蓋好不蓋滿

臺北市立第一女子高級中學　馬正芸
指導老師　鄭凱鐘老師

Abstract

In this paper we compute the minimum number of L-tiles (2 by 2 square minus a corner) needed to cover certain chessboard-colored boards if all black squares are covered without overlapping tiles. Three cases are considered, namely the square boards, the diamond-shape boards and the staircase boards. We also find the relation among them. The tools we use are induction and explicit constructions. In the last we consider the cases of cubes and make some observations.

中文摘要

本文首先考慮由黑白方格相間組成的正方形棋盤，用角形將黑色部分完全覆蓋且不可重疊的最少角形數。接者討論菱形棋盤與階梯形棋盤的情形，並討論三者之間關係。我們的主要方法為構造以及數學歸納法。最後試圖推展至立體，得到一些觀察及猜想。

1 簡介 (Introduction)

1.1 研究動機

某次專研課，剛好在瀏覽臺灣科學教育館的網站，無意間看到了第 56 卷第 7 期的科學研習月刊「森棚教官的數學題專欄 — 蓋好不蓋滿」，其題目為：「桌上有像棋盤一樣黑白相間的 9×9 的布如下圖，想要盡可能放越少的角形，而且角形不能重疊，把所有的黑色方格遮住。請問最少要用掉幾個角形？」之前常常看到將棋盤蓋滿的題目，卻從來沒有看過只蓋黑色部分的類型，我對這個題目很有興趣，因此決定深入探討，展開研究。

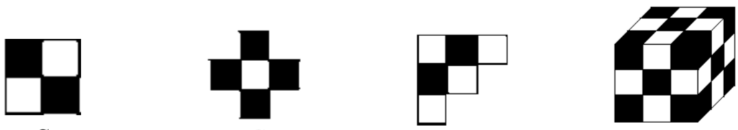
1.2 研究目的

1. 找出 $k \times k$ 黑白棋盤 S_k 所需最少角形數 $n(S_k)$
2. 找出菱形棋盤 G_k 所需最少角形數 $n(G_k)$
3. 探討 S_k、G_k、H_q 三種棋盤的關係
4. 找出 $k \times k \times k$ 黑白立體棋盤 T_k 所需最少角形數 $n(T_k)$

2 研究內容 (Main Body)

2.1 名詞定義

1. S_k 表示由 k 列 k 行（其中 $k \geq 2$）所構成的 $k \times k$ 黑白相間正方形棋盤。
2. G_k 表示總共有 k 列（其中 $k \geq 3$），第一列從 1 格開始以公差為 2 遞增，至最長列為 k 格，之後以 2 為公差遞減至 1 格的黑白相間菱形棋盤。
3. H_q 表示第一列有 q 格（其中 $q \geq 2$），之後每列格數以 1 為公差遞減至一格，形如階梯的黑白相間棋盤。
4. T_k 表示 $k \times k \times k$（其中 $k \geq 2$）的黑白相間立方體棋盤。



S_2 G_3 H_3 T_3

5. (i, j) 表示位於棋盤第 i 列、第 j 行的格子；當 $i + j$ 為奇數時稱為奇格，偶數為偶格；當偶格為黑色時，稱之為 bS_k；偶格為白色時，稱之為 wS_k。如下圖 3 為 bS_3，圖 4 為 wS_4。

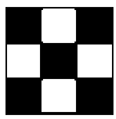


圖 3: bS_3

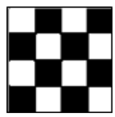
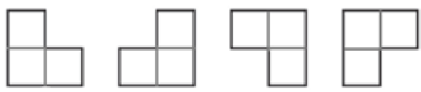


圖 4: wS_4

6. 在 G_k 中，其第一列僅有一格格子，當該格為黑色時，定為 bG_k；當該格為白色時，定為 wG_k 。
7. 在 H_q 中，其兩邊最長列相交的格子，當該格為黑色時，定為 bH_q；當該格為白色時，定為 wH_q 。



8. 角形：由 3 個方格所組成，形成如英文字母 L 的形狀，如上圖所示。
9. $n(S_k)$、$n(G_k)$、$n(H_q)$、$n(T_k)$ 表示利用角形分別將 S_k、G_k、H_q、T_k 裡全部的黑色格子覆蓋住所需的最少個數。

2.2 探討 $n(S_k)$

將 k 分為偶數和奇數兩種情況討論：

1. 若 k 為偶數，其黑白格子數量相同，所組成的方格只有一種狀況，即 $n(bS_k) = n(wS_k)$。要找出所需最少角形數，最佳的狀況為 1 個角形可覆蓋到兩個黑色格子，即

$$n(bS_k) = n(wS_k) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

$\boxed{\text{引理一}}$ 當 $k = 2$ 時，$n(bS_2) = n(wS2) = 1$。

證明. 可以從下面四張圖知道，不管怎麼蓋，$n(bS_2) = n(wS_2) = 1$ 。 $\square$

$\boxed{\text{定理一}}$ $n(bS_k) = n(wS_k) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$。

證明. 以下利用引理一證明：當邊長為 k，可拆解成 $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ 個 S_2，又 $n(S_2) = 1$，故

$$n(bS_k) = n(wS_k) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \text{。}$$

