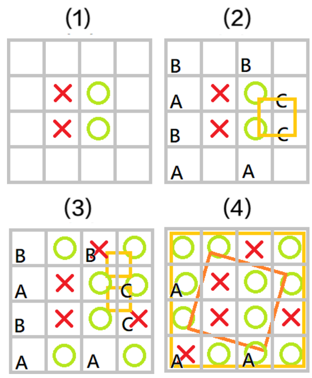
   (a) 我們可依除了 $(2,2)$ 以外的中間三格可能的情形分成三種情況，分別是 “三格皆塗色”、“$(2,3)$ 不塗色／ $(3,2)$ 不塗色”、“$(3,3)$ 不塗色” 來討論：

   i. 三格皆塗色（如右圖 (1)）：

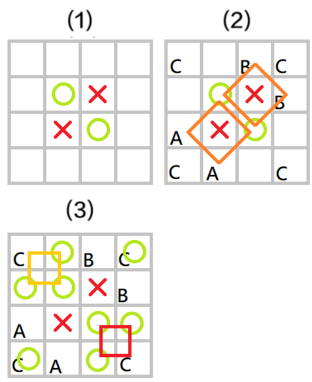
由圖 (2) 標出的 4 個正方形，我們可知道此 $ABCD$ 四組的方格分別要有至少一格不被塗色，這樣就有 $1+4=5$ 個點不被塗色了。如此一來，$(1,3)$ 和 $(3,1)$ 必須塗色，而且 A、B、C、D 組裡各恰有一格不被塗色。由於圖 (3) 標示的正方形，所以 $(1,1)$ 不能塗色，又因 $(1,1)$ 位於 D 組，其他標示為 D 的方格必須要塗色（因為每組都恰有一格不被塗色）。圖 (4) 標出的黃色正方形，也逼使 B、C 組只有這種塗色方式，但右上角 4 格已經形成有色正方形（以紅色正方形標示），與假設矛盾。



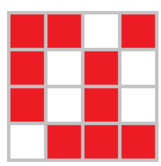
ii. $(2,3)$ 不塗色／ $(3,2)$ 不塗色（如右圖 (1)）：
由於其對稱性，此兩種的情形是一樣的。在此選擇 $(2,3)$ 不塗色說明。依照 i. 的方法，由圖 (2) 我們可知未標示的格子皆須塗色，且 ABC 每組各恰有一格不被塗色。另外，由於此圖上下對稱，我們可不失一般性的將 C 組的 $(4,3)$ 塗色，而 $(4,2)$ 不塗，如圖 (3)。由圖 (3) 的右上角的正方形可知道 $(3,4)$ 不能塗色，連帶其他 B 組格子必須塗色。最後由圖 (4) 的外圍正方形知 $(1,1)$ 不能塗色，連帶其他 A 組格子必須塗色，可推得形成一個斜的有色正方形，與假設矛盾。



iii. $(3,3)$ 不塗色（如右圖 (1)）：
依照相同的方法，由圖 (2) 標出的 A、B、C 三組方格（為了圖的簡潔，C 組只標格子），可知道剩餘 4 格皆須塗色，且 A、B、C 各組皆恰有一個方格不塗色。但由圖 (3) 的 2 個正方形可發現，C 組中的 $(1,4)$ 跟 $(4,1)$ 兩格都不能塗色，而 C 組恰有一格方格不塗色，矛盾。



綜合三種情況的結果，得證塗 11 個方格必有正方形，即 $f(4,4)<11$。又右圖塗 10 格而沒有正方形，可得 $f(4,4)=10$。

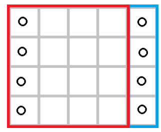


由於把正方形標示出來，非常容易讓圖混亂而失去焦點，所以接下來的圖形

除了較特殊的正方形以外，都會像 $f(4,4)$ 的部分圖所做的，只將格子標出而省略正方形，如此圖便可簡潔一些。

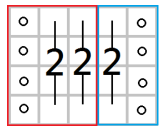
2. $f(4,5) = 13$：

同之前步驟，先證明 $f(4,5) < 14$。利用反證法，我們假設 $f(4,5) \geq 14$，也就是存在至少一種塗法最少塗了 14 格（最多只有 6 格不塗色）且不存在正方形，接下來針對這種塗法分析：



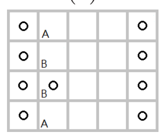
(1)

(a) 4×5 可被拆成 4×4 和 4×1 方格紙，但 4×4 最多塗 $f(4,4) = 10$ 格，依照證明 $f(3,4)$ 跟 $f(3,5)$ 的第一步驟，可知左右兩行須填滿，如圖 (1)。



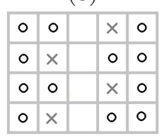
(2)

(b) 4×5 又可被拆成 4×3 和 4×2 方格紙，分別最多填入 $f(4,3) = 8$ 和 $f(4,2) = 6$ 個點，又 $8 + 6 = 14$，得到它們必定分別要填入 8 個、6 個 ◯（否則不夠），又因左右對稱，可知第 2、第 4 行須塗 2 個 ◯，連帶第 3 行須塗 2 個 ◯，如圖 (2)。



