作品評語

張鎮華教授
國立臺灣大學數學系

整數分拆問題是數論及組合學中的一個重要問題，它最先於十八世紀時由萊布尼茲提出，經由歐拉發展成一種分拆理論，再經興登堡、赫謝爾、第摩根、希爾沃斯特、凱利、麥克馬洪等人後續提出貢獻，成為一套完整的理論。整數分拆問題是要將一個正整數表示成一些正整數的無序和，目標是要對固定的 m 計算分拆的數目 $p(m)$，已經知道的是，$p(m)$ 並沒有用 m 描述的簡單公式。

這篇論文主要在探討整數分拆的一個變型問題，精確地說，是要將一正整數 m，分拆為 n 個正整數的和，使得任一數小於其他 $n-1$ 數的和，用 $f(m,n)$ 表示這種分拆的個數。這個問題當 $n=3$ 的時候，前人已經有答案 $f(m,3)=\left[\frac{1}{48}\left(m^2+3m+21+(-1)^{m-1}3m\right)\right]$。本篇論文用兩種不同的方法，重新證明前人有關三數分拆的前述結果，第一種方法是直接計算，第二種方法用下面的遞迴關係，比較快的得到結論：當 m 是偶數時 $f(m,3)=f(m-3,3)$，當 m 是奇數時 $f(m,3)=f(m-3,3)+\left[\frac{m+1}{4}\right]$。接著用類似的方法，得到四數分拆的結果

$$f(m,4)=\left[\frac{1}{288}\left(m^3+\frac{9}{2}m^2+\frac{9}{2}m+128+(-1)^{m+1}\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{15}{2}m\right)\right)\right] \quad ,$$

其推導用到 $n=3$ 的結果，而且計算更複雜、更精緻。至於五數或以上的分拆，則只列出遞迴關係，並求出相關的生成函數，精確的公式尚待後續發展。