$\square$

2. 若 k 為奇數，所組成的黑白棋盤有兩種，一為黑格多白格少（黑格為偶格），即為 bS_k；另一為黑格少白格多（黑格為奇格），即為 wS_k。
   (a) $n(bS_k)$

   $\boxed{\text{定理二}}$ 當 $k = 3, 5$ 時，$n(bS_k)$ 無解。

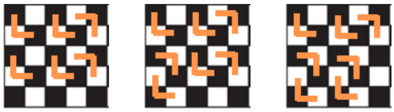
   $n(bS_3)$ **證明.**
   第一步覆蓋 $(1,1)(2,1)(2,2)$，會發現第二步只剩下一種蓋法 $(1,2)(1,3)(2,3)$，此時最下面會剩下一個 1×3 的矩形無法覆蓋，因此可知此種蓋法無解。接著改變蓋法，第一步先覆蓋 $(1,1)(1,2)(2,2)$，一樣只剩 $(2,1)(3,1)(3,2)$ 可以覆蓋，此時最右邊會剩下一個 1×3 的矩形無法覆蓋，因此也可得出此種蓋法無解。依此類推，可確定 $n(bS_3)$ 無解。

   $\square$

   $n(bS_5)$ **證明.**
   第一種蓋法：假設按照順序往下蓋，會發現最後會剩下 1×5 的矩形，而設定的角形形狀無法在這樣的情況下覆蓋，因此這種蓋法無解。
   第二種蓋法：因為第一種無解，因此改變蓋法，留下 $(4,1)$，讓原本覆蓋 $(3,1)(4,1)(4,2)$ 的角形變成覆蓋 $(3,1)(3,2)(4,2)$，這樣就可以覆蓋 $(4,1)(5,1)$ $(5,2)$，但是依舊會剩下 1×3 無法覆蓋，所以可知這種情況亦無解。
   第三種蓋法：跟第二種方法類似，只是改成覆蓋 $(3,3)(3,4)(4,4)$ 和 $(4,3)(5,3)$ $(5,4)$，旁邊一樣會剩下 1×3 無法覆蓋，可知這種情況亦無

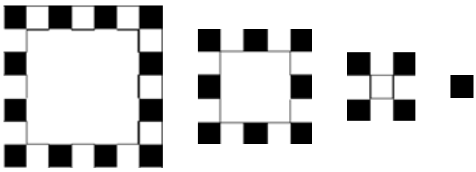
解。綜合上述，會發現不管怎麼蓋，一定會剩下三個格子在同一排，但是按照設定的角形形狀覆蓋無法符合條件，因此可以知道 $n(bS_5)$ 無解。



□

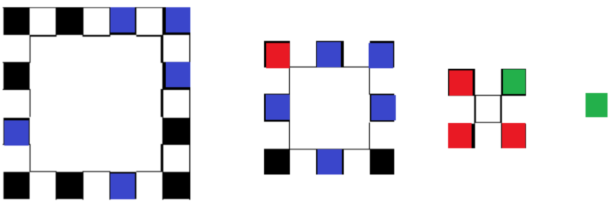
$\boxed{\text{定理三}}$ $n(bS_7) = 16$

證明. 在 bS_7 中總共有 25 格黑色格子，因此可以知道理想狀況中，$n(bS_7) = 13$，但是要在這樣的情況中蓋住所有黑色格子，除了有一個角形只會覆蓋到一個黑格外，其餘的角形都必須一次蓋到兩個黑格。我們將圖形拆成一圈一圈來看，如圖，會發現從最裡面的一格開始，因為最佳理想狀況為一個角形覆蓋到兩個黑格，可以知道角形勢必會跨到兩個不同的方框。



從最裡面的格子開始，需要和第二圈借 1 個黑格；第二圈要和第三圈借 3 個黑格；第三圈要和第四圈借 5 個黑格；而第四圈的總黑格數是 12，所以扣掉被借走的 5 個黑格，亦即 $125 = 7$，剩下 7 個黑格，一定只能一次蓋 1 個，由此可知需要的最少角形數為

$$\frac{\frac{7^2+1}{2}-7}{2}+7=9+7=16 \text{ 。}$$



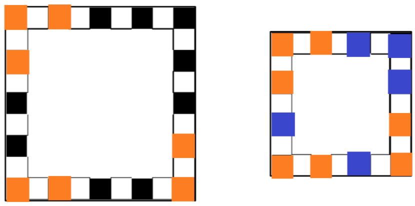
□

$\boxed{\text{定理四}}$ $k \geq 7$ 時，$n(bS_k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$。

證明. 當 $k = 9$ 時，可以將其視為 bS_7 往外再加一圈，而此時原本在 bS_7 最外圈，只能一次一個角形覆蓋的 7 個黑格，可以和 bS_9 最外圈借 7 個

黑格，如圖所示，此時 bS_9 的最外圈剩下 9 個黑格，一定只能一次蓋 1 個，由此可知需要的最少角形數是

$$\frac{\frac{9^2+1}{2}-9}{2}+9=16+9=25 \text{ 。}$$



因此我們可以知道，當邊長為 k 時，最外圈剩下的黑色格數會是 k，可以得到 $n(bS_k)=n(bS_{k2})+k$。

以下用數學歸納法證明：當 $k=9$ 時，$n(bS_9)=\left(\frac{(9+1)}{2}\right)^2=25$，成立。

設 $k=m$ 時（m 為奇數），$n(bS_m)=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2$，成立。