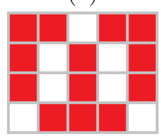
(3)

(c) 如圖 (3)，考慮第 2 行，由於 $(2,1)$ 跟 $(2,4)$ 不可同時塗色，如圖中 A，故 $(2,2)$、$(2,3)$ 中要塗一個，但也只能塗一格，如圖中 B，我們不失一般性假設塗了 $(2,2)$，如此第 2 行便剩 $(2,4)$ 可塗色。又第四行的情形類似，只能同時塗 $(4,1)$、$(4,3)$，或 $(4,2)$、$(4,4)$，但若塗 $(4,2)$、$(4,4)$，第 2 行和第 4 行的 4 個點便形成正方形。故只能填 $(4,1)$、$(4,3)$，如圖 (4)。



(4)

(d) 但如此第 3 行便不能再塗任何一個 ◯（如右圖），矛盾，故 $f(4,5) < 14$。



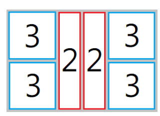
(5)

又右圖 (5) 塗 13 格沒有正方形，故 $f(4,5) = 13$。

3. $f(4,6) = 15$：

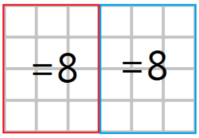
相較於其他狀況，4×6 大小的格子比較難說明（見段落 2.8），所以我們先證明一個引理來幫助我們完成證明 $f(4,6) = 15$。

Lemma. *若 $f(4,6) \geq 16$，則 $f(4,6) = 16$ 且對於任何一種達到 $f(4,6) = 16$ 的塗法而言，每個區塊中 ◯ 的個數如右圖。*

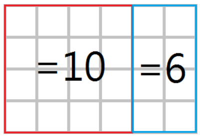


證明. 先將 4×6 分成兩個 4×3，因為 $16 = f(4,3) + f(4,3) \geq f(4,6) \geq 16$，所以這個不等式中的所有大小關係皆為等號，即 $f(4,6) = 16$ 且每個大方格紙 ◯ 的個數如下圖 (1)。再考慮另一種切法，將 4×6 切成 4×4 跟 4×2，因為 $16 = f(4,2) + f(4,4) \geq f(4,6) = 16$，所以這個不等式中的所有大小

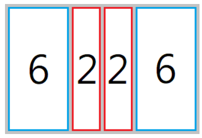
關係皆為等號，即每個方塊 ◯ 的個數如下圖 (2)，根據左右對稱性及配合圖 (1) 的資訊可得下圖 (3)。最後考慮圖 (3) 中的最左邊的那個方塊，因為 $6 = f(2,2) + f(2,2) \geq f(4,2) = 6$，所以這個不等式中的所有大小符號皆為等號，即每個方塊 ◯ 的個數為如下圖 (4)，最後根據左右對稱性得證。 □



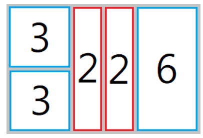
(1)



(2)



(3)



(4)

我們開始證明 $f(4,6) < 16$。我們利用反證法，假設 $f(4,6) \geq 16$，配合上述的 **Lemma**，也就是存在一種塗法塗了 16 格（只有 8 格不塗色）且不存在正方形，接下來針對這種塗法分析：

(a) 將 4×6 方格紙切成 4×5 和 4×1，由於 $f(4,5) = 13$，$16 - 13 = 3$，代表最旁邊的第 1、第 6 行都至少要各塗 3 格。

(b) 以下針對第 1 行可能的 3 種情況討論：

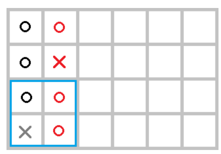
i. $(1,1)$ 不塗色，而 $(1,4)$ 亦同。

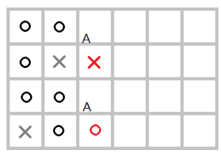
ii. $(1,2)$ 不塗色，而 $(1,3)$ 亦同。

iii. 四格皆塗色。

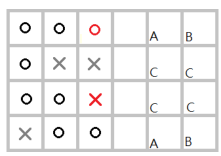
但是為了方便討論，會先討論完 i. 和 iii. 後，才回來討論 ii. 。

(c) $(1,1)$ 不塗色：


(5)



(6)

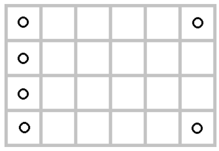


(7)

