

以矩陣對角化探討機率與平均回合數之通式

新北市立北大高級中學 林冠璋
指導老師 黃冠閔

Abstract

In this paper, we use computer programming C to simulate a famous probability problem “gambler’s ruin problem”. After lots of tests, we record two players’ winning probabilities and average number of rounds to figure out mathematical principles behind the problems and derive general formulas for two values above.

In this study, we have three main subjects. First of all, we design programming C to simulate problems and observe the figures. Secondly, we generalize our problems and derive general formulas and use computer computing to verify our derivated formulas. The last part is that we add a new rule for draw, and derive new general formulas for two values.

中文摘要

本研究藉助電腦程式的運算來模擬一道有名的機率數學題「賭徒破產問題」(gambler’s ruin problem)，透過多次的實驗測試，紀錄了兩個玩家個別贏之機率與平均回合數，觀察其兩種數據，探究其背後隱藏的數學原理，推導與驗證其兩數值之一般通式。

本文分成三大主軸進行研究，第一部份為設計電腦程式來模擬此問題，並觀察其實驗數據的變化；第二部份則是將問題延伸至一般的情況，進而推導出其一般通式，最後利用電腦運算的協助來驗證其所推導出的通式之準確性，第三部份則是推廣具有平局的規則，並推導出其一般通式。

1 研究動機

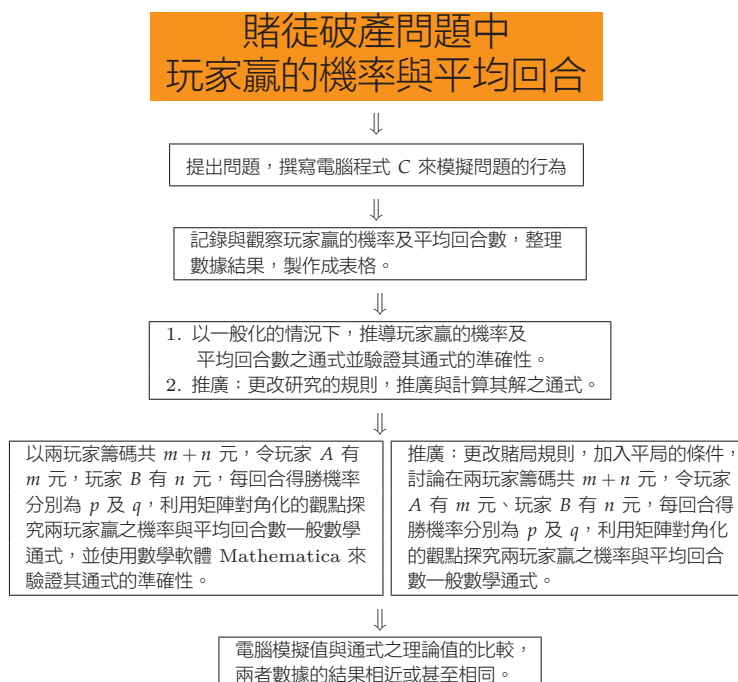
我偶然在數學傳播季刊中看到一篇有趣的文章「電腦模擬與賭局」，其內容描述在公平的賭局中（即兩玩家得勝之機率皆為 $1/2$ ），結合電腦程式語言 Python 的運算，分別探究一場賭局中兩玩家贏的機率之通式（ $\frac{m}{m+n}$ 與 $\frac{n}{m+n}$ ）與平均回合數之通式（ $m \times n$ ），其中 m 與 n 分別為兩玩家的籌碼數；在此我好奇如果這是一個不公平的賭局，兩數值之通式為何？因此我重新撰寫程式語言 C 來模擬不公平的賭局，透過觀察實驗的數據，進而開始研究此問題，嘗試利用高中程度所能理解的矩陣運算來推導其兩數值之通式。探究問題如下：

1. 探究兩位玩家籌碼分別有 m 元與 n 元且每回合得勝之機率分別為 p 與 q 之情況下，其中 $p + q = 1$, $p \neq q$ （即不公平），推導出賭局中兩玩家個別贏之機率與平均回合數之一般通式。

- 推廣與更改賭局問題之條件：加入平局，延伸矩陣對角化之應用，推導出解的一般通式。

2 研究方法及過程

2.1 研究架構圖



2.2 名詞定義

- 破產：玩家的籌碼歸零。
- $A_k(i)$ ：玩家 A 在經過了 k 回合後，持有 i 元的機率。

2.3 研究過程

2.3.1 賭徒破產問題 (gamblers ruin problem)

兩玩家 A 與 B 輪擲一不公平銅板，此銅板出現正面之機率為 p ($0 < p < 1$)，反面的機率為 q ，其中 $p + q = 1$ ， $p \neq q$ ，每回合皆以擲硬幣的方式來決定勝利。若為正面，則玩家 A 獲勝；若為反面，則玩家 B 獲勝，每回合中失敗的一方必須給獲勝的一方一塊錢，不斷重複進行直到有一方破產。今玩家 A 有 m 元，玩家 B 有 n 元，則玩家 A 贏（即玩家 B 破產）之機率為何？平均需要幾回合賭局才會結束？

2.3.2 撰寫電腦程式語言 C 模擬賭徒破產問題（以 $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ 為例）

我利用程式語言 C 撰寫賭徒破產問題，以下為程式流程圖（如圖 1）：

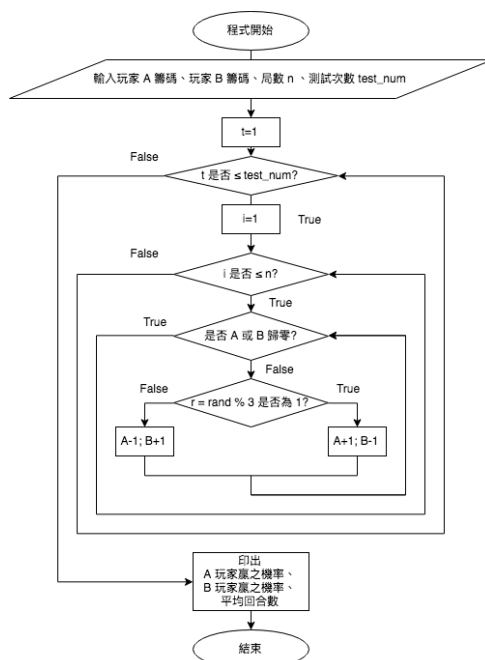


圖 1 賭徒破產問題之程式流程圖

在程式碼中（詳細的程式碼，請參考附錄），一開始讓使用者可以輸入四種數據分別為玩家 A 的籌碼、玩家 B 的籌碼、模擬的局數與測試次數等（如圖 2）。

```

printf("<<gambler's ruin problem>>\n\n");
printf("~~~~~\n");
printf("遊戲規則:\n玩至其中一玩家破產(即籌碼歸零)\n");
printf("有一方破產定義為一局\n");
printf("~~~~~\n\n");
printf("請輸入玩家A的籌碼:");
scanf("%i", &x);
printf("請輸入玩家B的籌碼:");
scanf("%i", &y);
printf("請輸入模擬的局數:");
scanf("%i", &n);
printf("請輸入測試次數:");
scanf("%i", &test_num);

