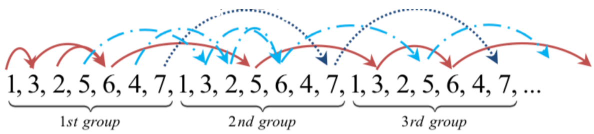
週期數列的收斂路線與循環

臺北市立第一女子高級中學　郭婷婷
指導老師　廖培凱

Abstract

Take a positive integer sequence with period 7 for example.



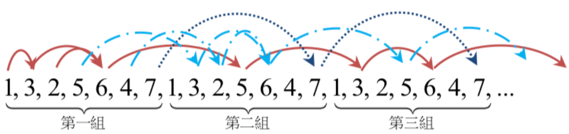
$a_1 = 1$ takes 1 step to $a_{1+1} = 3$, 3 takes 3 steps to $a_{2+3} = 6$, $\ldots$ and so forth. There are 3 converged-routes in the periodic sequence just mentioned:

$${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots \text{、} {}_15 \to {}_23 \to {}_26 \to {}_35 \to \cdots \text{、} {}_17 \to {}_27 \to \cdots$$

While this research tells us how many converged-routes there are in given arithmetic progression modulo n. For periodic sequence (with period n) that has exactly one of each $1 \sim n$ in any group, we can find the least upper bound of the number of converged-routes. To prove the statement just mentioned, we have to explore the connection between the numbers of converged-routes and other concepts like cycles.

中文摘要

給定週期正整數數列，數列裡的項依照其代表的數字移動，舉例來說，給定週期 7 的正整數數列：



1 往後「走」1 項到 3，3 往後走 3 項到 6，$\cdots$ 以此類推。以上週期數列有 3 條收斂路線。而文中主要探討等差數列在模 n 時形成的週期數列它的收斂路線數。從 $d = 1$ 的特例：連續遞增數列開始，到一般的等差數列在模 n 時形成的週期數列。除此之外。對於週期 n 且一組內恰為 $1 \sim n$ 排列的數列，我能知道它收斂路線數的上界，而藉由構造特定收斂路線數的週期數列，得到週期數列收斂路線數的最小上界。

1 簡介

1.1 研究方法與名詞定義

1.1.1 週期數列

定義 若正整數數列 $\langle a_m \rangle$ ，有 $a_i = a_{i+n}\ \forall\ i \in \mathbb{N}$ 其中 n 是使等號成立的最小正整數，則稱此數列是週期為 n 的數列。在本作品中，將第 q 個週期內的第 r 項 $a_{n(q-1)+r}$ 記為 ${}_q a_r$，其中 $1 \le r \le n$：即數列 $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ a_{n+1},\ a_{n+2}, \ldots, a_{2n}, \ldots$ 可以記為

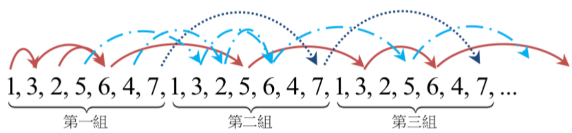
$$\underbrace{{}_1a_1,\ {}_1a_2,\ \ldots,\ {}_1a_n}_{\text{共 } n \text{ 項}}, \underbrace{{}_2a_1,\ {}_2a_2,\ \ldots,\ {}_2a_n}_{\text{共 } n \text{ 項}}, \cdots \text{。}$$

以週期數列 $2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 3, 4, \ldots$ 為例，第 6 項 4 可以看成是第二個週期的第 3 項，記為 $a_6 = {}_2a_3 = {}_24$。要注意的是 ${}_14$ 和 ${}_24$ 代表的都是數字 4，在數列中卻是不同項。而作品中僅討論一個週期裡恰為 $1 \sim n$ 的排列的數列。在後面的討論裡，將一個週期稱為**一組**，這是因為我們討論收斂路線時所使用的 A_q 集合、...，用到了**數字往後走一次最多只到下一組**這個事實，也就是並非所有的週期數列的「週期」和「組」都是相同的概念。

1.1.2 移動函數

定義 先收集一組內所有的數到集合 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$。定義**項的移動函數**：$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，$g(i) = i + a_i$；而當我們討論一個週期裡面的數恰為 $1 \sim n$ 的排列的數列時，可以定義**數字的移動函數**：$f : S \to S$，滿足 $f(a_i) = a_{i+a_i}$。

舉例來說，給定週期數列：



有 $f(a_1) = a_{1+1} = a_2 = 3$，也就是數字 1 移動後對應到數字 3；$g(1) = 1 + 1 = 2$，也就是第 1 項移動後對應到第 2 項。另外定義連續的移動 f^m 和 g^m：

$$f^0(a_i) = a_i \text{、}\ f^m(a_i) = f(f^{m-1}(a_i))\ \ \forall\ m \ge 2,\ m \in \mathbb{N}\text{；}$$
$$g^0(i) = i \text{、}\ g^m(i) = g(g^{m-1}(i))\ \ \forall\ m \ge 2,\ m \in \mathbb{N}\text{。}$$

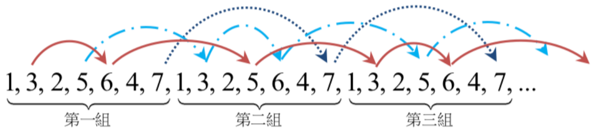
當 f 是一對一的映射時，定義 $f^{-1}(f(a_i)) = a_i$，$f^{-m}(a_i) = f^{-1}\left(f^{-m+1}(a_i)\right)$。類似的有當 g 是一對一的映射時，定義 $g^{-1}(g(i)) = i$，而若存在正整數 m、j 使得 $g^m(j) = i$，則有 $g^{-m}(i) = j$。

1.1.3 收斂路線

以第一組中的 $a_2 = 3$ 當起點往後走，有收斂路線 ${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots$。

$\boxed{\text{定義}}$ 以第一組中的 a_i 當起點，往後走，若存在正整數 m，使得 $f^m(a_i) = a_i$，且滿足不存在正整數 j，使得 $g(j) = i$，則 $a_i \to a_{g(i)} \to a_{g^2(i)} \to \cdots \to a_{g^m(i)} \cdots$ 為一條收斂路線，也就是說收斂路線是以第 i 項作為起點的。可以看出有些數並不在收斂路線中，如：$a_1 = 1$，因為對所有的正整數 m，都有 $f^m(a_1) \neq 1$。${}_11$ 走 1 步之後到了 ${}_13$ ，也就和 ${}_13$ 走到了同一條路線，於是就不再考慮 ${}_11$ 的移動。

以第 i 項作為起點的收斂路線，不存在正整數 j，使得 $g(j) = i$ 的定義其來有自，若不限制，則有這兩條不同的收斂路線 ${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots$、${}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots$，而只看 ${}_16$ 以後的移動，其實走的都是一樣的項，鑒於後面的項的對應基本上都是相同的，只算 ${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots$ 這條收斂路線。



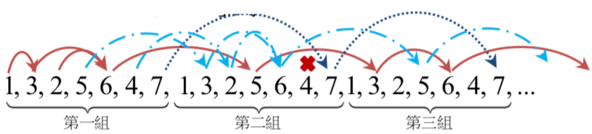
根據定義，以上週期數列有 3 條收斂路線：

$${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots \text{、} {}_15 \to {}_23 \to {}_26 \to {}_35 \to \cdots \text{、} {}_17 \to {}_27 \to \cdots \text{。}$$