當 $k=m+2$ 時，因為 $n(bS_k)=n(bS_{k2})+k$，代入可得

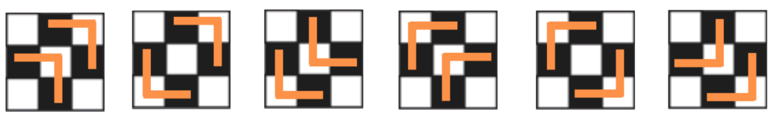
$$n(bS_{m+2})=\left(\frac{m+1}{2}\right)^2+m+2=\frac{m^2-6m+9}{4}=\left(\frac{(m+2)+1}{2}\right)^2$$

故得證。 □

(b) $n(wS_k)$

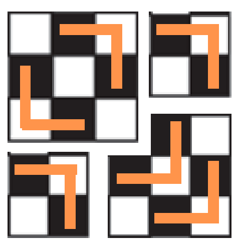
定理五 $n(wS_3)=2$

證明. 當 $k=3$ 時，覆蓋情形如下圖，可知 $n(wS_3)=2$。



□

定理六 當 $k\geq 5$ 時，$n(wS_k)=\frac{k^2-1}{4}$ 。



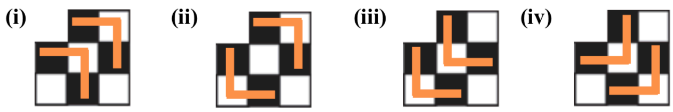
最佳狀況為一個角形覆蓋兩個黑格，即

$$n(wS_k)\geq\frac{k^2-1}{4} \text{ 。}$$

證明. 將 S_5 分為三個部分討論：

(1) 3×3 方格，覆蓋如 S_3 的方式，$n(wS_3) = 2$。

(2) 令右下角 $3 \times 3 - 1$ 的圖形為 P，P 的覆蓋情形，以下 4 種狀況皆成立且皆需兩個角形：



(3) 除 S_3 與 P 之外的剩餘部分為兩塊 $2 \times (k-3)$ 的矩形，此時 k 為奇數，所以 $(k-3)$ 必為偶數，且 $2 \times (k-3)$ 的矩形必可用 $\frac{(k-3)}{2}$ 個角形覆蓋，因此可知此剩餘部分所需角形數為 $\frac{(k-3)}{2} \times 2$。由上述可得 $n(wS_5) = n(wS_3) + 2 + (5-3) = 6$；由此可推得

$$n(wS_k) = n(wS_{k-2}) + 2 + (k-3) = n(wS_{k-2}) + (k-1) \quad ,$$

以下用數學歸納法證明。
當 $k = 5$ 時，$n(wS_5) = \frac{5^2 - 1}{4} = 6$，成立。
設 $k = m$ 時（m 為奇數），$n(wS_m) = m^2 - 1$，成立。
當 $k = m + 2$ 時，因為 $n(wS_k) = n(wS_{k2}) + (k+1)$，代入可得

$$n(wS_{m+2}) = \frac{m^2 - 1}{4} + m + 1 = \frac{m^2 + 4m + 4 - 1}{4} = \frac{(m+2)^2 - 1}{4}$$

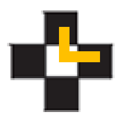
故得證。 □

2.3 探討 $n(G_k)$

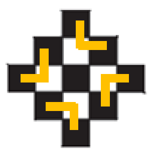
將棋盤做了一些改變，設一總共為 k 列之棋盤，讓每一列的格子數皆為奇數，第一列從 1 格開始，之後的每一列格數以 2 為公差遞增，從第 $\frac{k+1}{2}$ 列之後則以 2 為公差遞減至一個黑格，呈現上下對稱，並且一樣使其黑白格子相間。若第 $\frac{k+1}{2}$ 列的總格子數為 k，則定該棋盤為 G_k，當第一列該格為黑格時，定為 bG_k；當第一列該格為白格時，定為 wG_k，例如：bG_5 即為共五列，第三列（最長列）有五個格子的棋盤且第一列該格為黑格。

1. $n(bG_k)$

   從 $k = 3$ 開始討論，因為 bG_3 總格數為 5 格，而黑色格子總共有 4 格，所需角形最少 2 個，$2 \times 3 = 6 > 5$，因此可以知道 $n(bG_3)$ 必無解。

   當 $k = 5$ 時，總格數為 13 格，黑色格子總共有 9 格，所需角形最少 5 個，$5 \times 3 = 15 > 13$ ，因此也可以知道 $n(bG_5)$ 必無解。

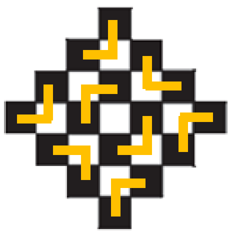
$\boxed{\text{定理七}}$ 當 $k \geq 7$ 時，$n(bG_k) = \left[\dfrac{(k+1)^2+4}{8}\right]^2$。
最佳狀況為一個角形覆蓋兩個黑格，