```

圖 2 使用者可以輸入數據的程式碼

程式運行中，當測試次數（變數 t ）模擬的局數（變數 n ）尚未達到最大值時，主要是使用已經宣告好的變數 a （即玩家 A 的籌碼）與變數 b （即玩家 B 的籌碼）來當是否繼續執行程式的依據，其中 $\text{rand}()\%3$ 的值可能為 0、1 與 2，若值等於 1，則玩家 A 獲得 1 元，玩家 B 失去 1 元；若值為 0 或 2 時，則反之，其實就是在模擬機率分別為 $1/3$ 與 $2/3$ 之情況，用變數 round 來存取回合數（如圖 3）。每

一局中，當經過數回合後，有一玩家的籌碼歸零時賭局就會結束，此時會利用變數 ga 與 gb 分別來存取 A 贏的總局數與 B 贏的總局數，再分別利用陣列 A 、 B 與 R 來存取 ga 、 gb 與 $round$ (如圖 4)，最後計算 100 次測試後的兩玩家贏的機率與平均回合數之平均值。

```

r=rand()%3;
if(r==1)
{
    a=a+1;
    b=b-1;
}
else
{
    a=a-1;
    b=b+1;
}
round++;

```

圖 3 判別兩玩家的籌碼之程式碼

```

if(a==0)
{
    gb=gb+1;
}
else
{
    ga=ga+1;
}
A[t]=ga;
B[t]=gb;
R[t]=round;

```

圖 4 紀錄兩玩家贏的局數之程式碼

這裡我舉一個例子，設定兩玩家的籌碼總和為 8 元，測試次數為 100 次，每次測試中，模擬的局數為 1,000,000 局，程式碼會將每次結果之 A 贏的機率、玩家 B 贏的機率與平均回合數顯示結果於電腦銀幕上並將前 10、20...100 次等平均之結果寫入文字 TXT 檔中 (如圖 5)。

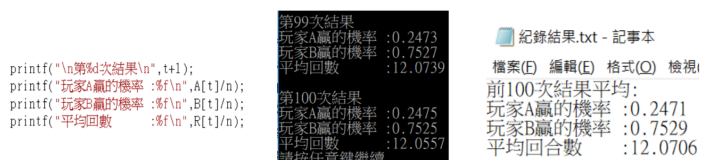


圖 5 顯示結果於電腦銀幕上的程式碼與跑出的結果、寫入文字 TXT 檔之示意圖

我嘗試代入以下的籌碼數，機率與平均回合數皆為前 100 次的平均值，整理如下：

玩家 A 的籌碼	1	2	3	4	5	6	7
玩家 B 的籌碼	7	6	5	4	3	2	1
玩家 A 贏的機率	0.0039	0.0118	0.0275	0.0588	0.1215	0.2471	0.4980
玩家 B 贏的機率	0.9961	0.9882	0.9725	0.9412	0.8785	0.7529	0.5020
平均回合數	2.9064	5.7183	8.3414	10.5884	12.0833	12.0706	9.0470

接著以下的研究，我會將探討的問題延伸至一般的情況。

2.3.3 探究兩玩家個別贏之機率與平均回合數之一般通式

在此賭局中兩人每回合輪擲一不公正銅板，出現正面之機率為 p ，反面之機率為 q ，其中 $p + q = 1$ ， $p \neq q$ (即不公平)，令玩家 A 與 B 一開始分別有 m 元與 n 元，其中 $1 \leq m, n \leq m + n - 1$ ；若出現正面，玩家 B 給玩家 A 一元；出現反面，

則反之，直到某一方破產為止，以下討論將推導玩家個別贏的機率與平均回合數之通式。

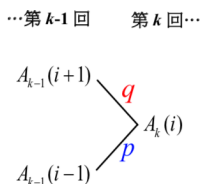
首先先來探討玩家 A 贏的機率，我先定義 $A_k(i)$ 為經過 k 回合後，其中 $i, k \in \mathbb{N}$ ，玩家 A 有 i 元的機率，若玩家 A 一開始就有 m 元，則定義初始條件 $A(m) = 1$ ， $A(i) = 0$ ， $i \neq m$ ，賭局中經過數 k 回合後，如果玩家 A 持有的籌碼為 $m + n - 1$ 元，再一回合後變成 $m + n$ 元的機率為 p ，即賭局就會結束，因此可以將玩家 A 贏的機率列式如下：

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k(m + n - 1) \cdot p \quad (\text{式 1})$$

接著來探討平均回合數，事實上如果玩家 A 持有 1 元或 $m + n - 1$ 元時，再一回合後變成 0 元或 $m + n$ 的機率分別為 q 與 p ，即在這兩種情況下賭局就會結束，因此根據期望值的定義，可得到平均回合數之列式如下：

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) \cdot q \cdot A_k(1) + \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1) \cdot p \cdot A_k(m + n - 1) \quad (\text{式 2})$$

接下來為了得到 (式 1) 與 (式 2) 中 $A_k(1)$ 與 $A_k(m + n - 1)$ 之值，先利用簡單的二元樹狀圖之概念來觀察 $A_k(i)$ 之間的關係如下：



可推得當 $k \in \mathbb{N}$ ， $A_k(i)$ 之遞迴關係式並將之列式如下：

$$\begin{cases} A_k(1) = q \cdot A_{k-1}(2), \\ A_k(i) = p \cdot A_{k-1}(i - 1) + q \cdot A_{k-1}(i + 1), \quad i = 2, 3, \dots, m + n - 2 \\ A_k(m + n - 1) = p \cdot A_{k-1}(m + n - 2) \end{cases}$$

再來利用矩陣，將 $A_k(i)$ 之遞迴關係式，寫成一個 $m + n - 1$ 階方陣 P ，運算形式如下：

$$\begin{bmatrix} A_k(1) \\ \vdots \\ A_k(m) \\ \vdots \\ A_k(m + n - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & q & & & \\ p & 0 & q & & \\ & p & 0 & q & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & p & 0 & q \\ & & & & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{k-1}(1) \\ \vdots \\ A_{k-1}(m) \\ \vdots \\ A_{k-1}(m + n - 1) \end{bmatrix}$$

初始條件為

$$\begin{bmatrix} A_0(1) \\ \vdots \\ A_0(m) \\ \vdots \\ A_0(m+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

將上式進行遞迴疊代 k 次後可以得

$$\begin{bmatrix} A_k(1) \\ \vdots \\ A_k(m) \\ \vdots \\ A_k(m+n-1) \end{bmatrix} = P^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{式 3})$$

在 (式 3) 中，引入大學線性代數之矩陣對角化之觀念，將此方陣 P 先進行矩陣對角化，設方陣 P 之任一個非零特徵向量為 $(m+n-1) \times 1$ 的矩陣如下：

$$u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m+n-1} \end{bmatrix}$$

先令 λ 為方陣 P 的特徵值，考慮展開一式如下：

$$(P - \lambda I_{m+n-1}) u = 0$$

其中 I_{m+n-1} 為 $m+n-1$ 階單位方陣， 0 為 $(m+n-1) \times 1$ 的零矩陣，上式乘開後，比較等式的左右兩邊，可得遞迴關係式如下：

$$px_{t-1} + (0 - \lambda)x_t + qx_{t+1} = 0, \quad t = 1, 2, \dots, m+n-1 \text{ 且 } x_0 = x_{m+n} = 0 \text{。}$$