可以看出收斂路線是由會循環的**數**（有 $f^m(a_i) = a_i$）所代表的**項**構成的**對應**（移動）。

1.1.4 走一次就到下一組的數

先收集第一組裡面「走一次就到下一組的數」到集合 A_1，以上的例子裡有 $A_1 = \{5, 6, 4, 7\}$。由於以第一組的數為起點，若本身不是 A_1 裡的數，一定要移動到任一個 A_1 裡的數才會走到下一組，所以 A_1 的元素個數會是一個收斂路線數的上界，於是收斂路線不會超過 $|A_1| = 4$ 條。將 A_1 裡的數走到第 2 組時對應到的「走一次就到下一組的數」，收集成 A_2 集合裡的數 — 不必是 A_1 裡的所有元素，例如在 A_1 裡的數 4，在第二組裡並沒有被對應到：



A_2 裡的元素就只剩下可以繼續移動到第三組的「走一次就到下一組的數」：5、6、7，從 $|A_2| = 3$ 知道收斂路線也不會超過 3 條。類似地，收集 A_{q-1} 裡的數走到第 q 組時對應到的「走一次就到下一組的數」到 A_q 裡。一般的，收集**走一次就到下一組的數**到集合裡。

$\boxed{\text{定義}}$ 將週期數列中的數字分為「走一次就到下一組的數」及「走一次不會到下一組的數」兩類：

$$A_1 = \{a_i \mid g(i) > n,\ i \le n\}。$$

令 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$，定義 $B_1 = S \setminus A_1$。當 $q \ge 2$ 時，令 $A_q = \{f(a_i) \mid f(a_i) \in A_{q-1}$ 且 $\exists\, m \in \mathbb{N},\ a_j \in A_{q-1}$ 使得 $g^m(j) = i\}$，以及 $B_q = \{f(a_i) \mid f(a_i) \in B_{q-1}$ 且 $\exists\, m \in \mathbb{N},\ a_j \in A_{q-1}$ 使得 $g^m(j) = i\}$。

就集合的包含關係來看，有 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$，因此 $|A_1| \ge |A_2| \ge \cdots \ge$ 收斂路線數。從這些 A_q 集合的元素個數，我們能得知收斂路線數的上界，而作品中也說明了 $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$ 即是我想了解的週期數列的收斂路線數。

1.1.5 循環

循環不考慮項的差異，如收斂路線 ${}_13 \to {}_16 \to {}_25 \to {}_33 \to \cdots$ 以及 ${}_15 \to {}_23 \to {}_26 \to {}_35 \to \cdots$，則對應到的循環是：$3 \to 6 \to 5 \to 3 \to \cdots$。

$\boxed{\text{定義}}$ 對於 a_i，若存在一個最小的正整數 m，使得 $f^m(a_i) = a_i$，則 $a_i, f(a_i), f^2(a_i), \ldots, f^{m-1}(a_i)$ 在同一個循環內，或稱

$$a_i \to f(a_i) \to f^2(a_i) \to \cdots \to f^{m-1}(a_i) \to a_i \to \cdots$$

為一個「循環」。

從收斂路線的定義裡其中一項要求：存在正整數 m，使得 $f^m(a_i) = a_i$，可知收斂路線裡的**數**都必須要在**循環**中，於是若要討論數列的收斂路線數，我們觀察會循環的數字即可。

作品中討論週期 n，一組裡為 $1 \sim n$ 的排列的數列。在 $1 \sim n$ 都出現的條件下，討論特定週期數列的收斂路線數、等差數列在模 n 時所形成的數列裡，個別循環所對應的收斂路線數、對於給定的週期 n，收斂路線數的最小上界，以及給定不超過最小上界的收斂路線數，一個相對應的數列的存在性問題。

1.2 研究目的

1. 週期為 n 的連續遞增數列其收斂路線數。
2. 循環所需組數和收斂路線數的對應關係。
3. 公差為 d 的等差數列，模 n 時所形成的週期數列，其收斂路線數。
4. 公差為 d 的等差數列，模 n 時所形成的週期數列，各數字在個別循環所需組數的探討，其中 $(n,d) = 1$。
5. 循環長度的上界。
6. 週期數列 $\langle a_i \rangle$（一組中恰為 $1 \sim n$ 的排列），收斂路線數的最小上界。
7. 週期為 n，收斂路線數為 r 的數列的存在性。

1.3 研究結果

1. 週期數列 $\langle a_n \rangle$，收斂路線數 $= \min_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$。
2. 一組 n 項的週期數列 a_i，某一循環所對應的收斂路線數為 r，若且唯若此循環中相異數字的和為 $n \times r$，也就是此週期數列的收斂路線數，即是各循環所對應的收斂路線相加：$\sum r$。
3. 設 $n = mq$，公差為 d 的等差數列，在模 $n = mq$ 時，若 $(mq, d) = 1$，以及 $(m, d+1) = 1$，若 q 的質因數全是 $d+1$ 的質因數，則收斂路線數為 $\dfrac{m+1}{2}$。
4. 在公差為 d 的等差數列，模 n 時所形成的週期數列中，以 $d+1$ 進位制的除法判斷各數字循環所需組數的方法。
5. 公差為 d 的等差數列，在模 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 時形成的週期數列，p_i 是奇質數、α_i 是正整數。數列中任一個數字的循環長度是 $\dfrac{\varphi(n)}{2^{k-1}}$ 的因數。
6. 週期數列 $\langle a_i \rangle$（一組中恰為 $1 \sim n$ 的排列），收斂路線數有最小上界 $\dfrac{n+1}{2}$。
7. 對於正整數 n、r，其中 $r \leq \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$，存在週期為 n，收斂路線為 r 的數列。

2 研究內容

一開始考慮特殊的數列，如以下這個週期 7 的數列，一組內的數字是連續遞減的排列：

$$7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, \ldots$$

拿前 7 項當起點，每個數走一次都到了下一組的 7，可以看出只有一條收斂路線 ${}_17 \to {}_27 \to \cdots$，顯然有收斂路線數為 1。後面的討論先將「收斂路線數」的問題轉為問走一次就到下一組的數有幾個，接著討論另一種特殊的數列，一組內的數字是連續遞增的排列，例如：$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$ 也就是週期 7 的連續遞增數列。

2.1 週期數列 $\langle a_i \rangle$，收斂路線數 $= \min_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$

由於一個週期中的數字是有限的，所以從以下兩個引理可以說明收斂路線數會等於 $\min_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$。

引理 1.1 週期數列 $\langle a_n \rangle$，當數字的移動 $f : A_q \cup B_q \to A_q \cup B_q$ 是一對一的映射時，若 a_s、a_t 是第 q 組中的相異兩數，且 a_s、$a_t \in A_q$，則 $g^m(s) \neq g^{m'}(t)$ $\forall\, m, m' \in \mathbb{N}$。

證明. 當 $f : A_q \cup B_q \to A_q \cup B_q$ 是一對一的映射時，g 也是一對一函數：假設 $g(i) = g(j)$，則 $i + a_i = j + a_j$，因此 $i - j = a_i - a_j$，又由 $g(i) = g(j)$ 可知 $f(a_i) = f(a_j)$，且 f 為一對一，所以 $a_i = a_j$，故 $i = j$，所以 g 是一對一的映射。

因此在第 q 組的相異兩數 a_s、a_t 若都在 A_q 裡，假設 $g^m(s) = g^{m'}(t)$，如果 $m = m'$，從 g 是一對一的映射，$s = t$，則 $a_s = a_t$，矛盾。不失一般性，可以假設 $m > m'$，因為 g 是一對一的，所以 $s = g^{m-m'}(t)$，即 a_t 經過至少一次的移動到 a_s，又 a_s、$a_t \in A_q$，會得出 a_s、a_t 在不同組，矛盾，知 $g^m(s) \neq g^{m'}(t)$。 □