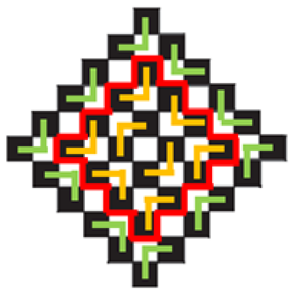
$$n(bG_k) \geq \frac{\left(1+2+\cdots+\dfrac{k+1}{2}\right)\times 2 - \dfrac{k+1}{2}}{2} = \frac{(k+1)^2}{8}$$

證明. bG_7 的覆蓋方式如下左圖，bG_{11} 的覆蓋方式如下右圖，觀察圖形，可以將 bG_{11} 視為 bG_7 再加上外面一圈的格子。將其分為 D、E 兩部分：

(1) D，覆蓋如 bG_7，$n(bG_7) = 8$。

(2) E，框線外每一邊有六個黑格，即 $\dfrac{11+1}{2} = 6$，所需角形數為 $\dfrac{(11+1)/2}{2} = 3$。但因為有重複的黑格，因此有兩邊只需要 $3-1=2$ 個角形，所需總角形數為 $3\times 2 + 2\times 2 = 10$。


bG_7


bG_{11}

由上述可知，當邊長為 k 時，D 部分所需角形數等於 $n(bG_{k-4})$，E 部分所需角形數等於

$$\frac{(k+1)/2}{2}\times 2 + \left(\frac{(k+1)/2}{2} - 1\right)\times 2 = k-1 \text{，}$$

由此可得

$$n(bG_k) = n(bG_{k-4}) + (k-1) \text{。}$$

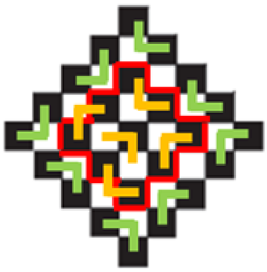
當 $k=7$ 時，$\dfrac{(7+1)^2}{8} = 8$，成立。
設 $k=m$ 時，$n(bG_m) = 8$，成立。
當 $k=m+4$ 時，因為 $n(bG_k) = n(bG_{k-4}) + k - 1$，代入可得

$$n(bG_{m+4}) = \frac{(m+1)^2}{8} + m + 3 = \frac{m^2+10m+25}{8} = \frac{[(m+4)+1]^2}{8} \text{。}$$

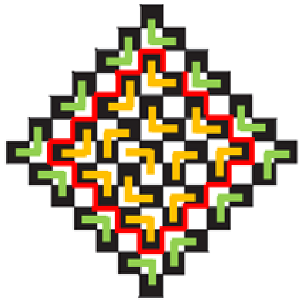
bG_9 的覆蓋方式如下左圖，bG_{13} 的覆蓋方式如下右圖，觀察圖形，可以將 bG_{13} 視為 bG_9 再加上外面一圈的格子。將其分為 D、E 兩部分：

(1) D，覆蓋如 bG_9，$n(bG_9) = 13$。

(2) E，框線外每一邊有七個黑格，如果扣掉重複的部分，每一邊皆為六格，即 $\dfrac{13-1}{2}=6$，所需角形數為 $\dfrac{(13-1)/2}{2}=3$，所需總角形數為 $3\times 4=12$。



bG_9



bG_{13}

由上述可知，當邊長為 k 時，D 部分所需角形數等於 $n(bG_{k-4})$，E 部分所需角形數等於

$$\frac{(k-1)/2}{2}\times 4=k-1\ ，$$

由此可得

$$n(bG_k)=n(bG_{k-4})+(k-1)\ 。$$

當 $k=9$ 時，$\dfrac{(9+1)^2+4}{8}=13$，成立。

設 $k=m$ 時，$n(bG_m)=\dfrac{(m+1)^2+4}{8}$，成立。

當 $k=m+4$ 時，因為 $n(bG_k)=n(bG_{k-4})+k-1$，代入可得

$$\begin{aligned} n(bG_{m+4}) &= \frac{(m+1)^2+4}{8}+m+3=\frac{m^2+10m+25+4}{8} \\ &= \frac{(m+5)^2+4}{8}=\frac{[(m+4)+1]^2+4}{8} \end{aligned}$$

將上述兩個公式用高斯符號合併可得證。 □

2. $n(wG_k)$

$\boxed{\text{定理八}}$ 當 $k\geq 3$ 時，$n(wG_k)=\left[\dfrac{(k-1)^2+4}{8}\right]$。

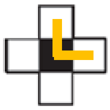
最佳狀況為一個角形覆蓋兩個黑格，

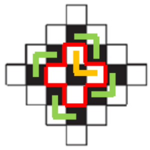
$$n(wG_k)\geq \frac{\left(1+2+\cdots+\dfrac{k-1}{2}\right)\times 2-\dfrac{k-1}{2}}{2}=\frac{(k-1)^2}{8}\ 。$$