將上式進行化簡，可得 $m+n-1$ 個二階齊次線性遞迴方程式如下：

$$x_{t+1} + \frac{-\lambda}{q}x_t + \frac{p}{q}x_{t-1} = 0, \quad t = 1, 2, 3, \dots, m+n-1 \text{ 且 } x_0 = x_{m+n} = 0 \text{。} \quad (\text{式 4})$$

接下來透過裂項的方式，可先將 (式 4) 變形成為

$$x_{t+1} - r_1 \cdot x_t = r_2(x_t - r_1 \cdot x_{t-1}), \quad t = 1, 2, 3, \dots, m+n-1 \text{ 且 } x_0 = x_{m+n} = 0 \text{。} \quad (\text{式 5})$$

其中 r_1 與 r_2 為常數，整理 (式 5) 並與 (式 4) 做係數比較可得

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = \frac{\lambda}{q} , \\ r_1 \cdot r_2 = \frac{p}{q} . \end{cases}$$

由根與係數關係得知 r_1 和 r_2 為二次方程式之兩根如下：

$$r^2 + \frac{-\lambda}{q}r + \frac{p}{q} = 0 . \quad (\text{式 6})$$

而 (式 6) 即為 (式 4) 的特徵方程式。

若 (式 6) 發生重根，即 $r_1 = r_2$ ，則 (式 4) 的解為 $x_t = c_1 r_1^t + c_2 \cdot t \cdot r_1^t$ ， $t = 1, 2, \dots, m+n-1$ ，也就是說特徵向量 u 為零向量，這與特徵向量不得為零相互矛盾，故推得 $r_1 \neq r_2$ ，因此 (式 4) 的解為 $x_t = c_1 r_1^t + c_2 r_2^t$ ，由已知條件 $x_0 = x_{m+n} = 0$ 代入 x_t 可得

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 , \\ c_1 r_1^{m+n} + c_2 r_2^{m+n} = 0 . \end{cases} \quad (\text{式 7})$$

由 (式 7) 解出 $\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{m+n} = -\frac{c_2}{c_1} = 1$ ，令 $z = \frac{r_1}{r_2}$ ，即解

$$z^{m+n} = 1 . \quad (\text{式 8})$$

先由代數基本定理與因式定理可知 (式 8) 恰有 $m+n$ 個複數根，再應用棣美弗定理，計算複數根推導如下：

設 $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ 為 1 的 $m+n$ 次方根，其中 $i = \sqrt{-1}$ ， R 為實數，且 $0 \leq \theta \leq \pi$ ，因為 $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ ，所以

$$z^{m+n} = R^{m+n} [\cos(m+n)\theta + i \sin(m+n)\theta] = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0) \quad (\text{式 9})$$

由 (式 9) 推得兩複數相等，其向徑相等且輻角同界，所以可得

$$\begin{cases} R^{m+n} = 1 , \\ (m+n)\theta = 0 + 2j\pi , \quad j = 0, 1, \dots, m+n-1 , \end{cases}$$

即解出 $R = 1$ ， $\theta = \frac{2j\pi}{m+n}$ ，因此我可以把 (式 8) 的所有複數根寫成

$$z = \cos \frac{2j\pi}{m+n} + i \sin \frac{2j\pi}{m+n} , \quad i = \sqrt{-1} , \quad j = 0, 1, \dots, m+n-1 . \quad (\text{式 10})$$

將 $z = \frac{r_1}{r_2}$ 代回 (式 10) 移項整理，化簡為

$$r_1 = r_2 \left(\cos \frac{2j\pi}{m+n} + i \sin \frac{2j\pi}{m+n} \right), \quad i = \sqrt{-1}, \quad j = 0, 1, \dots, m+n-1, \quad (\text{式 11})$$

其中 $j = 0$ 不合，因為 $r_1 \neq r_2$ 。由 (式 6) 之根與係數關係 $r_1 \cdot r_2 = \frac{p}{q}$ 代入 (式 11)，解得

$$r_1 = \sqrt{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{j\pi}{m+n} + i \sin \frac{j\pi}{m+n} \right), \quad r_2 = \sqrt{\frac{p}{q}} \left(\cos \frac{j\pi}{m+n} - i \sin \frac{j\pi}{m+n} \right),$$

再將 r_1 與 r_2 之值代入 (式 6) 之根與係數關係 $r_1 + r_2 = \frac{\lambda}{q}$ ，解得

$$\lambda = q(r_1 + r_2) = 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}, \quad j = 1, 2, \dots, m+n-1. \quad (\text{式 12})$$

(式 12) 給出 $m+n-1$ 個特徵根 λ_j ，其中 $j = 1, 2, \dots, m+n-1$ 。接下來再由 (式 7) 之第一式 $c_1 + c_2 = 0$ 、 r_1 與 r_2 之值代入 x_t ，整理可得

$$x_r = c_1(r_1^t - r_2^t) = 2ic_1 \left(\frac{p}{q} \right)^{t/2} \sin \frac{jt\pi}{m+n}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad t = 1, 2, \dots, m+n-1. \quad (\text{式 13})$$

這裡取 $c_1 = \frac{1}{2i}$ 代入 (式 13) 化簡，即可求得對應特徵根 λ_j 的特徵向量 u_j 之第 t 個元素 x_t ，整理計算後對應的 $m+n-1$ 個特徵向量 u_j 便為

$$u_j = \begin{bmatrix} \left(\frac{p}{q} \right)^{1/2} \sin \frac{j\pi}{m+n} \\ \left(\frac{p}{q} \right)^{2/2} \sin \frac{2j\pi}{m+n} \\ \vdots \\ \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \end{bmatrix}, \quad \text{其中 } j = 1, 2, \dots, m+n-1.$$

接著將這 $m+n-1$ 個特徵向量組成一 $m+n-1$ 階方陣 U 如下：

$$U = \begin{bmatrix} \left(\frac{p}{q} \right)^{1/2} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \left(\frac{p}{q} \right)^{1/2} \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \left(\frac{p}{q} \right)^{1/2} \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \left(\frac{p}{q} \right)^{2/2} \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \left(\frac{p}{q} \right)^{2/2} \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \left(\frac{p}{q} \right)^{2/2} \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} \end{bmatrix}$$

然後發現此方陣 U 可整理成如下：

$$U = \begin{bmatrix} \left(\frac{p}{q}\right)^{1/2} & & & \\ & \left(\frac{p}{q}\right)^{2/2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix} \quad (式 14)$$

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1)^2\pi}{m+n} \end{bmatrix}$$

接著利用以下四個步驟 $I \sim IV$ 來求矩陣 U 的反方陣，記為 U^{-1} ，過程如下：

步驟 I： 首先考慮以下矩陣之平方

$$\begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1)^2\pi}{m+n} \end{bmatrix}^2 \quad (式 15)$$

發現其平方後，矩陣內的每一個元素皆可整理成如下：

$$\sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\sin \frac{i \cdot k\pi}{m+n} \right) \left(\sin \frac{k \cdot j\pi}{m+n} \right), \quad 1 \leq i, j \leq m+n-1. \quad (式 16)$$