引理 1.2 若週期數列 $\langle a_n \rangle$ 其收斂路線數為 r，則收斂路線數 $r = \min_{n\in\mathbb{N}} |A_n|$。

證明. 從一組內的數字是有限的，可以找到一個含最少元素的 $A_q \cup B_q$，$|A_q| = \min_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\} \geq r$，而 $f : A_q \cup B_q \to A_q \cup B_q$ 必為一對一，從引理 1.1知，若 a_s、$a_t \in A_q$，則 $\forall\, m, m' \in \mathbb{N}$，都有 $g^m(s) \neq g^{m'}(t)$，也就是是**任意兩個 A_q 集合中的元素都不會在同一條收斂路線中**，故 $|A_q| \leq r$，所以 $|A_q| = r = \min_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$。 □

有了引理 1.2 後，我們可以不必回歸定義檢查，而以其他方式看出數列的收斂路線數。而作品中對於收斂路線數的討論都以引理 1.2 為根基。

2.2 公差為 d 的等差數列，在模 n 時形成的週期數列 $\langle a_i \rangle$，其收斂路線數。

為了讓自然數 $1 \sim n$ 在一組內都各出現一次，於是限制公差 d 為小於 n 且和 n 互質的正整數。且取數列裡的每一項都在 $1 \sim n$ 之間。

公差為 d 的等差數列，模 n 時，且 $(n, d) = 1$ 時：

$$\{a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n\} = \{a_1,\ a_1 + d,\ \ldots,\ a_1 + (n-1)d\} \equiv \{1, 2, 3, \ldots, n\} \pmod n$$

故一個週期中 $1 \sim n$ 都恰出現一次。又 $a_{i+n} = a_i + d \times n \equiv a_i \pmod n$，因此在模 n 時，等差數列都會是 $1 \sim n$ 在一組內都各出現一次的週期數列。

先從 $d = 1$ 的特例開始。

2.2.1 週期為 n 的連續遞增數列其收斂路線數

定義週期 n 的連續遞增數列為模 n 時的（數字限制在 $1 \sim n$ 之間）：

$$\langle a_i \rangle = \langle i \rangle:\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ 1,\ \ldots$$

就後見之明來說，此數列是公差為 1 的等差數列在模 n 時的樣子。透過簡單的觀察，當週期 n 為奇數時，連續遞增數列的收斂路線數有一個明顯的規則

週期 n	3	5	7	9	11	13	15	17
收斂路線數	2	3	4	5	6	7	8	9

(表一)

由 (表一) 推測週期為 $2k-1$ 的連續遞增數列，其收斂路線數為 k。

以週期為 7 的連續遞增數列為例：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...，其獨立的移動路線有：

$$_1 1 \xrightarrow{\text{移動 1 步}} {_1 2} \xrightarrow{\text{移動 2 步}} {_1 4} \xrightarrow{\text{移動 4 步}} {_2 1} \xrightarrow{\text{移動 1 步}} \cdots$$

$$_1 3 \xrightarrow{\text{移動 3 步}} {_1 6} \xrightarrow{\text{移動 6 步}} {_2 5} \xrightarrow{\text{移動 5 步}} {_3 3} \xrightarrow{\text{移動 3 步}} \cdots$$

$$_1 5 \xrightarrow{\text{移動 5 步}} {_2 3} \xrightarrow{\text{移動 3 步}} {_2 6} \xrightarrow{\text{移動 6 步}} {_3 5} \xrightarrow{\text{移動 5 步}} \cdots$$

$$_1 7 \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {_2 7} \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {_3 7} \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {_4 7} \xrightarrow{\text{移動 7 步}} \cdots$$

特別地，將「走一次就會到下一組的數」經 f 的映射向後的對應再次列出：

$$_1 4 \to {_2 1}、{_1 5} \to {_2 3}、{_1 6} \to {_2 5}、{_1 7} \to {_2 7}\ 。$$

數列的第二組中，只有 1、3、5、7 會被上一組的數經過 f 的映射對應到，也可以說在第一組中分別有 4、5、6、7 這 4 個數走一次就會到下一組，此數列的收斂路線數亦為 4 條。而 2、4、6 不會被上一組的數經過 f 的映射對應到；此外，並不會有兩個不同的數在經過 f 的映射後得到相同的數，即在這個數列中，**「移動函數 f」是一對一的函數**。

從走一次就到下一組的數的定義，我們知道它的個數是收斂路線數的一個上界，而**引理 1.2** 則清楚描繪收斂路線數和 $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$ 的關係——兩者相等，因此若函數函數 $f : A_1 \cup B_1 \to A_1 \cup B_1$ 是一一對應的映射，可利用 $A_1 = A_2 = A_3 = \cdots$，直接從 $|A_1|$ 知數列的收斂路線數，如數列：1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, $\cdots$ 中走一次就到下一組的數共有 4 個，則可知數列的收斂路線數亦為 4 條。

討論數字經過 f 的映射，對應的方式：對於任一個在 B_1 裡的元素 s，有 $f(a_s) = a_{s+s} = a_{2s} = 2s$。對於任一個在 A_1 裡的元素 s，有 $f(a_s) = a_{s+s} = a_{2s} = 2s - (2k-1)$。故週期為奇數 $2k-1$ 的連續遞增數列中任一數 s 移動的方式是：

$$f : s \mapsto 2s \pmod{2k-1}$$

定理 2.1 週期為 $2k-1$ 的連續遞增數列的收斂路線數為 k。

證明. 考慮函數 $f : \{1,2,3,\ldots,2k-1\} \to \{1,2,3,\ldots,2k-1\}$，因為數列中任意的偶數 $2s$ 都只能由同一週期的 s 映射到，而奇數 $2s-1$ 都只能由前一個週期的 $k+s-1$ 映射到，因此對於任意的正整數 i，$A_i = \{k, k+1, k+2, \ldots, 2k-1\}$，所以 $|A_i| = k$，由**引理 1.2** 知，收斂路線數為 k。 □

而週期為偶數時，會循環的數字的移動就如同奇數乘上 2 的冪次的伸縮，故將所有的偶數以奇數乘上 2 的冪次：$(2k-1) \times 2^m$ 表示。

週期為偶數 $(2k-1)\times 2^m$ 連續遞增數列中任一數 s 移動的方式是：

$$f : s \mapsto 2s \ (\bmod\ (2k-1)\times 2^m)$$

舉週期為 $28 = 7\times 2^2$ 的連續遞增數列 $1,2,3,\ldots,28,1,2,3,\ldots,28,\ldots$ 為例，以圖 1 將循環列出，淺灰色虛線部分表示的是「不循環」的數字的移動，從圖中可以看出只有 4 的倍數會循環。