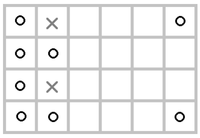
考慮第 2 行，由 **Lemma** 可知 $(2,1)$、$(2,2)$ 要塗色，導致 $(2,3)$ 不能塗色，再使用一次 **Lemma**，可得 $(2,4)$ 要塗色，如圖 (5)。
如圖 (6)，考慮第 3 行，若塗 $(3,3)$ 會形成正方形。由圖中標示的 A 組可知 $(3,2)$、$(3,4)$ 至多塗一格，而由 **Lemma** 知第 3 行須塗 2 格，故 $(3,1)$ 要塗色。$(3,1)$ 塗色後，可推得 $(3,2)$ 不塗色，再推得 $(3,4)$ 塗色。
如圖 (7)，接下來考慮第 5, 6 行，AB 組分別至少有一格不能塗色，而 C 組也有一格不能塗色，但如此第 5, 6 行至多塗 5 格，與 **Lemma** 矛盾，故 $(1,1)$ 必須塗色。
同理另外三個角落也必須塗色，因此接下來的情況都是以四個角落皆塗色為前提。

(d) 四格皆塗色：

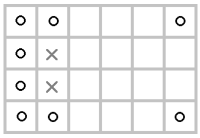
根據 (c) 的結論，角落皆須塗色，如圖 (8)。考慮第 2 行，根據 **Lemma**，我們可不失一般性分成兩種情況討論：塗 $(2,1)$、$(2,3)$，或塗 $(2,1)$、$(2,4)$，如下方圖 (9)、(10)。



(8)



(9)

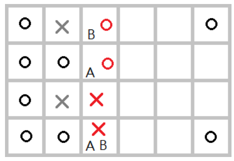


(10)

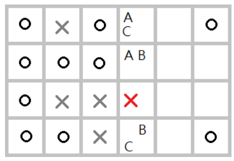
塗 $(2,1)$、$(2,3)$（圖 (9)）：

考慮第 3 行，根據 **Lemma**，若塗 $(3,2)$ 會形成正方形，因此 $(3,2)$ 不能塗色。由於 A 組不能同時塗色，所以 $(3,3)$ 必須塗色，同理 B 組也不能同時塗色，所以 $(3,4)$ 必須塗色，如圖 (11)。

考慮第 4 行，根據 **Lemma** 須塗 2 格，若塗了 $(4,2)$ 會形成正方形，所以不能塗色，如圖 (12)。又 $(4,3)$、$(4,4)$ 不能同時塗色（A 組），所以 $(4,1)$ 須塗色；$(4,1)$、$(4,3)$ 不能同時塗色（B 組），所以 $(4,4)$ 須塗色。但如此便形成正方形（C 組），矛盾。



(11)



(12)

塗 $(2,1)$、$(2,4)$（圖 (10)）：

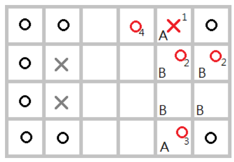
考慮如圖 (13)：（小標 n 代表第 n 步驟）

步驟 1：考慮 A 組的兩格，必有一格不能塗色，不失一般性設其為 $(5,4)$（上下對稱）。

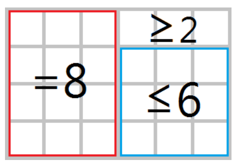
步驟 2：根據 **Lemma**，右上角 2×2，$(5,3)$、$(6,3)$ 須塗色。

步驟 3：B 組也有一格不塗色，根據 **Lemma**，$(5,1)$ 塗色。

步驟 4：根據 **Lemma**，第 4, 5, 6 行須塗 8 格，又右圖右下角的 3×3 最多塗 $f(3,3)=6$ 格，得右上角區塊至少塗 2 格，意即 $(4,4)$ 須塗色。所以我們得到了圖 (15) 的黑色部分，我們繼續討論。



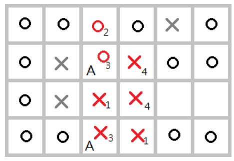
(13)



(14)

如圖 (15)：

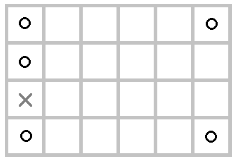
步驟 1：$(3,2)$、$(4,1)$ 塗了皆會形成正方形，不塗。
步驟 2：A 組最多塗 1 格，根據 **Lemma**，$(3,4)$ 須塗色。
步驟 3：$(3,1)$ 塗了會形成正方形，根據 **Lemma**，$(3,3)$ 塗色。
步驟 4：$(4,2)$、$(4,3)$ 分別塗了有正方形，都不能塗，但此時第 4 行僅塗 1 格，違反 **Lemma**。



(15)

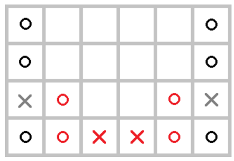
綜合上述，我們得到第 1 行也不能全部塗滿，同理第 6 行也不能全塗滿。

(e) $(1,2)$ 不塗色：
考慮第 6 行。由於其他情況在前兩個部分都已討論完畢，我們只需要討論 $(6,2)$ 不塗色跟 $(6,3)$ 不塗色這兩種情況即可，如圖 (16)。

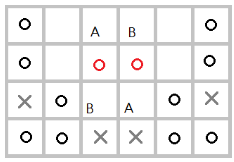


(16)