步驟 II： 為了求得 (式 16) 之值，先證明一個有關三角函數的性質：

$$\sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{\alpha k\pi}{m+n} = \begin{cases} -1, & \text{若 } \alpha \in \mathbb{N} \text{ 為偶數,} \\ 0, & \text{若 } \alpha \in \mathbb{N} \text{ 為奇數.} \end{cases}$$

證明. 利用尤拉公式，考慮一複數 $w = e^{i \frac{\alpha}{m+n} \pi} = \cos \frac{\alpha\pi}{m+n} + i \sin \frac{\alpha\pi}{m+n}$ ，其中 $\alpha \in \mathbb{N}$ ，則

$$w^{m+n} = \left(e^{i \frac{\alpha\pi}{m+n}} \right)^{m+n} = e^{i\alpha\pi} = \cos \alpha\pi + i \sin \alpha\pi = \begin{cases} 1, & \text{若 } \alpha \text{ 為偶數,} \\ -1, & \text{若 } \alpha \text{ 為奇數.} \end{cases}$$

再利用上式的結果，並計算其等比級數可得

$$\sum_{k=0}^{m+n-1} w^k = \frac{1-w^{m+n}}{1-w} = \begin{cases} 0, & \text{若 } \alpha \text{ 為偶數,} \\ \frac{2}{1-w}, & \text{若 } \alpha \text{ 為奇數.} \end{cases}$$

(i) 在 α 為偶數的情況下，取其實部可得到

$$\operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{m+n-1} w^k \right] = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{m+n-1} e^{j \frac{k\alpha\pi}{m+n}} \right] = \sum_{k=0}^{m+n-1} \cos \frac{k\alpha\pi}{m+n} = 0,$$

其中 $\operatorname{Re}[\cdot]$ 是取 $[\cdot]$ 之實部。又因 $w^0 = 1$ 代入上式，故可得 $\sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{k\alpha\pi}{m+n} = -1$ 。

(ii) 在 α 為奇數的情況下，將 $\sum_{k=0}^{m+n-1} w^k = \frac{2}{1-w}$ 之值化簡如下：

$$\begin{aligned} \frac{2}{1-w} &= \frac{2}{1 - \left(\cos \frac{\alpha\pi}{m+n} + i \sin \frac{\alpha\pi}{m+n} \right)} = \frac{2}{\left(1 - \cos \frac{\alpha\pi}{m+n} \right) - i \sin \frac{\alpha\pi}{m+n}} \\ &= \frac{2}{2 \sin^2 \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} - i \left(2 \sin \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \cos \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \right)} \\ &= \frac{2}{2 \sin \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} - i \cos \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \right)} \\ &= \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} + i \cos \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \right) / \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \cdot 1 \right) \\ &= 1 + i \cot \frac{\alpha\pi}{2(m+n)} \end{aligned}$$

所以 $\sum_{k=0}^{m+n-1} \cos \frac{k\alpha\pi}{m+n} = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{m+n-1} w^k \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{2}{1-w} \right] = 1$ ，又因 $w^0 = 1$ ，

故可得 $\sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{k\alpha\pi}{m+n} = 0$ 。綜合以上 (i)、(ii) 之討論，故得證。

□

步驟 III：利用步驟 II 的結果來計算 (式 16) 之值，先透過三角函數積化差公式，可將 (式 16) 化簡為

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\cos \frac{(i-j)k\pi}{m+n} - \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \right)。$$

(i) 在 $i \neq j$ 之情況下，其中 $1 \leq i, j \leq m+n-1$ ，不失一般性，令 $i > j$ ，由於

$i \pm j$ 必同為正偶數或正奇數，利用步驟 II 之結果代入與計算如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\cos \frac{(i-j)k\pi}{m+n} - \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{(i-j)k\pi}{m+n} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0 & \text{當 } i \pm j \text{ 為偶數，} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 & \text{當 } i \pm j \text{ 為奇數。} \end{cases}
\end{aligned}$$

(ii) 在 $i = j$ 的情況下，其中 $1 \leq i, j \leq m+n-1$ ，因 $i-j=0$ 且 $i+j$ 必為正偶數，再次利用步驟 II 的偶數情況之結果代入與計算如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\cos \frac{(i-j)k\pi}{m+n} - \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\cos 0 \cdot \pi - \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m+n-1} \cos \frac{(i+j)k\pi}{m+n} \\
&= \frac{m+n-1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1) = \frac{m+n}{2}。
\end{aligned}$$

綜合以上 (i)、(ii) 之討論，故可推得 (式 16) 之值整理如下：

$$\sum_{k=1}^{m+n-1} \left(\sin \frac{i \cdot k\pi}{m+n} \right) \left(\sin \frac{k \cdot j\pi}{m+n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{若 } i \neq j, \\ \frac{m+n}{2}, & \text{若 } i = j. \end{cases}$$

步驟 IV：將步驟 III 之結果代入 (式 15) 可得

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1)^2\pi}{m+n} \end{bmatrix}^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{m+n}{2} & & & \\ & \frac{m+n}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{m+n}{2} \end{bmatrix}。
\end{aligned} \tag{式 17}$$

接著考慮一 $m+n-1$ 階方陣 M 滿足一等式如下：

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} & & & \\ & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1) \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \end{bmatrix}^2 M \\ = I_{m+n-1} \quad \circ \quad (式 18)$$

其中 I_{m+n-1} 為 $m+n-1$ 階單位方陣，將 (式 17) 之結果代入 (式 18)，計算方陣 M 如下：

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} & & & \\ & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{m+n}{2} & & & \\ & \frac{m+n}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{m+n}{2} \end{bmatrix} M = I_{m+n-1} \\ \Rightarrow M = \begin{bmatrix} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{2}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix} \circ$$

將方陣 M 之值代入 (式 18)，經由比較 (式 14) 與整理 (式 18) 可以推得 U^{-1} ，計算如下：

$$U \cdot \begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1) \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{2}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix} = I_{m+n-1} \quad ,$$

故可推得

$$U^{-1} = \begin{bmatrix} \sin \frac{1 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{1 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{1 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \sin \frac{2 \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{2 \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{2 \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin \frac{(m+n-1) \cdot 1\pi}{m+n} & \sin \frac{(m+n-1) \cdot 2\pi}{m+n} & \cdots & \sin \frac{(m+n-1) \cdot (m+n-1)\pi}{m+n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{2}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m+n-1}{2}} \end{bmatrix}。$$

經過上述四個步驟 I~IV 之討論後，可得到 U^{-1} ，再結合 (式 12)、(式 14) 之結果，將 (式 3) 中的方陣 P 進行對角化，並計算方陣 P^k 代入 (式 3) 整理後如下：

$$\begin{bmatrix} A_k(1) \\ A_k(2) \\ \vdots \\ A_k(m+n-1) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{\pi}{m+n}\right)^k & & & \\ & \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{2\pi}{m+n}\right)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{(m+n-1)\pi}{m+n}\right)^k \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

展開上式後，比較等式的左右兩邊可得到 $k \in \mathbb{N}$ ， $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之值分別如下：

$$A_k(1) = \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{(1-m)/2} \sin \frac{j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}\right)^k$$

與

$$\begin{aligned} & A_k(m+n-1) \\ = & \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{(m+n-1)-m}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}\right)^k \end{aligned}$$