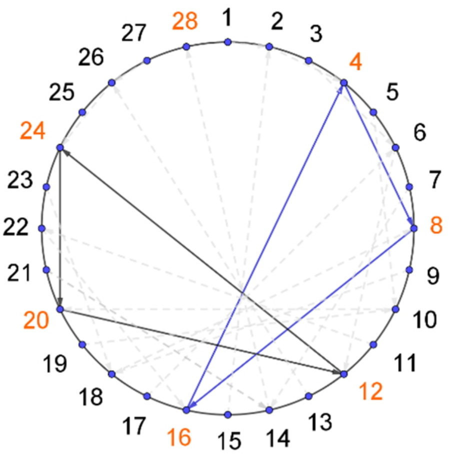


圖 1

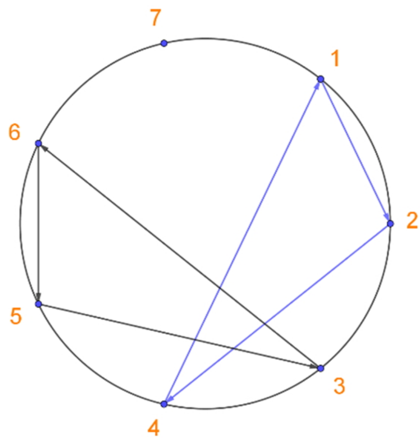


圖 2

而對照週期為 7 的連續遞增數列 $1,2,3,4,5,6,7,1,2,3,4,5,6,7,\ldots$ 裡的循環，如圖 2。可以發現兩圖循環裡的數只是伸縮 4 倍的關係，雖然循環裡的數字都不同，但是移動的方式基本上是一樣的。

從對照以上的週期分別是 28、7 的連續遞增數列裡的循環，能了解兩個循環的本質是相同的。我們可以推及到一般的週期分別是 $(2k-1)\times 2^m$、$2k-1$ 的連續遞增數列裡循環的對應，於是有以下引理 2.1 和定理 2.2。

引理 2.1 週期為 $(2k-1)\times 2^m$ 的連續遞增數列

$$\langle a_n\rangle = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,(2k-1)\times 2^m,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (2k-1)\times 2^m,\ \ldots$$

以第一組的各項為起點移動 m 次後，皆對應到 2^m 的倍數。

證明. 從數列中任一數 s 移動的方式是：

$$f : s \mapsto 2s \ (\bmod\ (2k-1)\times 2^m)$$

可知若數列中的數字 s 經 f 的 m 次映射，對應到 b，有：

$$s\times 2^m - b = (2k-1)\times 2^m \times t \text{ ，對某個 } t\in\mathbb{N}\cup\{0\}\text{。}$$

所以 b 為 2^m 的倍數。 $\square$

> **定理 2.2** 週期為 $(2k-1)\times 2^m$ 的連續遞增數列，收斂路線數為 k。

證明. 設收斂路線數為 $\min\limits_{q\in\mathbb{N}}\{|A_q|\} = |A_i|$ 。由於 $(2,2k-1)=1$，因此若 $1\le a\le (2k-1)\times 2^m$，從費馬尤拉定理有：

$$a\times 2^m\times 2^{\varphi(2k-1)}\equiv a\times 2^m\ (\mod (2k-1)\times 2^m)\ ，$$

即 $a\times 2^m$ 最多經過 f 的 $\varphi(2k-1)$ 次映射，必會對應到 $a\times 2^m$ 。又從**引理 2.1** 知，以第一組的項為起點，數字經 f 的 m 次映射，皆對應到 2^m 的倍數。因此，只要 $q\ge m+1$，在第 q 組中，會被前面一組的數字對應到的數所構成的集合 $B_q\cup A_q$ 都是一樣的，而且我們能夠清楚描述其中元素：$B_q\cup A_q=\{a\times 2^m \mid 1\le 1\le 2k-1\}$。若 $a\in A_q$，也就是那些「走一次就到下一組的數」，a 會滿足

$$2(a\times 2^m) > (2k-1)\times 2^m\ 。$$

所以 $a\times 2^m$ 可以是 $k\times 2^m$、$(k+1)\times 2^m$、$\cdots$、$(2k-1)\times 2^m$，共 k 個數字，即 $k=\min\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$。因此週期為 $(2k-1)\times 2^m$ 的連續遞增數列，收斂路線數為 k。 $\square$

2.2.2 公差為 d 的等差數列，在模 n 時形成的週期數列，其收斂路線數

目前已有連續遞增的週期數列（公差 $d=1$ 的等差數列）其收斂路線數的結果，接著來看一般的等差數列。以 1 當首項，公差為 $d=4$ 的數列為例，在模 7 時，是週期為 7 的數列：

$$1,5,2,6,3,7,4,1,5,2,6,3,7,4,\ldots\ 。$$

有以下收斂路線：

$${}_1 1 \xrightarrow{\text{移動 1 步}} {}_1 5 \xrightarrow{\text{移動 5 步}} {}_1 4 \xrightarrow{\text{移動 4 步}} {}_2 6 \xrightarrow{\text{移動 6 步}} {}_3 2 \xrightarrow{\text{移動 2 步}} {}_3 3 \xrightarrow{\text{移動 3 步}} {}_4 1 \xrightarrow{\text{移動 1 步}} \cdots$$

$${}_1 6 \xrightarrow{\text{移動 6 步}} {}_2 2 \xrightarrow{\text{移動 2 步}} {}_2 3 \xrightarrow{\text{移動 3 步}} {}_3 1 \xrightarrow{\text{移動 1 步}} {}_3 5 \xrightarrow{\text{移動 5 步}} {}_3 4 \xrightarrow{\text{移動 4 步}} {}_4 6 \xrightarrow{\text{移動 6 步}} \cdots$$

$${}_1 3 \xrightarrow{\text{移動 3 步}} {}_2 1 \xrightarrow{\text{移動 1 步}} {}_2 5 \xrightarrow{\text{移動 5 步}} {}_2 4 \xrightarrow{\text{移動 4 步}} {}_3 6 \xrightarrow{\text{移動 6 步}} {}_4 2 \xrightarrow{\text{移動 2 步}} {}_4 3 \xrightarrow{\text{移動 3 步}} \cdots$$

$${}_1 7 \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {}_2 7 \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {}_3 7 \xrightarrow{\text{移動 7 步}} {}_4 7 \xrightarrow{\text{移動 7 步}} \cdots$$

A_1 集合裡的元素以紅色標記，共有 4 個。

注意到上列的前三條收斂路線，其所構成的數字皆為 $1\sim 6$，將數字間的對應，寫成「循環」：$1\to 5\to 4\to 6\to 2\to 3\to\cdots$。在此循環中 1 經過了 3 組再走回

到 1，也可以說是往後走經過了 $1+5+4+6+2+3=7\times 3$ 步才回到 1，經過 3 組也代表 1 往後走會對應到 3 個不同的「走一次就到下一組的數」，分別是 4、6、3。對於所有的自然數 q，這個循環裡，有 3 個元素在 A_q 集合中。下圖 3 可以清楚的看出路線和循環之間的關聯。再從循環 $7\to 7\to\cdots$，其中 7 走回到 7 最少須經過的組數為 1，所以這個循環裡有 1 個元素在 A_q 集合中，綜合兩者，得 A_q 至少有 $3+1$ 個元素，也就是至少有 4 條收斂路線。

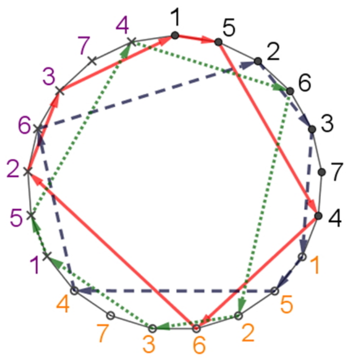


圖 3

一般而言，只要知道各循環歷經了幾組，不一定需要明確的知道 A_q 集合有哪些元素，一樣可以討論 A_q 集合內的元素個數。

引理 2.2 一組 n 項的週期數列 $\langle a_i\rangle$，某一循環所對應的收斂路線數為 r，若且唯若此循環中相異數字的和為 $n\times r$，也就是此週期數列的收斂路線數，即是各循環所對應的收斂路線相加：$\sum r$。