$(6,2)$ 不塗色：
如圖 (17)，根據 **Lemma** 可得四個紅色 ◯。若塗 $(3,1)$ 會導致 $(3,2)$、$(3,3)$、$(3,4)$ 皆不能塗色，違反 **Lemma**，因此 $(3,1)$ 不能塗色，同理 $(4,1)$ 也不塗色。
根據 **Lemma**，中間兩行要塗 4 格，但 AB 各最多塗一格，所以 AB 各恰塗一格且 $(3,3)$、$(4,3)$ 必須塗色，如圖 (18)。考慮第 3, 4 行，接下來不管怎麼塗，為了不形成正方形，都會違反 **Lemma**，矛盾。

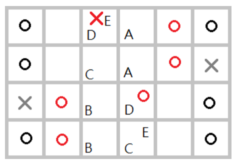


(17)



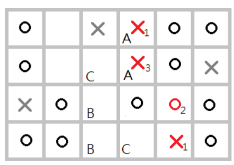
(18)

$(6,3)$ 不塗色：
根據 **Lemma** 得到 $(2,1)$、$(2,2)$、$(5,3)$、$(5,4)$ 四個紅色 ◯，如圖 (19)，接下來可將中間兩行分成圖中 4 組 A,B,C,D，每組分別最多塗一格，搭配 **Lemma** 可知四組皆須恰塗一格。標示 E 的兩格至少有一個不塗色（否則會和 $(2,2)$、$(5,3)$ 的 ◯ 形成正方形），因為整張圖旋轉對稱，不妨假設是 $(3,4)$ 不塗色，可得到 $(4,2)$ 塗色（同為 D 組）。



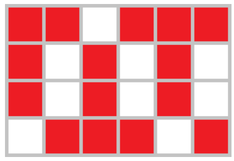
(19)

如圖 (20)：
步驟 1：$(4,2)$ 塗色後，標示 1 的方格都不能塗色。
步驟 2：根據 **Lemma** 可知 $(5,2)$ 塗色。
步驟 3：此時會發現 $(4,3)$、$(4,4)$ 都不能塗色，但 A 組須塗 1 格，矛盾。
綜合上述，任何情況 $f(4,6) \geq 16$ 皆得到矛盾，得證 $f(4,6) < 16$。



(20)

又右圖 (21) 塗 15 格而沒有正方形，$f(4,6)=15$。



(21)

4. $f(4,n)$：

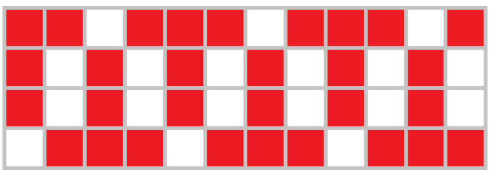
   $f(4,n)$ 的解法跟 $f(3,n)$ 一樣使用歸納，但不像 $f(3,n)$ 如此整齊，而比較像 $f(2,n)$，奇偶數塗的不一樣多。

   先前的結果：

n	1	2	3	4	5	6
$f(4,n)$	4	6	8	10	13	15

   並且我們可得下列式子：$\forall\ a,b\in\mathbb{N},\ 3\le a\le 6,$

$$f(4,a+4b)\le f(4,a)+b\times f(4,4)=f(4,a)+10b\ \ 。$$



   綜合以上結果，可得

$$f(4,n)=\begin{cases}2n+2 & \text{if } n\le 2;\\ \frac{5}{2}n & \text{if } n>2 \text{ and } n \text{ is even};\\ \frac{5n+1}{2} & \text{if } n>2 \text{ and } n \text{ is odd}\end{cases}=\left\lceil\frac{5}{2}n\right\rceil+\left\lfloor\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

2.8 往下一步之前

$f(4,6)$ 比 $f(4,5)$、$f(4,7)$ 的論述都複雜許多，原因出在於 $f(4,6)$ 的值在某種程度上比較小，為了描述這種大小，這裡提出「塗色比（定義 7）」的概念來描述。$m\times n$ 方格紙的塗色比定義為

$$\frac{f(m,n)}{mn}$$

即最多能塗的數量佔全部的比值。塗色比愈低，代表我們能塗的方格數比例愈少，要壓的上界就愈低，證明起來也會更困難。下面給出 $f(4,n)$ 以前，及部份 $f(5,n)$ 的塗色比（小數點後第三位捨去）：