最後利用 $A_k(1)$ 、 $A_k(m+n-1)$ 之值與初始條件 $A_0(m) = 1$ ， $A_0(i) = 0$ ， $i \neq m$ 來討論兩通式如下：

1. **玩家贏的機率**：將 $A_k(m+n-1)$ 之值代入 (式 1)，即玩家 A 贏的機率計算如

下：

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m+n-1) \cdot p = A_0(m+n-1) \cdot p \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1-m}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \right] \cdot p \\
& = \begin{cases} p + p \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{(m+n-1)-m}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \right] \\ \quad , m = m+n-1 \\ p \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{(m+n-1)-m}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \right] \\ \quad , m \neq m+n-1 \end{cases} \quad (\text{式 19})
\end{aligned}$$

接著先探討 (式 19) 中 $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k$ 之值如下：由算幾不等式知 $2q\sqrt{\frac{p}{q}} = 2\sqrt{pq} < p+q = 1$ ($p \neq q$) 且 $\left| \cos \frac{j\pi}{m+n} \right| \leq 1$, $j = 1, 2, \dots, m+n-1$, 故推得 $\left| 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right| < 1$, 故

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k = \frac{2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}}{1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}}$$

代回 (式 19) 可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m+n-1) \cdot p = \delta(m) \\
& + p \cdot \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1-m}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\frac{2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}}{1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}} \right] \quad (\text{式 20})
\end{aligned}$$

其中 $\delta(m) = \begin{cases} p, & \text{當 } m = m+n-1 \\ 0, & \text{當 } \neq m+n-1 \end{cases}$ 。此 (式 20) 給出玩家 A 贏之機率一般通

式，玩家 B 贏之機率一般通式則為 $1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k(m+n-1) \cdot p$ 。

2. 平均回合數：在計算平均回合數之前，先整理出 $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之

值的關係式，計算過程如下：

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{p}{q}\right)^{1-\frac{m+n}{2}} A_k(m+n-1) - A_k(1) \\
= & \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} - \sin \frac{j\pi}{m+n} \right] \\
& \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[2q \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right]^k \\
& \left(\because \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} - \sin \frac{j\pi}{m+n} = \begin{cases} 0 & , \text{當 } j \text{ 為奇數} , \\ -2 \sin \frac{j\pi}{m+n} & , \text{當 } j \text{ 為偶數} . \end{cases} \right) \\
= & \sum_{\substack{j \text{ 為偶數} \\ 2 \leq j \leq m+n-1}} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \left[-2 \sin \frac{j\pi}{m+n} \right] \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[2q \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right]^k
\end{aligned}$$

故將等式移向整理化簡，可得 $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之關係為

$$\begin{aligned}
& A_k(m+n-1) \\
= & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} \left[A_k(1) + \frac{2}{m+n} \sum_{\substack{j \text{ 為偶數} \\ 2 \leq j \leq m+n-1}} \left(\frac{p}{q}\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \cdot \left(-2 \sin \frac{j\pi}{m+n} \right) \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \left. \right] \\
= & \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} \cdot A'_k(1) ,
\end{aligned}$$

其中 $A'_k(1) := \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-m}{2}} (-1)^{j-1} \sin \frac{j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q \sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k$ 。再利

用 $k \in \mathbb{N}$ ， $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之值代入 (式 2)，整理與推導計算過程如下：

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)qA_k(1) + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)pA_k(m+n-1) \\
&= \left(qA_0(1) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)qA_k(1) \right) + \left(pA_0(m+n-1) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)p \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} A'_k(1) \right) \\
&= qA_0(1) + pA_0(m+n-1) + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left[\sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \right. \\
&\quad \left. \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \right) \right] \\
&= qA_0(1) + pA_0(m+n-1) + \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \\
&\quad \cdot \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \right) \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^k \right] \\
&= \delta(m) + \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \\
&\quad \cdot \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{m+n-1}{2}} \right) \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right)^2} \right] \quad (\text{式 21})
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \delta(m) = qA_0(1) + pA_0(m+n-1) = \begin{cases} q, & m=1 \\ 0, & 1 < m < m+n-1 \\ p, & m=m+n-1 \end{cases}, \text{ 在上式的}$$

推導中過程中， $\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)r^k = -1 + \frac{1}{1-r}^2$ ，當 $|r| < 1$ ；因 $\left| 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} \right| < 1$ ，故上式中的無窮級數會收斂，此 (式 21) 給出平均回合數之通式。

2.3.4 推廣：含有平局情況的玩家贏之機率與平均回合數之探討

在此加入平局的狀況，規則更改如下：以機器抽球的方式進行，有一箱盒子內裝有紅、藍、綠三種球若干顆，其中三類球所占的比例分別為 p 、 q 與 r ， $p+q+r=1$ ，且每顆球被抽中的機率均相等，機器每一回抽一球，抽後放回；設玩家 A 持有 m 元，玩家 B 持有 n 元，若抽中紅球，則玩家 B 給玩家 A 一元，若抽中藍球，則玩家 A 給玩家 B 一元，若抽中綠球，則視為平局，賭局將不斷重複進行直到有一方破產為止。仿照上面研究的定義與作法，畫出簡單 $A_k(i)$ 的樹狀圖可推得當 $k \in \mathbb{N}$ ， $A_k(i)$ 之遞迴關係式並將之列式對應如下：

…第 $k-1$ 回 第 k 回…

$$\begin{array}{c} A_{k-1}(i+1) \\ A_{k-1}(i) \\ A_{k-1}(i-1) \end{array} \begin{array}{c} \text{blue} \\ \text{green} \\ \text{red} \end{array} \rightarrow A_k(i) \Leftrightarrow \begin{cases} A_k(1) = rA_{k-1}(1) + qA_{k-1}(2) \\ A_k(n) = pA_{k-1}(i-1) + rA_{k-1}(i-1) + qA_{k-1}(i+1) \\ A_k(m+n-1) = pA_{k-1}(m+n-2) + rA_{k-1}(m+n-1) \end{cases}$$

$i = 2, 3, \dots, (m+n-2)$ 。根據題意，將 $A_k(i)$ 之遞迴關係式寫成一個 $m+n-1$ 階方陣 M ，進行遞迴疊代 k 次為 M^k 如下：

$$\begin{bmatrix} A_k(1) \\ \vdots \\ A_k(m) \\ \vdots \\ A_k(m+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & q & & & \\ p & r & q & & \\ & p & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & r & q \\ & & & p & r \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 初始條件為 } \begin{bmatrix} A_0(1) \\ \vdots \\ A_0(m) \\ \vdots \\ A_0(m+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{式 22})$$

上式中的方陣 M 又可拆成兩個方陣相加之形式如右：

$$\begin{bmatrix} 0 & q & & & \\ p & 0 & q & & \\ & p & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & q \\ & & & p & 0 \end{bmatrix} + r \cdot I_{m+n-1}$$

方陣 M 之第一個方陣剛好為前述探討的方陣 P ，因此仿照上面研究的方陣對角化之方法將上式整理可得

$$M = U \begin{bmatrix} 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{\pi}{m+n} & & & 0 \\ & 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{2\pi}{m+n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{(m+n-1)\pi}{m+n} \end{bmatrix} U^{-1} + rI_{m+n-1}$$