證明. 若循環中相異數字的和為 $n\times r$，代表任一個數往後走最少經過 r 組才又回到自己，而在分組的定義之下，數字走一次最多到下一組，表示循環中有 r 個在 A_q 中的相異數字，因此有：

循環中相異數字的和為 $n\times r$ $\Rightarrow$ 此循環所對應的收斂路線數為 r。

反之，若其一循環所對應的收斂路線數為 r，即此循環中有 r 個數在 A_q 集合中，從循環的定義知，循環中任一數 a 經 r 組又回到 a，也就是 a 經 f 的若干次映射，所對應到的相異數字和為 $n\times r$，因此我們有：

循環所對應的收斂路線數為 r $\Rightarrow$ 此循環中相異數字的和為 $n\times r$。

因此，我們又可以知道數列的收斂路線數，即是各循環所對應的收斂路線相加：$\sum r$。 □

一般公差為 d 的等差數列，模 n 時有任一個數 $a_m=s$ 經過 f 的映射對應到的

都是 $s+d\times s$：

$$f(s)=a_{m+s}=s+d\times s=(d+1)s(\mod n).$$

為了使等差數列在模 n 時滿足我們對週期 n 的數列，所要求的條件：週期 n 的數列，$1\sim n$ 在一組中都各出現一次，限制 $(n,d)=1$。上面例子裡的等差數列 $1,5,2,6,3,7,4,1,5,2,6,3,7,4,\ldots$，雖然是 $n=7$ 和 $d+1=5$ 互質的情形，但即使當 n 和 $d+1$ 不互質，例如週期為偶數 $(2k-1)\times 2^m$ 的連續遞增數列，從它們的循環本質上可以視為和週期為奇數 $2k-1$，公差 $d=1$ 的數列相同，看出哪些數會循環。我們一樣能看出當 n 和 $d+1$ 不互質時，數列裡有哪些數字會循環。

定理 2.3 設 $n=mq$，公差為 d 的等差數列，在模 $n=mq$ 時，若 $(mq,d)=1$，以及 $(m,d+1)=1$，若 q 的質因數全是 $d+1$ 的質因數，則收斂路線數為 $\dfrac{m+1}{2}$。

證明. 週期 n、公差為 d 的等差數列，其函數 f 的映射是：

$$f:a\mapsto(d+1)\times a\ (\mod n=mq)\ 。$$

因為 q 的質因數全是 $d+1$ 的質因數，所以每個數 a 經過 f 的若干次映射之後，都會對應到q **的倍數**，且再繼續往後移動任意次，也只有 q 的倍數會被對應到。又從模 m 時有 $(d+1)^{\varphi(m)}\equiv 1\ (\mod m)$，可得對於數列中的任意數 a，

$$a\times(d+1)^{\varphi(m)}\times q\equiv a\times q\ (\mod n=m\times q)\ 。$$

此式表示模 n 時，$a\times q$ 經過 f 的 $\varphi(m)$ 次映射，會對應到 $a\times q$，也就是週期為 n 的數列，$1\times q$、$2\times q$、$\cdots$、$m\times q=n$ 都會落在各自的循環內，且只有這些 q 的倍數會在循環內，由**引理 2.2** 知，將這些循環中不同的數字相加

$$1\times q+2\times q+\cdots+m\times q=mq\times\frac{m+1}{2}\ 。$$

從**引理 2.2** 因為一組有 mq 項，所以收斂路線數為 $\dfrac{m+1}{2}$。 □

我們不用知道這個等差數列中 A_q 集合中到底有什麼元素，甚至利用 $1\sim n$ 在一組內都出現的特性，也**不必**確定它的首項是什麼，只要這個公差為 d 的等差數列，模 n 時滿足一個週期中有 n 個數，而這 n 個數恰好就是 $1\sim n$ 之間的每一個正整數，選取不同的首項，就如同整個數列的平移一般，A_q 集合的元素個數，在確定 n 和 d 的時候，就已經被決定了。

2.3 等差數列模 n 時，其中的數字個別循環所需組數

在研究模 n 時的等差數列的過程中，我們知道同樣的循環在考慮項的差異後，可能構成不同的收斂路線，由於其數字移動方式十分規律

$$f : q \mapsto (d+1)a \pmod{n}$$

我們利用移動方式的規律性，知道模 n 時的等差數列中，以某數 a 所在的循環內，可以拆成**幾條**獨立的收斂路線。而從**引理 2.2**，這也就是在問 a 所在的循環，最少要經過幾組才又回到 a，即 a 的循環組數的問題。

為求公差為 d 的等差數列，模 n 時會一組內 $1 \sim n$ 皆恰出現一次，限制 d 和 n 互質。我們只須討論模 $2k-1$ 時的等差數列，其中 $d+1$ 和 $2k-1$ 互質。因為若將模數 $2k-1$ 乘上 $d+1$ 的任一個因數，等差數列裡數字的移動模式和原數列（模 $2k-1$) 裡數字的移動模式相仿，也就是伸縮，於是循環的組數能由原數列得出。

以下先給出 $(d+1, 2k-1) = 1$ 時的循環組數判斷原理。

在模 $2k-1$ 時，公差為 d，且 $(d, 2k-1) = 1$、$(d+1, 2k-1) = 1$ 時，判斷任一數 a 所在循環對應的收斂路線數的方法：

將 a 向後走 m 次到 b

$$a \times (d+1)^m \equiv b \pmod{2k-1} \text{ 。}$$

寫成除法原理的形式

$$a \times (d+1)^m = (2k-1)q + b$$

其中 $1 \leq b \leq 2k-1$（這裡與一般除法原理的寫法中 $0 \leq b \leq 2k-2$ 不同）。

可以用 q 的 $d+1$ 進位寫法中每一位的數字和為 d 的 u 倍，判斷出循環所需的組數為 u。

以模 11，公差為 2 的數列為例，拿 1 當起點往後走：

$$\boxed{1, 3, 5, 7, 9, 11}\,\boxed{2, 4, 6, 8, 10,}\,\boxed{1, 3, 5, 7, 9, 11}\,\boxed{2, 4, 6, 8, 10,}\,1, \cdots$$

橘色和藍色方框把「11」區隔開來，意即數字往後走超過幾個方框，就是乘以 3 超過了幾次「11」。以下說明若 1 往後再走到 1 之前超過了 $2u$ 個 11，1 的循環組數就是 u。

$1 \times 3^2 = 11 \times 0 + 9$，代表數字 1 往後走兩次（乘以 3 兩次）。以 3 進位表示：$1_{(3)} \times 100_{(3)} = 102_{(3)} \times 0_{(3)} + 100_{(3)}$。再往後走一次乘上 $10_{(3)}$：$1_{(3)} \times 1000_{(3)} = 102_{(3)} \times 2_{(3)} + 12_{(3)}$。紅色的 2 代表的是 $100_{(3)}$ 往後走「超過」2 次 $102_{(3)}$，對照數列裡數字的移動，是超過 2 次 11。再往後走一次乘上 $10_{(3)}$：$1_{(3)} \times 10000_{(3)} = 102_{(3)} \times 211_{(3)} + 1_{(3)}$，走回到 1 的時候共超過 $2+1+1=4$ 次 11。而從式

$$1 + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{11 \text{ 個公差 } 2} \equiv 1 + 2 \times 11 \equiv 1 \pmod{11}$$

可看出相距一組的「1」之間隔了 2 個 11。而從 1 經若干次移動走回到 1 的時候共超過 $4 = 2 \times 2$ 次 11，可以判斷出 1 循環需要 2 組。