證明. wG_3 的覆蓋方式如下左圖，wG_7 的覆蓋方式如下右圖，觀察圖形，可以將 wG_7 視為 wG_3 再加上外面一圈的格子。將其分為 D、E 兩部分：

(1) D，覆蓋如 wG_3，$n(wG_3)=1$。

(2) E，框線外每一邊有三個黑格，即 $\dfrac{7-1}{2}=3$，扣掉重複的部分，每一邊皆為兩格，即 $\dfrac{7-1}{2}-1=2$，所需角形數為 $\dfrac{(7-1)/2-1}{2}=1$，所需總角形數為 $1\times 4=4$。


wG_3


wG_7

由上述可知，當邊長為 k 時，D 部分所需角形數等於 $n(wG_{k-4})$，E 部分所需角形數等於

$$\frac{(k-1)/2-1}{2}\times 4=k-3\text{ ，}$$

由此可得

$$n(wG_k)=n(wG_{k-4})+k-3\text{ 。}$$

當 $k=3$ 時，$\dfrac{(3-1)^2+4}{8}=1$，成立。
設 $k=m$ 時，$n(wG_m)=\dfrac{(m-1)^2+4}{8}$ 成立。
當 $k=m+4$ 時，因為 $n(wG_k)=n(wG_{k-4})+(k-3)$，代入可得

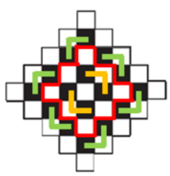
$$\begin{aligned} n(wG_{m+4}) &= \frac{(m-1)^2+4}{8}+m+1=\frac{m^2+6m+9+4}{8} \\ &= \frac{(m+3)^2+4}{8}=\frac{[(m+1)-1]^2+4}{8}\text{ 。} \end{aligned}$$

wG_5 的覆蓋方式如下左圖，wG_9 的覆蓋方式如下右圖，觀察圖形，可以將 wG_9 視為 wG_5 再加上外面一圈的格子。將其分為 D、E 兩部分：

(a) D，覆蓋如 wG_5，$n(wG_5)=2$。

(b) E，框線外每一邊有 4 個黑格，即 $\dfrac{9+1}{2}-1=4$，所需角形數為 $\dfrac{(9+1)/2-1}{2}=2$，但因為會有重複的黑格，因此有兩邊只需要 $2-1=1$ 個角形，所需總角形數為 $2\times 2+1\times 2=6$。


wG_3


wG_7

由上述可知，當邊長為 k 時，D 部分所需角形數等於 $n(wG_{k-4})$，E 部分所需角形數等於

$$\frac{(k+1)/2-1}{2}\times 2+\left(\frac{(k+1)/2-1}{2}-1\right)\times 2=k-3\ ，$$

可得

$$n(wG_k)=n(wG_{k-4})+(k-3)\ 。$$

當 $k=5$ 時，$\dfrac{(5-1)^2}{8}=2$，成立。
設 $k=m$ 時，$n(wG_m)=\dfrac{(m-1)^2}{8}$ 成立。
當 $k=m+4$ 時，因為 $n(wG_k)=n(wG_{k-4})+(k-3)$，代入可得

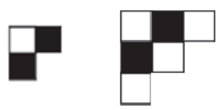
$$\begin{aligned} n(wG_{m+4}) &= \frac{(m-1)^2}{8}+m+1=\frac{m^2+6m+9}{8} \\ &= \frac{(m+3)^2}{8}=\frac{[(m+4)-1]^2}{8} \end{aligned}$$

將上述兩個公式用高斯符號合併可得證。 □

2.4 探討 $n(S_k)$、$n(G_k)$、$n(H_q)$ 的關係式

設第一列有 q 格，之後每列格數以 1 為公差遞減至一格，使其黑白相間，定義其為棋盤 H_q。當兩邊最長列相交之該格為黑色時定為 bH_q；白色時定為 wH_q。由圖可以發現，若將 G_k 四角各加上一個 H_q 棋盤可以拼成 S_k，因此接下來，先證明 $n(H_q)$ 的一般式。

1. wH_q

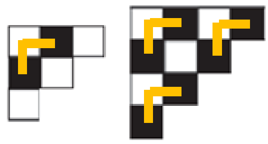


定理九 $n(wH_q)=\sum_{i=1}^{[q/2]} i$。
最佳狀況最佳狀況為一個角形覆蓋兩個黑格，

$$\begin{aligned} n(wH_q) &\geq \frac{2+4+\cdots+q\ (q\text{ 為偶數})}{2}\geq\frac{2+4+\cdots+(q-1)\ (q\text{ 為奇數})}{2} \\ &= \sum_{i=1}^{[q/2]} i\ 。\end{aligned}$$

證明. 因為 H_{2q+1} 是 H_{2q} 棋盤的每一列各再加上一個白格，如上圖，因此可得 $n(wH_{2q+1})=n(wH_{2q})$，以下只就 q 為偶數的狀況做數學歸納法的證明。
當 $q=2$ 時，可得唯一一種覆蓋方式如右圖。

當 $q=4$ 時，將 H_4 視為 H_3 各列分別加上一個黑格，而因為 H_3 中，$(3,1)$、$(1,3)$ 皆為白格且未被覆蓋，因此可以用一個角形覆蓋 $(4,1)$、$(3,1)$、$(3,2)$，一個角形覆蓋 $(2,3)$、$(1,3)$、$(1,4)$。由此得知 H_4 時，黑色格數會比 H_3 多 4 個，所需角形數會多 $\dfrac{4}{2}=2$ 個，又因為 H_2 和 H_3 之間的格數差皆為白格，因此 H_4 亦會比 H_2 多 4 個黑格；推到邊長為 q 時，可知 H_{q+2} 的黑色格數會比 H_q 多 $q+2$ 個，所需角形數會多 $\dfrac{q+2}{2}$ 個，即 $n(wH_{q+2})=n(wH_q)+\dfrac{q+2}{2}$。