$f(m,n)$	$f(1,n)$	$f(2,2)$	$f(2,3)$	$f(2,4)$	$f(2,n)$
塗色比	$\frac{n}{n}=1$	$\frac{3}{4}=0.75$	$\frac{5}{6}\approx 0.83$	$\frac{6}{8}\approx 0.75$	$\frac{\lceil 1.5n\rceil}{2n}\approx 0.75$
$f(m,n)$	$f(3,3)$	$f(3,4)$	$f(3,5)$	$f(3,6)$	$f(3,n)$
塗色比	$\frac{6}{9}\approx 0.66$	$\frac{8}{12}\approx 0.66$	$\frac{10}{15}\approx 0.66$	$\frac{12}{18}\approx 0.66$	$\frac{2n}{3n}\approx 0.66$
$f(m,n)$	$f(4,4)$	$f(4,5)$	$f(4,6)$	$f(4,7)$	$f(4,n)$
塗色比	$\frac{10}{16}\approx 0.62$	$\frac{13}{20}=0.65$	$\frac{15}{24}\approx 0.62$	$\frac{18}{28}\approx 0.64$	$\frac{\lceil 2.5n\rceil}{4n}\approx 0.62$
$f(m,n)$	$f(5,5)$	$f(5,6)$	$f(5,7)$	$f(5,8)$	$f(5,9)$
塗色比	$\frac{15}{25}=0.6$	$\frac{19}{30}\approx 0.63$	$\frac{21}{35}=0.6$	$\frac{24}{40}=0.6$	$\frac{27}{45}=0.6$

可以發現到塗色比隨著 m 變大，大致呈現減少的狀態，而 $f(3,n)$ 的證明難度都差不多。

有趣的是，$f(4,6)$ 比起 $f(4,5)$、$f(4,7)$，塗色比反而是比較低的，這也說明了為什麼 $f(4,6)$ 證明起來比其他的複雜。

接下來我們想前進到 $f(5,n)$，雖然看起來只多了一列，但難度卻增加許多。主要原因有幾個：

1. 多了更多種正方形需要考慮與討論，只要不考慮某一個正方形，結果就有可能不一樣，所以所有的正方形都需要討論。
2. 格子數變多，考慮的狀態數也增加 (狀態數和格子數大略呈指數關係)。
3. 圖形愈大，找正方形也更不容易 (和狀態數成正相關)。
4. $f(5,5)$ 的塗色比為 0.6，儘管和 $f(4,6)$ 相比，只小了 0.025，但其實是極大的差距。
5. 和 $f(4,n)$ 最重要的差別：
   經程式驗證，$f(5,15)=44<3\times f(5,5)=45$，這導致推廣到 $f(5,n)$ 時，不能像 $f(3,n)$、$f(4,n)$ 那樣簡單的使用 3×3、4×4 估計，再進行數學歸納法，並給出相應的最大值構造。目前不確定可否使用 $f(5,6)$ 或其他 $f(5,k)$ 進行壓界，但可以相信的是，隨著 m 變大，我們便無法像這樣簡單地用某個 $f(m,k)$ 壓界，解決所有的 $f(m,n)$。

目前對於求出 $f(5,5)$ 的方法，也是如同先前做法，分項討論 $\rightarrow$ 估計最大值 $\rightarrow$ 給出對應構造，或是使用引理稍作簡化，但 $f(5,5)$ 的不確定性更大，並沒有辦法像 $f(4,6)$ 那樣簡易確定哪些幾組格子需恰填幾格，而 $f(5,n)$ 的精確值結果目前利用程式計算，僅到 $f(5,10)$，也不算得到很好的結果。目前正嘗試往不同的面向，找到比較好的討論策略，或許能有所突破。

$f(5,n)$ 的部分值

$f(5,5)$	$f(5,6)$	$f(5,7)$	$f(5,8)$	$f(5,9)$	$f(5,10)$	$f(5,n)$
15	19	21	24	27	30	??

2.9 $f(m,n)$, $m \le n$ 的粗估上下界

對於已經得到精確值的 $f(m,n)$，沒有必要討論它們的上下界，所以接下來的討論會預設排除它們。

1. 基礎上下界：

$$（塗\text{L}型）\ m+n-1 \le f(m,n) < mn\ （全部塗滿）$$

2. 估計上界：
   (1) 單位切割法：
   將原本的方格紙切成較小的方格紙來初估上界，在先前的討論中也有使用到這個技巧。例如：$f(12,n) \le 3f(4,n)$。運用此方法可得到一個實際數字的上界，且比 $f(m,n) \le mn$ 好許多。

   (2) 四分切割法：
   利用將 $m \times n$ 方格紙切成 4 塊接近大小的方格紙，可得到

$$f(m,n) \le f\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + f\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + f\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \le 4f\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)$$

   運用此方法可得到遞迴的上界，和構造下界的不等式也有對應的關係。

3. 構造下界：

   (a) 遞降法：
   和估計上界的遞降法一樣切成 4 塊方格紙，可得

$$f(m,n) \ge f\left(\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right) + f\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) + 1 \ge 2f\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$$