一般的情形如下面的討論。

若向後移動一次（乘以 $d+1$），沒有超過 $2k-1$，**以 $d+1$ 進位來看**，整個式子乘以 $10_{(d+1)}$，同餘數 b 乘以 $10_{(d+1)}$ 後仍介於 1 和 $2k-1$ 之間，商中每一位的數字和不變。而若數字向後移動一次，即同餘數 b 乘以 $10_{(d+1)}$ 後，介於 $2k-1$ 和 $(2k-1)\times(d+1)$ 之間，除了末位數字以外，只看其他位的數字，仍是相同的數，只是都進了一位，可以由此看出每一次的移動超過**幾次** $2k-1$。總的來說，可從商的 $d+1$ 進位表示法中每一位的數字和知道總共超過幾次 $2k-1$。

從模 $2k-1$ 時的等差數列來看，其實 a_i 若要走到後 u 組的同一個數字 $a_{i+(2k-1)\times u}$，有 $a_{i+(2k-1)\times u} \equiv a_i + u \times d(2k-1) \pmod{2k-1}$。因此可以從數字往後走共超過了幾次 $d\times(2k-1)$，判斷超過幾組——對應至幾個 A_q 中的元素：

> **判斷循環所需組數的步數：**
> 步驟一：盡可能找到一個較小的 m 滿足
>
> $$a \times (d+1)^m \equiv a \pmod{2k-1}$$
>
> 步驟二：用 $d+1$ 進位除法，以 $2k-1$ 除 $a\times(d+1)^m$，
>
> $$a \times (d+1)^m \equiv (2k-1)q + d$$
>
> 直到餘數為 a，或是 a 的倍數。
> 步驟三：檢查至停止時，商中每一位的數字和為 d 的幾倍。

在步驟三中，若得到商中每一位數字和為 dr，則 r 就是 a 所在的循環所經過的組數，亦為此循環所對應的收斂路線數。

如果 $d+1$ 和 n 不互質，仍可調整上述步驟找出循環所對應的收斂路線數。

舉例來說，模 30 時，首項為 1，公差為 $d = 7 = 2^3 - 1$ 的數列。將 30 寫成 mq，其中 $m = 15$ 是和 $d+1 = 2^3$ 互質的部分、$q = 2$ 的因數都是 $d+1 = 2^3$ 的因數：$30 = 15 \times 2$、$d+1 = 2^3$。所以在循環中的數字，就是 $q = 2$ 的倍數，以在循環中的數 12 為例，只須考慮模 $30/2 = 15$ 時，首項為 1，公差為 $d = 7 = 2^3 - 1$ 的數列中的 $12/2 = 6$，有 $6 \times 8^4 \equiv 6 \pmod{15}$，以及 $6\times 8^4 = 15 \times 1638 + 6$，其中 $1638 = 3146_{(8)}$ 將八進位商中的每一位數字加總為 $3+1+4+6 = 14 = 7\times 2$，即循環經過了 2 組才回到 6。故模 $2\times3\times5$ 時，公差為 2^3-1 的數列，循環中的數字 12 經過了 2 組才又回到 12，此循環對應到的收斂路線數為 2。

實際上，首項是 1，公差為 2^3-1 的等差數列在模 15 時是週期為 15 的數列：

$$1,\ 8,\ 15,\ 7,\ 14,\ 6,\ 13,\ 5,\ 12,\ 4,\ 11,\ 3,\ 10,\ 2,\ 9,\ 1,\ \ldots \text{。}$$

6 所在的循環：

$$_16 \to {}_13 \to {}_19 \to {}_212 \to {}_36 \text{。}$$

對照首項是 1，公差為 2^3-1 的等差數列在模 30 時是週期為 30 的數列：

$$\begin{aligned}&1,\ 8,\ 15,\ 22,\ 29,\ 6,\ 13,\ 20,\ 27,\ 4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 2,\ 9,\ 16,\\ &23,\ 30,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 3,\ 10,\ 17,\ 24,\ 1,\ \ldots\ 。\end{aligned}$$

12 所在的循環：

$$_{1}12 \to {}_{2}6 \to {}_{2}18 \to {}_{2}24 \to {}_{3}12\ 。$$

所以在模 30 時，公差為 7 的等差數列，12 所在的循環，可以完全對應到模 15 時，公差為 7 的等差數列中 6 所在的循環。兩個循環只是裡面的數字伸縮兩倍的關係，因此兩個在不同數列中的循環對應的收斂路線數皆為 2。

2.4 等差數列在模 n 時形成的週期數列，循環長度的上界

文章前面的部分已經討論過循環組數的問題，而循環組數問題其中一部分用到了：找一個盡可能小的 m 使得以下同餘式成立，

$$(d+1)^m \equiv 1 \pmod{n}\ 。$$

為了簡化找「循環所需組數」的過程，我參考文獻 [4] 後得知，若模 n 時，n 不是 1、2、4、p^α、$2p^\alpha$ 時（p 為奇質數），m 都不大於 $\dfrac{\varphi(n)}{2}$，而我進一步將 n 更細地分類，能找到不同情形 m 更好的上界。而我們討論 2.3 數字循環所需組數時，都將情形化約至週期為奇數時，於是以下討論也只需討論模 n，其中 n 是奇數的情形。

2.4.1 循環長度：

將滿足以下同餘式的最小正整數 m

$$a(d+1)^m \equiv a \pmod{n}$$

定義成 $a \to f(a) \to \cdots \to f^m(a) \to \cdots$ 的循環長度，記為 a 的循環長度。

當週期是 n 時，其中數字 n 的循環長度顯然是 1。

從參考文獻 [4] 知，n 是 1、2、4、p^α、$2p^\alpha$ 時，原根存在，且恰有 $\varphi(\varphi(n))$ 個，若 $d+1$ 是 n 的原根，那麼有些數，例如 1 的循環長度就會是 $\varphi(n)$。然而對於其他類型的 n 和 $d+1$，可以找到比 $\varphi(n)$ 更小的循環長度的上界，或確切值。

定理 4.1 公差為 $n-2$ 的等差數列，在模 n 時形成的週期數列，a 的循環長度為 2，若 $a \neq n$。

證明. a 的移動方式：

$$f: a \mapsto (n-1)a \pmod{n}\ ，$$
$$a(n-1)^2 \equiv a(-1)^2 \equiv 1 \pmod{n}\ 。$$

知 a 的循環長度為 2。 ◻

定理 4.2 公差為 d 的等差數列，在模 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 時形成的週期數列，p_i 是奇質數、α_i 是正整數。若對於所有的 i，$\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 的最大公因數為 r，則數列裡任一個數的循環長度是 $\varphi(n)/r$ 的因數。

證明. 從所有 $\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 的最大公因數為 r，知道 $r \mid \prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$，也就是 $\frac{1}{r}\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 是整數。故

$$(d+1)^{\frac{\varphi(n)}{r}} \equiv (d+1)^{\frac{1}{r}\prod_j \varphi(p_j^{\alpha_j})} \equiv \left((d+1)^{\varphi(p_i^{\alpha_i})}\right)^{\frac{1}{r}\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})} \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}\ 。$$

因此，若 $(d+1)^m \equiv 1(\bmod n)$，則有 $m \,\Big|\, \dfrac{\varphi(n)}{r}$。

◻

而從 $\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 都是偶數可知 $\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 的最大公因數至少是 2^{k-1}，於是改寫定理 4.2，有以下比較容易看出的所有 $\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 的公因數：