其中利用 $r \cdot I_{m+n-1} = U \cdot (r \cdot I_{m+n-1}) \cdot U^{-1}$ 與上式結果並代入 (式 22) 化簡，可得如下：

$$\begin{bmatrix} A_k(1) \\ \vdots \\ A_k(m) \\ \vdots \\ A_k(m+n-1) \end{bmatrix} = U \begin{bmatrix} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{\pi}{m+n} + r\right)^k & & & 0 \\ & \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{2\pi}{m+n} + r\right)^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{(m+n-1)\pi}{m+n} + r\right)^k \end{bmatrix} U^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

展開上式後，比較等式的左右兩邊即可得到 $k \in \mathbb{N}$ ， $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之值

分別如下：

$$A_k(1) = \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r\right)^k$$

與

$$A_k(m+n-1) = \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1-m}{2}} \cdot \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r\right)^k$$

從中可以發現在此推出的兩值之結果與上面文內研究的 $A_k(1)$ 與 $A_k(m+n-1)$ 之式子結構完全一樣，只是式子中的 $2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}$ 被取代成 $2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r$ ，因此再依循上面文內研究的推導方式將 (式 20) 與 (式 21) 的 $2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}$ 取代成 $2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r$ ，便可立即推出更改規則後玩家贏的機率與平均回合數之一般通式如下：

1. 玩家贏的機率之一般通式：

$$\delta(m) + p \cdot \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1-m}{2}} \cdot \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\frac{2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r}{1 - \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r\right)} \right] \quad (\text{式 } 23)$$

$$\text{其中 } \delta(m) = \begin{cases} p & , \text{ 當 } m = m+n-1 \\ 0 & , \text{ 當 } \neq m+n-1 \end{cases}。$$

2. 平均回合數之一般通式：

$$\delta(m) + \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \cdot \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n}{2}-1} \right) \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r\right)\right)^2} \right] \quad (\text{式 } 24)$$

$$\text{其中 } \delta(m) = qA_0(1) + pA_0(m+n-1) = \begin{cases} q & , m = 1 \\ 0 & , 1 < m < m+n-1 \\ p & , m = m+n-1 \end{cases}。$$

最後將藉助電腦軟體運算的協助來驗證兩通式之準確性，並整理成電腦模擬值與理論值之比較表格，這樣能更清楚看出電腦跑出的結果近似於推導出的兩通式之值，甚至會相同。

3 研究結果

3.1 以每回合得勝率分別為 p 與 q 、玩家籌碼分別為 m 與 n 為例：

在此我舉三個研究之結果為例，先利用電腦程式來測試 100 次，每次 1,000,000 局，每次的結果都會顯示在電腦螢幕上，並將前 10 次、前 20 次、 $\dots$ 、前 100 次的平均值紀錄在文字 TXT 檔中，方便觀察與紀錄，再取前 100 次的平均作為兩玩家贏之機率與平均回合數之模擬值，再利用數學軟體 Mathematica，將賭局條件的參數分別代入贏的機率通式 (式 20) 與平均回合數通式 (式 21)，計算出兩玩家贏之機率與平均回合數的理論值，最後將電腦模擬值與理論值整理於表格中做比較，可以明顯呈現其兩值非常地接近或甚至相同。

賭局條件： $p = \frac{1}{3}$ ， $q = \frac{2}{3}$ ， $m + n = 8$ ，模擬的賭局數：1000000 局、測試次數：100 次									
電腦程式跑出的電腦模擬值					以通式 (式 20) 與 (式 21) 計算出的理論值				
A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數	A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數
1	7	0.0039	0.9961	2.9064	1	7	0.0039	0.9961	2.9059
2	6	0.0118	0.9882	5.7183	2	6	0.0118	0.9882	5.7178
3	5	0.0275	0.9725	8.3414	3	5	0.0275	0.9725	8.3412
4	4	0.0588	0.9412	10.5884	4	4	0.0588	0.9412	10.5882
5	3	0.1215	0.8785	12.0833	5	3	0.1216	0.8784	12.0824
6	2	0.2471	0.7529	12.0706	6	2	0.2471	0.7529	12.0706
7	1	0.4980	0.5020	9.0470	7	1	0.4980	0.5020	9.0471

表一

賭局條件： $p = \frac{2}{5}$ ， $q = \frac{3}{5}$ ， $m + n = 10$ ，模擬的賭局數：1000000 局、測試次數：100 次									
電腦程式跑出的電腦模擬值					以通式 (式 20) 與 (式 21) 計算出的理論值				
A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數	A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數
1	9	0.0088	0.9912	4.5605	1	9	0.0088	0.9912	4.5588
2	8	0.0221	0.9779	8.8991	2	8	0.0220	0.9780	8.8971
3	7	0.0419	0.9581	12.9044	3	7	0.0419	0.9581	12.9044
4	6	0.0717	0.9283	16.4172	4	6	0.0718	0.9282	16.4154
5	5	0.1164	0.8836	19.1836	5	5	0.1163	0.8837	19.1818
6	4	0.1834	0.8166	20.8314	6	4	0.1833	0.8167	20.8315
7	3	0.2839	0.7161	20.8092	7	3	0.2838	0.7162	20.8061
8	2	0.4348	0.5652	18.2660	8	2	0.4346	0.5654	18.2680
9	1	0.6609	0.3391	11.9592	9	1	0.6607	0.3393	11.9608

表二

以 $p = \frac{2}{5}$ 、 $q = \frac{3}{5}$ 、 $m = 3$ 、 $n = 7$ 條件為例，在電腦程式運行測試中，會將每

次的結果呈現在螢幕上，可觀察到贏的機率與平均回合數都會在固定的範圍內做隨機的變化，但取其前 10 次至前 100 次的平均存入文字 TXT 檔，會發現平均值隨著測試次數越大，會越趨近理論值，即前 100 次結果的平均值：0.0419、0.9581 與 12.9044 會與（表二）的理論值完全相同。

3.2 推廣：更改規則，加入平局機率 r

在此我也舉三個有平局之結果為例，電腦模擬的方式跟前述一樣，而理論值的部份，則是再次使用數學軟體 Mathematica，將賭局條件的參數分別代入贏的機率通式（式 23）與平均回合數通式（式 24），計算出兩玩家贏之機率與平均回合數的理論值，最後將電腦模擬值與理論值整理於表格中做比較，可以明顯呈現其兩值非常地接近或甚至相同。

賭局條件： $p = \frac{1}{6}, r = \frac{2}{6}, q = \frac{3}{6}, m + n = 8$ ， 模擬的賭局數：1000000 局、測試次數：100 次									
電腦程式跑出的電腦模擬值					以通式（式 20）與（式 21）計算出的理論值				
A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數	A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數
1	7	0.0003	0.9997	2.9931	1	7	0.0003	0.9997	2.9926
2	6	0.0012	0.9988	5.9718	2	6	0.0012	0.9988	5.9708
3	5	0.0040	0.9960	8.9068	3	5	0.0040	0.9960	8.9050
4	4	0.0122	0.9878	11.7090	4	4	0.0122	0.9878	11.7073
5	3	0.0369	0.9631	14.1161	5	3	0.0369	0.9631	14.1146
6	2	0.1110	0.8890	15.3393	6	2	0.1110	0.8890	15.3366
7	1	0.3333	0.6667	13.0031	7	1	0.3333	0.6667	13.0024