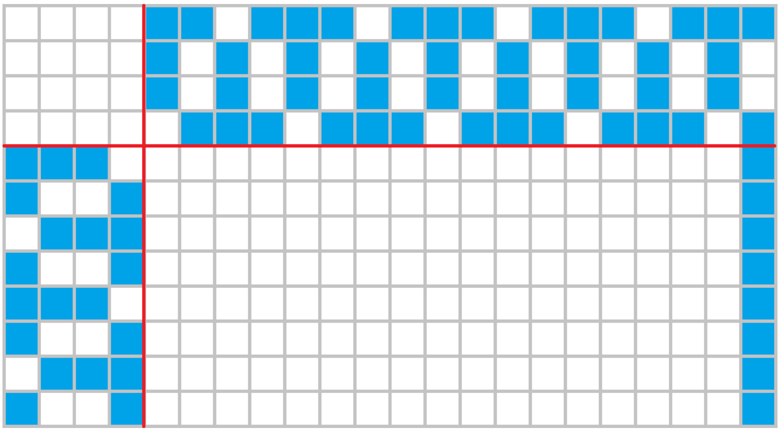
   因為這兩塊會位於對角（假設是在右上和左下），互相是獨立的。另外最左下角的一塊也可塗色，不可能形成正方形，故「$+1$」。

   (b) 直接構造法（$m \le n$ ）：
   因為 $f(4,n)$ 對我們來說已知，我們可將 $m \times n$ 方格紙切成 4×4、$4\times(n-4)$、$(m-4)\times 4$、$(m-4)\times(n-4)$ 四塊（如下圖），其中 $(m-4)\times 4$ 和 $4\times(n-4)$ 可分別用達到 $f(4,m-4)$, $f(4,n-4)$ 的方式塗色，再考慮 $(m-4)\times(n-4)$ 和 4×4 這兩塊，如果 $m-4 \ge 4$ ，那我們塗 $(m-4)\times(n-4)$ 最右邊那一排（塗 $m-4$ 個），否則塗 4×4 最上面那一排，塗 4 個（見下圖），可以輕易驗證不會形成正方形。在 m, n 夠大

（≥ 8）時，可寫成

$$\begin{aligned} f(m,n) &\geq f(4,m-4)+f(4,n-4)+m-4 \\ &= \lceil 2.5m \rceil + \lceil 2.5n \rceil + m - 4 \end{aligned}$$

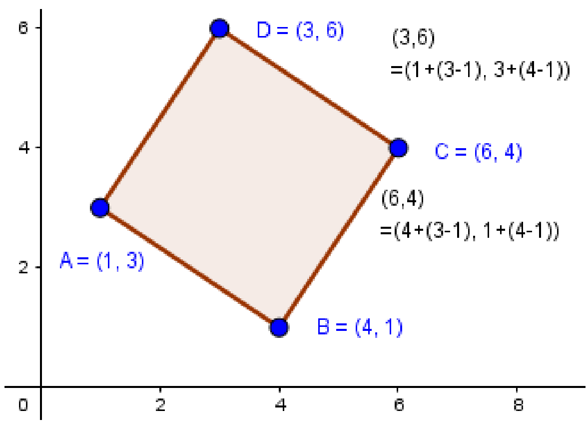
這給了我們一個線性成長的下界，雖然比起上界（二次成長），還是有很大的進步空間。



2.10 其他嘗試

1. 將「形成正方形」轉換成代數形式：
   「形成正方形」這個詞的定義雖然直觀，但在幾何解析、程式分析上不能直接使用，此時我們可以有幾種做法：

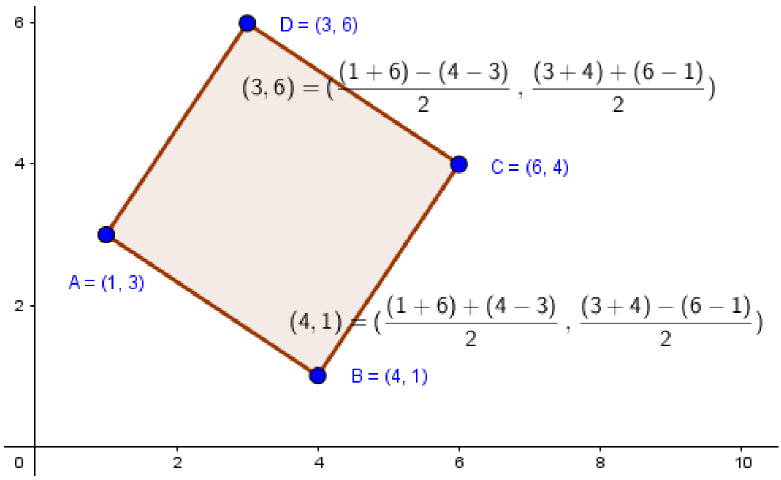
   (a) 對於一個正方形，可以選兩個以邊連接的點 (A,B)，來決定另兩個點。代數解析：（這裡設固定的點為 A、B，逆時針旋轉得 C、D）經過計算，有了 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$ 的座標，C、D 的座標分別為 $C(b_1+(a_2-b_2),b_2+(b_1-a_1))$、$D(a_1+(a_2-b_2),a_2+(b_1-a_1))$，如下圖的例子。