系理 4.1 公差為 d 的等差數列，在模 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 時形成的週期數列，p_i 是奇質數、α_i 是正整數。數列中任一個數字的循環長度是 $\varphi(n)/2^{k-1}$ 的因數。

利用前面提到的定理 4.2和系理 4.1找對所有的 i，$\prod_{j\neq i}\varphi(p_j^{\alpha_j})$ 的公因數的想法，再把質數分為被除 4 餘 1 和被除 4 餘 3 兩種，可以知道只要 n 可以被表示成多個被除 4 餘 1 的質數之乘積，那麼系理 4.1 的 $\dfrac{\varphi(n)}{2^{k-1}}$ 可以改成 $\dfrac{\varphi(n)}{4^{k-1}}$。

舉例來說若 $n=5\times13\times17$，那麼考慮 s 的幾次方和 1 同餘，其中 $(s,n)=1$，則有

$$s^{\frac{\varphi(5)\times\varphi(13)\times\varphi(17)}{4^2}} \equiv s^{48} \equiv 1 \pmod{5\times13\times17}\ 。$$

2.5 一般週期數列 $\langle a_i\rangle$ 收斂路線數的最小上界。

在公差為 d 的等差數列，模 n 時形成的週期數列的討論中，我們可以利用引理 2.2，從週期數列的「循環所需組數」，得知此數列的收斂路線數。而這樣的對應關係，其實還可以告訴我們一些有趣的事實，由於作品中討論的週期數列中限制一組裡要是 $1\sim n$ 的排列，收斂路線數會有上界：

定理 5.1 週期為 n 的數列，收斂路線數的一個上界為 $\dfrac{n+1}{2}$。

證明. 利用引理 2.2。若各循環中相異數字的和為最大值，則數列中的每一個數字 1、2、$\cdots$、n 都必須在某個循環中，將其加總

$$1+2+\cdots+n = n\times\frac{n+1}{2}$$

因此我們從**引理 2.2** 得週期為 n 項的數列，收斂路線數不會超過 $\dfrac{n+1}{2}$。 □

當週期 $n = 2k-1$ 時，收斂路線數不會超過上界 $\dfrac{n+1}{2} = k$，再從**定理 2.1** 週期為 $2k-1$ 的連續遞增數列收斂路線數為 k，可得週期為 $2k-1$ 的數列，收斂路線數的「最小上界」為 k。而若收斂路線數為 k，必須要每個數字都在某個循環中；反之如果有一個數不在循環裡，收斂路線數就比 k 還小。

> **定理 5.2** 週期為 $2k-1$ 的數列，若有 $|A_1| > k$，則收斂路線數小於 k。

證明. $|A_1| > k$，又從收斂數列數的上界知對於某個 q 有 $|A_q| \leq k$，$A_1 \setminus A_q \neq \varnothing$，因此必定有數字不在任一個循環中，因此各循環內相異數字的和會小於

$$1 + 2 + \cdots + (2k-1) = (2k-1)k \text{ 。}$$

從**引理 2.2** 知，數列的收斂路線數會小於 k。故得證。 □

定理 5.1 告訴我們一個收斂路線數的上界 $\dfrac{n+1}{2}$。週期為奇數 $n = 2k-1$ 的數列，收斂路線數的最小上界，恰好會是**定理 5.1** 給出的上界 $\dfrac{n+1}{2} = k$。而我們也可構造出週期為偶數 $n = 2k$ 的數列，使其收斂路線數為 k，甚至構造週期 n，收斂路線數為 r 的數列，只要滿足 r 不大於 $\dfrac{n+1}{2}$ 即可。

> **引理 5.1** 週期 n 的數列，若有 $f(i) = n - i$，則 $f^2(i) = i$，也就是說 i、$n-i$ 在同一個循環中，對應到一條收斂路線。

證明. 令 $a_m = i$，若有 $f(i) = f(a_m) = a_{m+i} = n - i$，則 $f^2(i) = f(a_{m+i}) = a_{m+i+n-i} = a_{m+n} = a_m = i$，有 $i + f(i) = n = n \times 1$。於是 i、$f(i) = n - i$ 在同一個循環中，對應到一條收斂路線。 □

以下給定 r，$r \leq \dfrac{n+1}{2}$，構造週期為 n，收斂路線數為 r 的數列，下面的例子說明構造的想法。

當 $n = 2k-1$ 時，利用**引理 5.1** 來構造數列：以下數字放置的方法都滿足 $f(i) = 2k-1-i$，故而任一對數字若在週期 $2k-1$ 的數列中出現都會對應到一條收斂路線。

而為了不重複寫出本質上相同的數字相對位置，限制 $i < 2k-1-i$：

數字相對位置	「__」的個數
$\cdots, 1, 2k-2, \cdots$	0
$\cdots, 2, \_\_, 2k-3, \cdots$	1
$\cdots, 3, \_\_, \_\_, 2k-4, \cdots$	2
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots, k-1, \_\_, \cdots, \_\_, k, \cdots$	$k-2$

以下構造週期為 $2k-1$，收斂路線數為 4 的數列，其中 $k \geq 4$。觀察「_」的個數，可以將數列排列如下：

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1-7}, 5, 3, 1, 2k-2, 2k-4, 2k-6, 2k-1, \ldots$$

由於 5、3、1 分別和 $2k-6$、$2k-4$、$2k-2$ 形成不同的循環，從**引理 5.1** 知總共對應到 3 條收斂路線，而再加上 $2k-1 \to 2k-1 \to \cdots$ 的循環所對應到的路線，共有 4 條。

而為了要讓 a_1、a_2、$\cdots$、a_{2k-1-7} 不影響收斂路線的數目，讓他們都不會在 A_1 中，於是將 a_1、a_2、$\cdots$、a_{2k-1-7} 依數字大小遞減排序，也就是把集合

$$\{1,\ 2,\ \ldots,\ 2k-1\} \setminus \{1,\ 3,\ 5,\ 2k-6,\ 2k-4,\ 2k-2,\ 2k-1\}$$

裡的數依大小遞減排列，有 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{2k-1-7}$，又 $a_{2k-1} = 2k-1$，一組裡的其他項必定比 $2k-1$ 還小，於是有 $a_1 < 2k-1$。類似地，對其餘尚未被決定的 $2k-1-7$ 項 a_m 來說，當 $1 \leq m \leq 2k-1-7$ 時，從 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{2k-1-7}$，有

$$\begin{aligned} a_m &< 2k-1-m+1 \\ g(m) = a_m + m &< 2k-1-m+1+m = 2k \end{aligned}$$

其中第 $2k$ 項是第二組的第一項，$g(m) < 2k$ 代表的是 a_m 走一次不會到下一組，也就是 $a_m \notin A_1$，當然也有 $a_m \notin A_q$，$\forall\ q \in \mathbb{N}$。這樣將集合 $\{1, 2, \ldots, 2k-1\} \setminus \{1,\ 3,\ 5,\ 2k-6,\ 2k-4,\ 2k-2,\ 2k-1\}$ 裡的數 a_m 依序遞減排列的構造方式能讓 a_m 都不在 A_q 中，於是討論收斂路線數也就是 $\min_{q \in \mathbb{N}}\{|A_q|\}$ 時，只需關注集合 $\{1,\ 3,\ 5,\ 2k-6,\ 2k-4,\ 2k-2,\ 2k-1\}$ 裡有幾個數在 A_q 中即可。從已知：1、3、5，$2k-2$、$2k-4$、$2k-6$ 分別形成的循環及 $2k-1$ 自成一個的循環，共對應到 4 條路線。