當 $q=2$ 時，$n(wH_2)=1$ 成立。

設 $q=m$ 時，原式 $n(wH_m)=\sum_{i=1}^{[m/2]} i$ 成立。

當 $q=m+2$ 時，

$$n(wH_{m+2})=n(wH_m)+\left[\frac{m+2}{2}\right]=\sum_{i=1}^{[m/2]} i+\left[\frac{m+2}{2}\right]$$

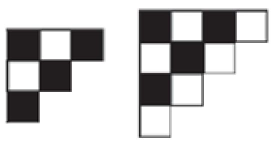
$$=1+2+3+\cdots+\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m+2}{2}\right]=\sum_{i=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} i$$

故得證。

$\square$

2. bH_q

定理十 $n(bH_q)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} i$。

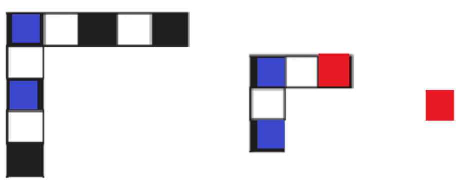


證明.

當 $q=3$ 時，由圖可以發現覆蓋方式只有一種，$n(bH_3)=6$。

當 $q=5$ 時，如同證明 bS_k，將其分成一個一個如 L 的形狀。覆蓋的過程，內圈一樣要向外圈借該圈的黑格格數，因此可以知道在 $q=5$ 時，最外圈所剩黑格數為 3，

$$n(bH_5)=\frac{\dfrac{(1+5)\times\dfrac{5+1}{2}}{2}-\dfrac{5+1}{2}}{2}+\frac{5+1}{2}=6\ 。$$



因為 $n(bH_{2q})=n(bH_{2q1})$，由此可知，當邊長為 q（q 為偶數）時，最外圈剩下的黑色格數會是 $\frac{q}{2}$，可以得到

$$n(bH_{2q})=n(bH_{2q-2})+\frac{q}{2}\ 。$$

當 $q=6$ 時，$n(bH_6)=\sum_{i=1}^{[(6+1)/2]} i=6=n(bH_5)$ 成立。
設 $q=m$（m 為偶數）時，原式 $n(bH_m)=\sum_{i=1}^{[(m+1)/2]} i$ 成立。
當 $q=m+2$ 時，

$$\begin{aligned}
n(bH_{m+2}) &= n(bH_m)+\left[\frac{m+2}{2}\right]=\sum_{i=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} i+\left[\frac{m+2}{2}\right] \\
&= 1+2+3+\cdots+\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{m+2}{2}\right]=\sum_{i=1}^{\left[\frac{m+2}{2}\right]} i=\sum_{i=1}^{\left[\frac{(m+2)+1}{2}\right]} i
\end{aligned}$$

故得證。 □

定理十一
$$\begin{aligned}
& n(wH_q)\times 4+n(bG_k)=n(wS_k)\ ， && k\equiv 3 \mod 4\ \&\ k\geq 7 \\
& n(wH_q)\times 4+n(wG_k)=n(wS_k)\ ， && k\equiv 1 \mod 4\ \&\ k\geq 5 \\
& n(bH_q)\times 4+n(bG_k)=n(bS_k)\ ， && k\equiv 1 \mod 4\ \&\ k\geq 9
\end{aligned}$$
，其中 $q=\frac{k-1}{2}$。

證明. 將其一般式相加，
$k\equiv 3 \mod 4$ 且 $k\geq 7$，

$$\left(\sum_{i=1}^{[q/2]} i\right)\cdot 4+\left[\frac{(k+1)^2+4}{8}\right]=\frac{\frac{k-3}{4}\left(1+\frac{k-3}{4}\right)}{2}\cdot 4+\frac{k^2+2k+1}{8}=\frac{k^2-1}{4}\ ；$$

$k\equiv 1 \mod 4$ 且 $k\geq 5$，

$$\left(\sum_{i=1}^{[q/2]} i\right)\cdot 4+\left[\frac{(k-1)^2+4}{8}\right]=\frac{\frac{k-1}{4}\left(1+\frac{k-1}{4}\right)}{2}\cdot 4+\frac{k^2-2k+1}{8}=\frac{k^2-1}{4}\ ；$$

$k\equiv 1 \mod 4$ 且 $k\geq 9$，

$$\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{q+1}{2}\right]} i\right)\cdot 4+\left[\frac{(k+1)^2+4}{8}\right]=\frac{\frac{k-1}{4}\left(1+\frac{k-1}{4}\right)}{2}\cdot 4+\frac{k^2+2k+5}{8}=\left(\frac{k+1}{2}\right)^2\ 。$$

故得證。 □

$\boxed{\text{定理十二}}$ $n(bH_q) \times 4 + n(wG_k) - 1 = n(bS_k)$, $k \equiv 3 \mod 4$ 且 $k \geq 7$。