(b) 除了選取相鄰的點，我們也可以選擇對角的點來決定正方形。
代數解析：(這裡固定的點為 A、C，對中心點旋轉得 B、D) 經過計算，有了 $A(a_1, a_2)$、$C(c_1, c_2)$ 的座標，B、D 的座標分別為

$$B\left(\frac{(a_1+c_1)+(c_2-a_2)}{2}, \frac{(a_2+c_2)-(c_1-a_1)}{2}\right)$$
$$D\left(\frac{(a_1+c_1)-(c_2-a_2)}{2}, \frac{(a_2+c_2)+(c_1-a_1)}{2}\right)$$

如下圖的例子。



第二種的樣式較對稱，但第一種比較簡潔，我們下面在說明時使用第一種，但是第二種也可以使用。

2. 轉化題目：

(a) 運用集合和代數，可將問題轉化成等價敘述：
設 $S = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)\}$，其中 (a_i, b_i) 為有序對，a_i、b_i 皆為正整數且分別不超過 m、n，且集合中無四組有序對 (a, b)、(c, d)、(e, f)、(g, h) 使得 $(e, f) = (a+b-d, b+c-a)$ 且 $(g, h) = (c+b-d, d+c-a)$，求 $|S|$ 的最大值。(形成正方形的條件也可使用第二種定義)

(b) 將 $m \times n$ 的方格紙中，每個方格賦值 0 或 1，並要求任意在方格紙內的 (a, b)、(c, d)、$(a+b-d, b+c-a)$、$(c+b-d, d+c-a)$，四格的值總和不等於 4，求方格紙上所有格子值總和的最大值。

不過並沒有改變題目的本質意義，一樣是要做同樣的「尋找正方形」的動作，並沒有比較簡潔。

3. 使用演算法嘗試構出 $f(m,n)$ 或其下界：

(a) 窮舉法：

概念： 從 $(1,1)$ 開始，先把塗色後不會形成正方形的點都塗色，跑完一遍之後再將上一個塗色的點改為不塗色，再從該處繼續重複上述步驟，直到所有點都不塗色為止。紀錄中途達到的最大值。其實跑到 $(1,n)$ 都沒有塗色即可，因為接下來的值絕對不會是最大值。

優點： 能保證在有限時間內算出特定 $f(m,n)$ 的「精確值」，並在在途中可持續修正下界。

缺點： 時間複雜度太高（約 $\mathcal{O}(2^{mn}\times m^2)$，儘管常數很小），有限時間可能是數年（而此時 mn 可能還不到 200）。

(b) 隨機法：

概念： 每次從所有沒被選過的格子隨機挑一格，若他塗色後不形成正方形，則塗色；若不行，則標記為不能塗色。當所有點都試過之後，產出最終得到的結果。

優點： 每次可嘗試不同的結果，得到的結果比窮舉法更快接近最大值。

缺點： 就算達到 $f(m,n)$ 也無法以此為證明，且在 m、n 極大時要靠一些運氣。

(c) 貪心法（greedy algorithm）

概念： 我們先假設全部塗滿，此時會產生許多正方形，計算若刪去某個點，可消去多少個正方形。算完後，取消塗色那個消除最多正方形的（若有多個點則隨便挑一格），如此重複下去直到沒有正方形為止。

優點： 平均可達到比隨機法好一點的下界，且是一種較穩定的做法。

缺點： 並不能確實完全達到 $f(m,n)$。

(d) 進階的貪心法

概念： 作法類似上個作法所述，但遇到可消除同樣多的正方形的數個點時，則每個都試一遍，分支處理。在某些階段有些情況是完全相同的，可以合併減少計算次數。

優點： 考慮全部的貪心法，去除隨機因素，且時間上比窮舉法快，並得到相當接近的結果。在 $f(n,n)$ 的情況下，直到 9×9 都可達到 $f(9,9)$。

缺點： 不一定能達到精確值。

結論：窮舉法若能優化執行效率，則可以期待有更進一步的突破，甚至可得到目前尚未得到的 $f(10,10)$；而貪心法則可給出相對好的下界。

2.11 預期結果／猜測與發現

1. $\left\lfloor \dfrac{mn}{2} \right\rfloor \le f(m,n) \le \left\lceil \dfrac{(m+1)n}{2} \right\rceil$

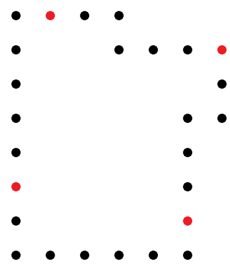
目前看到的所有 $f(m,n)$ 都小於等於 $\left\lceil \frac{(m+1)n}{2} \right\rceil$，很多也都達到等號（如

$f(k,n)$, $k \leq 4$ 時常常發生），但 m, n 變大時則有靠近 $\frac{mn}{2}$ 的趨勢。相較於 $f(m,n) \leq \left\lceil \frac{(m+1)n}{2} \right\rceil$，$\left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor \leq f(m,n)$ 似乎比較不可能成立，但也是可以嘗試的目標。這個目標重要的地方，在於我們可以估計在 m, n 夠大的時候，塗色比會趨近於什麼值。