定理 5.3（$r \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ 時，收斂路線數 r 的週期數列 $\langle a_i \rangle$ 存在性的定理）
給定 n、r，$r \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$，存在週期 n，收斂路線數 r 的數列。

證明. 利用**引理 5.1** 來構造數列：

數字相對位置	「_」的個數
$\cdots, 1, n-1, \cdots$	0
$\cdots, 2, \_, n-2, \cdots$	1
$\cdots, 3, \_, \_, n-3, \cdots$	2
$\vdots$	$\vdots$
$\cdots, \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor, \_, \cdots, \_, n - \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$	$\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor - 1$

從**引理 5.1**，顯然用上了其中 $r-1$ 對數字的話，加上必有的循環 $n \to n \to \cdots$ 所對應到的路線，就至少有 r 條收斂路線。

以下構造收斂路線數為 r 的數列，其中 $r \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$，考慮兩種不同的情形，先決定數列中的其中幾項，使其「至少」有 r 條路線，再證明有一種排列方式，使得週期數列恰有 r 條收斂路線。

Case 1. 以 1、3、5、$\cdots$ 等奇數作為起點的路線共有 $r-1$ 條，其中 n 置於一組的最後一項。

將 1、$n-1$ 放入 $\cdots, 3, \_, \_, n-3, \cdots$ 中的「_」，再將這四項放入 $\cdots, 5, \_, \_, \_, \_, n-5, \cdots$ 中的「_」$\cdots$，直到共用上了 $r-1$ 對數字，而將 n 置於一組的最後一項，再把這些項放在一個週期中的最後方，也就是：

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-(2r-1)}, \underbrace{2r-3, \dots, 3, 1, n-1, n-3, \dots, n-2r+3, n}_{共 2r-1 項}, \dots$$

Case 2. 以 1、3、5、$\cdots$ 等奇數作為起點的路線總共不足 $r-1$ 條，則將 n 置於 $2, \_, n-2$ 的「_」中。

除了原有以奇數作為起點的路線，再考慮將 $2, \_, n-2$ 放入 $\cdots, 4, \_, \_, \_, n-4, \cdots$，$\dots$，直到加上原有以奇數為起點的路線，共用上了 $r-1$ 對數字，而重新考慮 n 的位置，將其置於 $2, \_, n-2$ 的「_」。將 $\cdots, 4, 2, n, n-2, n-4, \cdots$ 置於 $\cdots, 3, 1, n-1, n-3, \cdots$ 後方，如下所示：

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-(2r-1)}, \underbrace{\dots, 3, 1, n-1, n-3, \dots 4, 2, n, n-2, n-4 \dots}_{共 2r-1 項}, \dots$$

綜合以上所述，Case 1 和 Case 2 裡已經被決定的項所構成的循環，恰對應到 r 條收斂路線：

Case 1，其中 1、3、5、$\cdots$ 分別和 $n-1$、$n-3$、$n-5$、$\cdots$ 形成的循環，以及 n 自己形成的循環，共對應到 r 條收斂路線；

Case 2，其中 1、2、3、4、5、$\cdots$ 分別和 $n-1$、$n-2$、$n-3$、$n-4$、$n-5$、$\cdots$ 形成的循環，以及 n 自己形成的循環，總共對應到 r 條收斂路線。

而為使 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-2r+1} 不影響收斂路線的數目，讓它們都不會在 A_1 中，也就是讓它們走一次都還在同一組，於是將 a_1、a_2、$\cdots$、a_{n-2r+1} 依數字大小遞減排列，也就是把前 $n-2r+1$ 項構成的集合

Case 1： $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, 3, 5, \dots, n-1, n-3, n-5, \dots, n\}$

Case 2： $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n-2, n-3, n-4, n-5, \dots, n\}$

裡的數依大小遞減排列，有 $a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-2r+1}$，又 Case 1 和 Case 2 中的 n 都不在第一項，一組裡的其他項必定比 n 還小，故 $a_1 < n$。類似地，其餘尚未被決

定的 $n-2r+1$ 項的大小，當 $1 \le m \le n-2r-1$ 時，有

$$\begin{aligned} a_m &< n-(m-1) \\ g(m) = a_m + m &< n-(m-1)+m = n+1 \end{aligned}$$

其中 $n+1$ 是第二組的第一項，$g(m) < n+1$ 代表的是 a_m 走一次不會到下一組，也就是 $a_m \notin A_q$，$\forall\, q \in \mathbb{N}$。這樣將前 $n-2r+1$ 項（記為 a_m）依序遞減排列的方式能讓 a_m 都不在 A_q 中。於是討論 $\min\limits_{q\in\mathbb{N}}\{|A_q|\}$ 時，只須關注集合

Case 1：$\{1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n-3,\ n-5,\ \ldots, n\}$

Case 2：$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n-2,\ n-3,\ n-4,\ n-5,\ \ldots, n\}$

裡有幾個數在 A_q 中即可。從前面的討論知 Case 1 和 Case 2 都共對應到 r 條路線。 □

定理 5.4（收斂路線最小上界的定理）

週期為 n 的數列，收斂路線數的最小上界為 $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$。

證明. 從**定理 5.1** 知，收斂路線數有一個上界 $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$，又從**定理 5.3** 知，至少有一個數列的收斂路線數為 $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$，故得證。 □

3　結論

由於作品中討論的週期正整數數列的特性，我們能用不同的方法描述週期數列 $\langle a_i \rangle$ 的收斂路線數：$\min\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|A_n|\}$、$\dfrac{\text{循環裡的相異數字和}}{\text{一組項數}}$。從這樣不同的觀點，對於一組裡恰為 $1 \sim n$ 的排列的週期數列，可以直接從公差、模數 n，判斷等差數列在模 n 時所構成的週期數列其收斂路線數，以及給定不超過上界的收斂路線數、週期，構造出一個相對應的數列，藉此也得到收斂路線數的最小上界 $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$。

等差數列模 n 時的情形，基本上它是類推自週期為奇數與偶數的連續遞增數列。等差數列各項往後移動的方式很固定，於是利用「數字的對應」及「循環中的數字和」，能得到收斂路線數，然而這方式必須將循環中的每一個數字找出來，所以我抽出實際上移動的步數與公差的關聯，而產生出使用 $d+1$ 進位的除法，其商與收斂路線的關係。這個方法，就不用將循環中的每一個數字找出來，大幅改進了對於模 n 時，找到等差數列中各個循環對應的收斂路線數，而隨後對於找一個較小的正整數 m，使得 $(d+1)^m \equiv 1 \pmod{n}$，更精簡了當 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 時（其中 p_i 是奇質數，α_i 是正整數），判別組數的過程。

最後利用循環裡相異數字的總和與收斂路線數的對應關係、以及特殊的循環、「走一次就到下一組的數」個數給出的收斂路線數上界，構造週期 n，收斂路線數不大於 $\frac{n+1}{2}$ 的數列。

參考資料 (Reference)

[1] 普通高級中學數學，第一、二冊 (2012)，新北市：翰林。

[2] James K Strayer (1994). Elementary number theory, PWS publishing company.

[3] Jeffrey C Lagarias, E Rains, Robert J Vanderbei (2009). The Kruskal Count. The Mathematics of Preference, Choice and Order. Springer-Verlag: Berlin Heidelberg, pp. 371–391. (http://arxiv.org/abs/math/0110143)

[4] 唐太明（譯）(2016)，解析數論導引（頁 188 —196），（原作者:Tom M. Apostol），哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社，（原著出版年：1998）。