證明. 將其一般式相加，$k \equiv 3 \mod 4$ 且 $k \geq 7$，

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{[\frac{q+1}{2}]} i\right) \cdot 4 + \left[\frac{(k-1)^2+4}{8}\right] - 1 \\ =& \frac{\frac{k+1}{4} + \left(1 + \frac{k+1}{4}\right)}{2} \cdot 4 + \frac{k^2-2k+5}{8} - 1 = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2\end{aligned}$$

故得證。 □

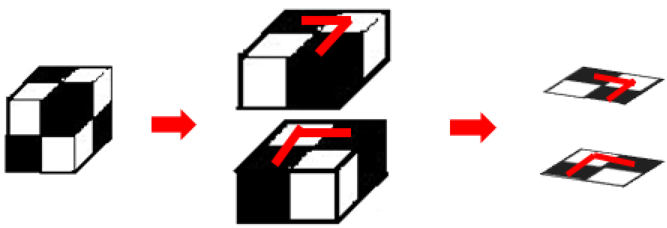
2.5 探討 $n(T_k)$

將 S_k 擴展成立體圖形 T_k。

1. 偶數

   當邊長為偶數時，可以知道偶數在平面的狀況下必定有最小解，因此也可以得出立體亦必有最小解，而其解即為 $n(S_k) \times k$，以下用與平面相同的方法證明。

   $\boxed{\text{引理二}}$ 當 $k = 2$ 時，$n(bT_2) = n(wT_2) = 2$。
   可由下圖求得。



   $\boxed{\text{定理十三}}$ $n(bT_k) = n(wT_k) = \dfrac{k^3}{4}$。

   證明. 當邊長為 k 時，可以拆解成 $\left(\frac{k}{2}\right)^3$ 個 T_2，又 $n(T_2) = 2$，故可得

$$n(bT_k) = n(wT_k) = \left(\frac{k}{2}\right)^3 \times 2 = \frac{k^3}{4}\ 。$$

□

2. 奇數

$\boxed{\text{猜想}}$ $n(wT_k) = \dfrac{k^3+k-6}{4}$。

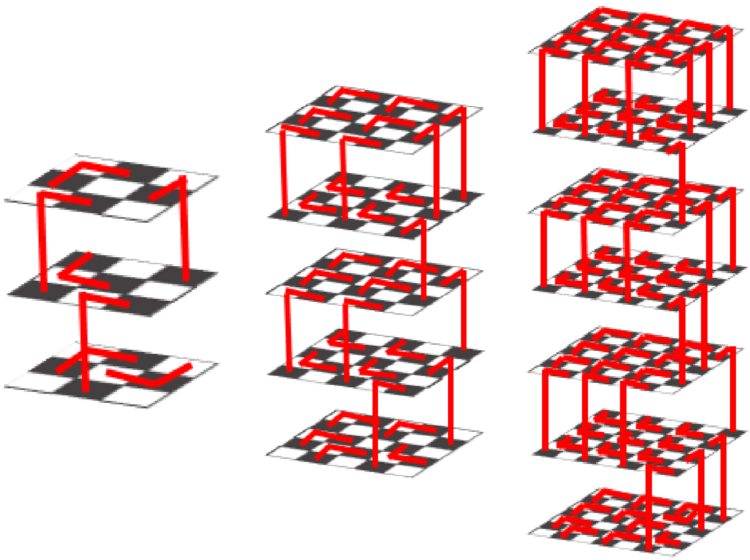
根據畫出的 wT_3、wT_5、wT_7，初步猜測公式為

$$n(wT_k) = \left[\frac{k^3+1}{4}\right] \text{。}$$

證明. 當 $k = 3$ 時，覆蓋情形如下右圖，在平面中，求出 3×3 無解，但在立體中，因為可以跟上下借方格，因此在邊長為 3 時即有解，並可得 $n(wT_3) = 7$。

當 $k = 5$ 時，覆蓋情形如下中圖，可得 $n(wT_5) = 31$。

當 $k = 7$ 時，覆蓋情形如下左圖，可得 $n(wT_7) = 86$。



但是在 $k = 9$ 和 $k = 11$ 時，卻發現得出的角形數比我們推測的公式多 1；$k = 13$ 和 $k = 15$ 時，得出的角形數比我們推測的公式多 2。為了找出角形多出的原因，我們將立體的各層角形數分別計算後發現，當邊常為 k 時，除了最底層之外的 $k-1$ 層棋盤所需角形數為

$$\frac{k-1}{2} \times \frac{k^2+1}{2} \text{，}$$

因此可以知道影響 $n(wT_k)$ 的為最底層，將它稱為第 k 層。觀察上方立體圖形，將奇數分為 3、7、11、$\cdots$ 一組，5、9、13、$\cdots$ 一組；由於 $n(wT_9)$ 多 1，因此猜測後組的角形數偏移量為 $(5,0)$、$(9,1)$、$(13,2)$，依此類推；而前組發現 $n(wT_{11})$ 多 1，因此猜測前組的角形數偏移量為 $(7,0)$、$(11,1)$、$(15,2)$，而 wT_3 因無法對應，這可能也是帶進公式無法成立的原因，因此這裡暫不討論。