2. 任何形成迴路的塗色方格存在正方形

   詳細敘述：

   「在有限的格子點中，若每個塗色的點上下左右四格恰有兩點塗色（如右圖），是否會存在 4 個塗色點形成正方形？」有天我試著將塗色的點，遵循著不形成正方形的規則在格子點上繞一圈，發現怎麼試都做不到，總會形成至少一個正方形，於是猜測可能做不到。

   目前有個未被證明的命題 “Inscribed square problem”，敘述是：「任何平面上的簡單封閉曲線上，都可以找到四點形成正方形嗎？」（參考文獻 [2]），此問題目前只有特定情況時的，我們的問題則相當於是它的離散版。

   針對離散版的情形，Feliú Sagols, Raúl Marín 已共同給出了一個肯定的證明（參考文獻 [3]），使用到了 “Inscribed square problem” 的部份情形，由 Igor Pak 給出的結果（參考文獻 [4]）。

3. 其他和數列 $\{a_n\}: a_n = f(n,n)$ (OEIS: A240443) 類似的數列：(OEIS:A061786)

   $$\{b_n\}:\ b_n = |S|,\ 其中集合\ S = \{i^2 + j^2 \mid 1 \leq i,\ j \leq n,\ i,j \in \mathbb{N}\}\ 。$$

   這個數列在前期也是依照 $\frac{n(n+1)}{2}$ 趨勢前進，直到出現 $5^2 + 5^2 = 7^2 + 1^2$ 這個情形，才使得它少了 1。儘管這個數列感覺跟我們要的定義差很多，但除了數字上的巧合外，用到了「平方」，或許不能說跟正方形完全沒有關係。

   (OEIS:A194082)

   $$\{c_n\}:\ c_n = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{\sqrt{3}k}{2} \right\rfloor$$

   以下是三個數列的值的比較：

$\{x_n\}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
$\{a_n\}$	1	3	6	10	15	21	27	34	42	≥ 50
$\{b_n\}$	1	3	6	10	15	21	27	34	42	52
$\{c_n\}$	1	3	6	10	15	21	27	34	42	51

   雖然認為是巧合，可是在有反例之前都說不了什麼。可以注意到三個數列在第 10 項產生分歧，所以 $f(10,10)$ 是決定這兩個數列和 $f(n,n)$ 數列關聯性的關鍵。若吻合時，找尋對應關係可能就是接下來較重大的一個目標，如此一來便可以較簡單的方式計算 $f(n,n)$，若達成，將會是一個很重要的突破。

2.12 更多 $f(m,n)$ 的資料

$f(m,n)$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
$m=5$	15	19	21	24	27	30
$m=6$	19	21	24	≥ 28	≥ 31	≥ 34
$m=7$	21	24	27	≥ 31	≥ 35	≥ 39
$m=8$	24	≥ 28	≥ 31	34	≥ 38	≥ 42
$m=9$	27	≥ 31	≥ 35	≥ 38	42	≥ 45

3 結論 Summary and Conclusion

1. $f(m,n)$ 的結果：

$$\begin{aligned} f(1,n) &= n \\ f(2,n) &= \left\lceil \frac{3}{2}n \right\rceil \\ f(3,n) &= 2n + \left\lfloor \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \\ f(4,n) &= \left\lceil \frac{5}{2}n \right\rceil + \left\lfloor \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \end{aligned}$$

2. 對於未求得精確值的上下界估計，目前採用遞降法：

$$2f\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq f(m,n) \leq 4f\left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right)$$

或是構造法。若不一定要得到精確值，也可以利用程式來做，但是只能得到下界。

3. 要找出 $f(m,n)$ 前最重要的是找出 $f(m,m)$，而在 OEIS 上有找到 $f(m,m)$ 的結果，但精確值僅到 $f(9,9)$，可見目前尚無一套方法以快速找出 $f(n,n)$ 的值，更何況 $f(m,n)$。
4. 猜想：$\left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor \leq f(m,n) \leq \left\lceil \frac{(m+1)n}{2} \right\rceil$。

參考資料 (Reference)

[1] OEIS A240443: Maximal number of points that can be placed on an $n \times n$ square grid so that no four of them are vertices of a square with any orientation.
https://oeis.org/A240443

[2] Inscribed square problem:
https://en.wikipedia.org/wiki/Inscribed_square_problem

[3] F. Sagols, R. Marín, Two discrete versions of the Inscribed Square Conjecture and some related problems. Theoretical Computer Science, 412(15), 1301-1312, 2011
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397510005487

[4] Igor Pak, The discrete square peg problem. arXiv:0804.0657v1 [math.MG] 4 Apr 2008
https://arxiv.org/abs/0804.0657v1

[5] OEISA061786: Number of distinct sums $i^2 + j^2$ for $1 \le i \le j \le n$.
https://oeis.org/A061786

[6] OEISA194082: $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{\sqrt{3}k}{2} \right\rfloor$.
https://oeis.org/A194082

[7] 遊戲 “Square”（已下架）
https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hidemoko.square