表一

賭局條件： $p = \frac{2}{9}, r = \frac{3}{9}, q = \frac{4}{9}, m + n = 10$ ， 模擬的賭局數：1000000 局、測試次數：100 次									
電腦程式跑出的電腦模擬值					以通式（式 20）與（式 21）計算出的理論值				
A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數	A 籌碼	B 籌碼	A 贏機率	B 贏機率	平均回數
1	9	0.0010	0.9990	4.4566	1	9	0.0010	0.9990	4.4560
2	8	0.0029	0.9971	8.8697	2	8	0.0029	0.9971	8.8681
3	7	0.0068	0.9932	13.1932	3	7	0.0068	0.9932	13.1920
4	6	0.0147	0.9853	17.3422	4	6	0.0147	0.9853	17.3402
5	5	0.0303	0.9697	21.1375	5	5	0.0303	0.9697	21.1364
6	4	0.0616	0.9384	24.2290	6	4	0.0616	0.9384	24.2290
7	3	0.1242	0.8758	25.9152	7	3	0.1241	0.8759	25.9136
8	2	0.2493	0.7507	24.7847	8	2	0.2493	0.7507	24.7830
9	1	0.4995	0.5005	18.0234	9	1	0.4995	0.5005	18.0220

表二

以 $p = \frac{2}{9}$ 、 $r = \frac{3}{9}$ 、 $q = \frac{4}{9}$ 、 $m = 6$ 、 $n = 4$ 之條件為例，將每次電腦程式運行的結果呈現在螢幕上，可觀察到贏的機率與平均回合數都會在固定的範圍內做隨機的變化，但取其前 10 次至前 100 次的平均存入文字 TXT 檔，會發現平均值隨著測試次數越大，會越趨近理論值，即前 100 次結果的平均值：0.0616、0.9384 與 24.2290 會與（表二）的理論值完全相同。

4 結論

4.1 探究矩陣對角化的運算於解問題之數學通式：

4.1.1 給定初始條件下的玩家贏的機率與平均回合數之一般通式

在本研究中，我將賭徒問題之條件延伸至一般的情況，每回合得勝率分別為 p 與 q 、玩家籌碼分別為 m 與 n ，其中 $p + q = 1$ ， $p \neq q$ （即不公平）， $1 \leq m, n \leq m + n - 1$ ，並將問題以矩陣的形式呈現，探究此類矩陣的架構與其對角化的運算，成功地推導出一般通式如下：

1. 玩家贏的機率之一般通式：

$$\delta(m) + p \cdot \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1-j}{2}} \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\frac{2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}}{1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}} \right]$$

$$\text{其中 } \delta(m) = \begin{cases} p, & \text{當 } m = m + n - 1 \\ 0, & \text{當 } \neq m + n - 1 \end{cases}。$$

2. 平均回合數之一般通式：

$$\delta(m) + \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-j}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \cdot \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1}{2}} \right) \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n}\right)^2} \right]$$

$$\text{其中 } \delta(m) = qA_0(1) + pA_0(m+n-1) = \begin{cases} q, & m = 1 \\ 0, & 1 < m < m + n - 1 \\ p, & m = m + n - 1 \end{cases}。$$

4.1.2 加入平局條件下玩家贏的機率與平均回合數之一般通式

將賭局的規則推廣為包含平局的情況，每回合得勝率分別為 p 與 q 、平局機率為 r 、玩家籌碼分別為 m 與 n ，其中 $p + q + r = 1$ ， $p \neq q$ （即不公平）， $1 \leq m, n \leq$

$m + n - 1$ ，並將問題以矩陣的形式呈現，結合前述推導之結果進行整理，成功地推導出加入平局條件之一般通式如下：

1. 玩家贏的機率之一般通式：

$$\delta(m) + p \cdot \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1-m}{2}} \cdot \sin \frac{(m+n-1)j\pi}{m+n} \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \left[\frac{2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r}{1 - 2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} - r} \right]$$

$$\text{其中 } \delta(m) = \begin{cases} p, & \text{當 } m = m + n - 1 \\ 0, & \text{當 } \neq m + n - 1 \end{cases}。$$

2. 平均回合數之一般通式：

$$\delta(m) + \sum_{j=1}^{m+n-1} \frac{2}{m+n} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-m}{2}} \sin \frac{j\pi}{m+n} \cdot \sin \frac{m \cdot j\pi}{m+n} \cdot \left(q + (-1)^{j-1} p \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{m+n-1}{2}-1} \right) \left[-1 + \frac{1}{\left(1 - \left(2q\sqrt{\frac{p}{q}} \cos \frac{j\pi}{m+n} + r\right)\right)^2} \right]$$

$$\text{其中 } \delta(m) = qA_0(1) + pA_0(m+n-1) = \begin{cases} q, & m = 1 \\ 0, & 1 < m < m + n - 1 \\ p, & m = m + n - 1 \end{cases}。$$

4.2 克服驗證一般通式的困難：

在本研究的計算過程裡，為了驗證其通式的準確性，有先嘗試藉助 Excel 的強大運算的能力來計算理論值，卻發現數值總是出錯，經過多次的驗證及檢討式子的推導過程，找出錯誤的原因來自 Excel 定義的三角函數值並非我們所學的理论值，如： $\sin(\pi)$ 值定義約近似為 1.225148×10^{16} 而非為 0，當 1.225148×10^{16} 乘上一些較大的數字時就會造成很大的誤差值，如此類的問題會影響我們的判斷與驗證，因此與老師討論與建議後，改用數學軟體 Mathematica，成功地改善並解決驗證通式的問題。

5 未來展望

5.1 應用高階方陣對角化於玩家贏之機率與平均回合數之探討的發想

在此更改為較多情況之規則如下：以機器抽球的方式進行，有一箱盒子內裝有若干顆球，其中球上皆標記整數 s ，其中 $-t \leq s \leq t$ ， $t \in \mathbb{N}$ 且 $2t+1 \leq m+n-1$ ，這若干類球所占的比例記 p_s ， $\sum_{s=-t}^t p_s = 1$ ，且每顆球被抽中的機率均相等，機器每一回抽一球，抽後放回；設玩家 A 持有 m 元，玩家 B 持有 n 元，若機器抽中一顆標有正數 s 的球，則玩家 A 獲得 s 元，玩家 B 失去 s 元，若標有負數 s 的球，則反之；若抽中標 0 的球，則視為平局，賭局將不斷重複進行直到有一方破產或負債為止。

仿照上面研究的定義與作法，由給定的條件可推出 $A_k(i)$ 之關係式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} A_k(1) = p_0 A_{k-1}(1) + p_{-1} A_{k-1}(2) + \cdots + p_{-t} A_{k-1}(t+1) \\ A_k(2) = p_1 A_{k-1}(1) + p_0 A_{k-1}(2) + \cdots + p_{-t} A_{k-1}(t+2) \\ \vdots \\ A_k(i) = p_t A_{k-1}(i-t) + p_{t-1} A_{k-1}(i-t+1) + \cdots + p_{-t} A_{k-1}(i+t) \\ \quad \text{for } i = t+1, t+2, \dots, m+n-3 \\ \vdots \\ A_k(m+n-2) = p_t A_{k-1}(m+n-t-2) \\ \quad + p_{t-1} A_{k-1}(m+n-t-1) + \cdots + p_{-1} A_{k-1}(m+n-1) \\ A_k(m+n-1) = p_t A_{k-1}(m+n-t-1) \\ \quad + p_{t-1} A_{k-1}(m+n-t) + \cdots + p_0 A_{k-1}(m+n-1) \end{array} \right.$$