當 $k = 5$ 時，第五層所需角形數為 5；
當 $k = 7$ 時，第七層所需角形數為 11；
當 $k = 9$ 時，第九層所需角形數為 19；
當 $k = 11$ 時，第十一層所需角形數為 29；
之後發現 5、11、19、29 有 $n^2 - n - 1$ 的規律，整理後可得，
$n = 3$ 時，$32 - 3 - 1 = 5$；
$n = 4$ 時，$42 - 4 - 1 = 11$；
$n = 5$ 時，$52 - 5 - 1 = 19$；
$n = 6$ 時，$62 - 6 - 1 = 29$；
且 $n = 2k + 1$，帶入後得第 k 層所需角形數為 $\dfrac{k^2 - 5}{4}$，將此式與上述 $k1$ 層棋盤所需角形數 $\dfrac{k-1}{2} \times \dfrac{k^2+1}{2}$ 相加可得，當 $k \geq 5$ 時，

$$n(wT_k) = \frac{k^3 + k - 6}{4} \quad ,$$

與猜想符合。 □

3 結論 (Summary and Conclusions)

	S_k		G_k	
	$n(bS_k)$	$n(wS_k)$	$n(bG_k)$	$n(wG_k)$
k 為偶數	$\left(\dfrac{k}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{k}{2}\right)^2$		
k 為奇數	當 $k \geq 7$ 時，$\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^2$	當 $k \geq 3$ 時，$\dfrac{k^2-1}{4}$	當 $k \geq 7$ 時，$\dfrac{(k+1)^2+4}{8}$	當 $k \geq 3$ 時，$\dfrac{(k-1)^2+4}{8}$

	T_k		H_q	
	$n(bT_k)$	$n(wT_k)$	$n(bH_q)$	$n(wT_q)$
k 為偶數	$\dfrac{k^3}{4}$	$\dfrac{k^3}{4}$	$\displaystyle\sum_{a=1}^{[(q+1)/2]} a$ $q \geq 2,\ q \in \mathbb{N}$	$\displaystyle\sum_{a=1}^{[q/2]} a$ $q \geq 2,\ q \in \mathbb{N}$
k 為奇數	未找出規律公式	當 $k \geq 5$ 時，$\dfrac{k^3+k-6}{4}$		

1. S_k 中，邊長分為偶數和奇數，偶數的黑白格數相同，$n(bS_k) = n(wS_k) = \left(\frac{k}{2}\right)^2$；奇數部分按照偶格的顏色分為 bS_k 和 wS_k 兩種棋盤。可以得出，在 bS_k 中，有解的狀況下為 $k \geq 7$，$n(bS_k) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2$；在 wS_k 中，當 $k \geq 3$ 時，$n(wS_k) = \frac{k^2-1}{4}$。
2. 在 G_k 中，按照第一列唯一一格的顏色，黑格稱之為 bG_k，白格稱之為 wG_k，此棋盤中所有邊長皆為奇數。在 bG_k 中，當 $k \geq 7$ 時，$n(bG_k) = \frac{(k+1)^2+4}{8}$；在 wG_k 中，當 $k \geq 3$ 時，$n(wG_k) = \frac{(k-1)^2+4}{8}$。
3. 在 H_q 中，按照第一列第一格的顏色，黑格稱之為 bH_q，白格稱之為 wH_q，得解為 $n(bH_q) = \sum_{a=1}^{[(q+1)/2]} a$；$n(wH_q) = \sum_{a=1}^{[q/2]} a$。由此得出第一種關係式，

$$\begin{aligned} n(wH_q) \times 4 + n(bG_k) = n(wS_k) &\text{ ，} k \equiv 3 \mod 4 \ \& \ k \geq 7 \\ n(wH_q) \times 4 + n(wG_k) = n(wS_k) &\text{ ，} k \equiv 1 \mod 4 \ \& \ k \geq 5 \text{ ，其中 } q = \frac{k-1}{2}\text{；} \\ n(bH_q) \times 4 + n(bG_k) = n(bS_k) &\text{ ，} k \equiv 1 \mod 4 \ \& \ k \geq 9 \end{aligned}$$

   以及第二種

$$n(bH_q) \times 4 + n(wG_k) - 1 = n(bS_k) \text{ ，} k \equiv 3 \mod 4 \ \& \ k \geq 7 \text{ 。}$$

4. 在 T_k 中，與平面類似，邊長分為偶數和奇數，偶數的黑白格數相同，因此 $n(bT_k) = n(wT_k) = \frac{k^3}{4}$，奇數部分按照最上面那層在平面時的偶格顏色分為 bT_k 和 wT_k 兩種棋盤。在 wT_k 中，猜測當 $k \geq 5$ 時，$n(wT_k) = \frac{k^3+k-6}{4}$；而 $n(bT_k)$ 部分還未求出規律公式，希望以後可以再深入研究。

參考文獻 (Reference)

[1] 陳祐宇、黃梵書、戴培倫，《再論 L 型覆蓋》

[2] 馮躍峰，《棋盤的 $5L$ 形覆蓋》

[3] 游森棚，《蓋好不蓋滿》，科學研習月刊第 56 卷第 7 期