將上式整理成一高階方陣 M 之形式並進行遞迴疊代 k 次為 M^k 如下：

$$= \begin{bmatrix} A_k(1) \\ A_k(2) \\ \vdots \\ A_k(i) \\ \vdots \\ A_k(m+n-2) \\ A_k(m+n-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 & p_{-1} & \cdots & p_{-t} \\ p_1 & p_0 & p_{-1} & \cdots & p_{-t} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ p_t & p_{t-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_{-t} \\ & p_t & p_{t-1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & p_{-t} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & p_t & p_{t-1} & \cdots & \cdots & \cdots & p_{-t} \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & p_t & \cdots & \cdots & p_0 & p_{-1} \\ & & & & & p_t & \cdots & \cdots & p_0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} A_0(1) \\ A_0(2) \\ \vdots \\ A_0(i) \\ \vdots \\ A_0(m+n-2) \\ A_0(m+n-1) \end{bmatrix}$$

對於 M^k 之複雜的計算，就可以應用到方陣 M 之對角化，過程中會使用到 $2t$ 階齊次方程的運算，可作為我日後進一步深度之探討與研究的主题。

5.2 生活中的應用例子：

在此我們可以將此賭局想像成是一間公司的經營，假設此公司的長期下來經營方式是有規律的營運，想像玩家 A 是公司的員工，幫公司賺錢的機率為 p ，讓公司賠錢的機率為 q ，公司投資在員工身上的本金為 m ，公司希望員工賺到的利潤為 n ，可以藉助本研究推導出的公式計算出員工投資成功的機率，即獲得 $m+n$ 之機率，以及所需要的時間。我們都能將生活的所遇到的問題，以數學問題來呈現並解決它！

參考資料 (Reference)

- [1] 楊大緯 (2016)。電腦模擬與賭局。數學傳播第四十卷第二期。中央研究院數學研究所出版。
- [2] 許志農、黃森山教授。高中數學課本第二冊。龍騰出版。
- [3] 林福來、陳創義教授。高中數學教師手冊第二冊。南一出版。

[4] 高橋信。世界第一簡單線性代數。世茂出版社。

[5] 洪維。C 語言教學手冊 (四版)。旗標出版。

附錄：程式碼

```
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<time.h>

void main()
{
    int t,i,j,a,b,r,t, test_num,x,y,ga=0,gb=0,round=0, n,A[100],B[100],R[100];
    float avg_sumA,avg_sumB,avg_sumR;

    printf("<<gambler's ruin problem>>\n\n");
    printf("~~~~~\n");
    printf("賭局規則:\n玩至其中一玩家破產(即籌碼歸零)\n");
    printf("有一方破產定義為一局\n");
    printf("~~~~~\n");
    printf("請輸入玩家A的籌碼:");
    scanf("%d",&a);
    printf("請輸入玩家B的籌碼:");
    scanf("%d",&b);
    printf("請輸入模擬的局數:");
    scanf("%d",&n);
    printf("請輸入測試次數:");
    scanf("%d",&test_num);
    FILE *fPtr; /*宣告FILE資料型態的 指標*/
    fPtr = fopen("紀錄結果.txt","w");
    srand((unsigned)time(NULL));

    for(t=0;t<test_num;t++)
    {
        ga=gb=round=0;

        for(i=0;i<n;i++)
        {
            a=x,b=y;

            while(a!=0&&b!=0)
            {
                r=rand()%3;
                if(r==1)
                {
                    a=a+1;
                    b=b-1;
                }
                else
                {
                    a=a-1;
                    b=b+1;
                }
                round++;
            }

            if(a==0)
            {
                gb=gb+1;
            }
            else
            {
                ga=ga+1;
            }
        }
        A[t]=ga,B[t]=gb,R[t]=round;
        printf("\n第%d次結果\n",t+1);
        printf("  玩家A贏的機率 :%.4f\n",(float)A[t]/n);
        printf("  玩家B贏的機率 :%.4f\n",(float)B[t]/n);
        printf("  平均回合數 :%.4f\n",(float)R[t]/n);

        if((t+1)%10==0)
        {
            avg_sumA=avg_sumB=avg_sumR=0;
            for(j=0;j<t+1;j++)
            {
                avg_sumA=avg_sumA+(float)A[j]/n;
                avg_sumB=avg_sumB+(float)B[j]/n;
                avg_sumR=avg_sumR+(float)R[j]/n;
            }
            fprintf(fPtr,"\n前%d次結果平均:\n",t+1);
            fprintf(fPtr,"  玩家A贏的機率 :%.4f\n",avg_sumA/(float)(t+1));
            fprintf(fPtr,"  玩家B贏的機率 :%.4f\n",avg_sumB/(float)(t+1));
            fprintf(fPtr,"  平均回合數 :%.4f\n",avg_sumR/(float)(t+1));
        }
    }
    fclose(fPtr); /* 關閉檔案 */
    system("pause");
}
```

賭局規則
顯示於螢幕上，並
請使用者
輸入參數

紀錄兩玩家個別贏的局數

將每次結果顯示在螢幕上

計算前 10 次、20 次…100 次的結果平均值並記錄在文字 TXT 檔中

賭局規則，
可以依研究
的需求更改
條件，說明
如右。

1.宣告變數說明:

a: 玩家A籌碼 b: 玩家B籌碼 r: 隨機數
ga: 玩家A贏的局數 gb: 玩家B贏的局數
round: 回合數 test_num: 測試次數
A[100]: 存放 100 次測試之玩家 A 贏的局數
B[100]: 存放 100 次測試之玩家 B 贏的局數
R[100]: 存放 100 次測試之每次所需回合數
avg_sumA、avg_sumB、avg_sumR: 取平均數用

2.更改賭局規則說明:

(1)模擬機率 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{3}$

rand(): 電腦隨機跑出數字
rand()%3: 取除3後之餘數: 值可能為0,1,2
if(r==1): 判斷是否餘數為1, 如果是, 則玩家A
獲得1元, 玩家B失去1元, 否則為0或2時, 情況反之。

(2)模擬機率 $\frac{2}{5}$ 與 $\frac{3}{5}$

rand()%5: 取除5後之餘數: 值可能為0,1,2,3,4
if(r==1 || r==3): 判斷是否餘數為1或3, 如果
是, 則玩家A 獲得1元, 玩家B失去1元, 否則為0或2
或4時, 情況反之。

(3)模擬有平局的情況, 如: $p = \frac{1}{6}$ 、 $r = \frac{2}{6}$ 、 $q = \frac{3}{6}$

rand()%6: 取除6後之餘數: 值可能為0,1,2,3,4,5
if(r==1)
{ 玩家 A 獲得 1 元
 玩家 B 失去 1 元
}
else if(r==1 || r==2)
{
 (不做任何事)
}
else if(r==3 || r==4 || r==5)
{
 玩家 A 失去 1 元
 玩家 B 獲得 1 元
}