

機率導論講義 謝南瑞  
\*\*版權保留\*\*  
本課程適於大二大三同學

\*\*\*\*\*

進度, 成績, 習題

§ 本講義進度與習題取自 Richard Durrett: The Essentials of Probability, Duxbury Press 1994. 本地滄海書局有售 (TEL : 02 27090781)

§ 習題與小考6次, 每次約8至10題習題, 取約2至4題作小考. 6次小考取5次作平時成績, 佔學期成績百分之20. 期中考與期末考各佔學期成績百分之40.

§ 第一次習題與小考:p30 4.6,4.16;p35 5.8,5.12;p44 6.16,6.18;p56 1.14,1.20;p62 2.10,2.16

§ 第二次習題與小考:p69 3.12,3.16;p78 4.8,4.12;p79 4.16,4.20;p98 1.6,1.8;p108 2.8,2.16

§ 第三次習題與小考:p121 4.10,4.14;p129 5.4;p130 5.10,5.14;p139 7.6,7.10,7.12

§ 第四次習題與小考:p145 8.10,8.16;p158 1.4;p159 1.10,1.14,1.18;p167 2.16,2.22

§ 第五次習題與小考:p179 3.10,3.16;p180 3.20;p192 4.12,4.16;p193 4.24;p227 1.12,1.16

§ 第六次習題與小考:p235 2.4,2.8;p236 2.12,2.14;p243 3.10,3.16;p249 4.6,4.10

## 第一章 基本機率性質

- § 隨機試驗: 丟銅板、丟骰子、玩紙牌
- § 樣本空間
- § 事件
- § 事件的操作: 同時發生、有一發生、否、餘、差、DeMorgan 法則
- § 排列與組合
- § 二項定理與多項定理
- § 甕問題:  $n$ 個球放入標號  $1 \dots r$  甕中. 方程之整數解個數
- § 機率與其意涵
- § 機率三公設與其意涵
- § 基本性質: 餘事件發生機率、單調性、兩事件中有一發生機率
- § 性質:  $n$  事件中有一發生的機率式
- § Laplace 機率空間 (等機率空間)
- § 甕問題: 甕中有  $M$  紅球  $N$  白球, 不放回地取  $n$  球. 問: 取得  $r$  紅球的機率
- § 配對問題:  $N$  人將每人的帽子都放於房間中央, 再各自隨機地選一頂. 問: 1、沒有人選到自己帽子的機率 2、恰有  $k$  人選到自己帽子的機率. 討論  $N$  大時的近似值
- § 售票問題:  $2n$  人排隊買票.  $n$  人持 500 元券,  $n$  人持 1000 元券. 票價 500 元, 售票員不另備鈔. 問: 所有人都買到票的機率

§ 等候問題: 甲與乙約定中午12時至1時在校門口見面, 先到者等候20分鐘. 問: 兩人見到面的機率

§ 機率視為集合函數: 單調連續性

§ Bertrand 詭論: 在圓周上隨機地取一弦, 弦長大於圓內接正三角形邊長的機率

## 第二章 條件機率

§ 獨立性

§ 條件機率: 已知事件  $F$  發生之情況下, 發生事件  $E$  之機率

§ 意涵: 兩階段試驗

§ 甕問題: 甕中有 8 紅球 4 白球, 不放回地任取兩球. 問: 所取球皆紅的機率

§ 全機率公式

§ 乘公式

§ Bayes 公式

§ 意涵: 先驗機率與後驗機率

§ 銅板問題: 甕中有兩銅板, 一為公正出現正面機率為  $1/2$ , 一為不公正出現正面機率為  $1/3$ . 自甕中取一銅板且丟出正面. 問: 所取出之銅板為公正者之機率

§ 車禍問題: 一城市中有兩種計程車, 藍牌與綠牌, 各佔百分之 85 與 15. 有人目擊綠牌車肇事, 而此人正確分辨顏色之正確率為百分之 80. 問: 確為綠牌車肇事之機率

§ 多個事件的兩兩獨立與完全獨立

§ 破產問題: 甲乙兩人以丟銅板對賭, 若出現正面甲贏乙 1 元, 若出現反面乙贏甲 1 元. 設銅板出現正面的機率為  $p$  且令甲有  $i$  元而乙有  $N - i$  元. 問: 各自的破產機率

§ Laplace 問題: 箱中有  $k + 1$  個銅板, 標號  $0 \cdots k$ , 第  $i$  銅板出現正面機率為  $i/k$ . 自箱中任取一銅板連續丟擲且紀錄其出現正或反面. 已知前  $n$  次都出現正面, 問第  $n + 1$

次也丟出正面的機率. 討論  $n, k$  大時的近似值

§ 條件機率亦滿足機率三公設

### 第三章 隨機變數與分佈

§ 意涵與符號

§ 甕問題: 甕中有3白球,3紅球,5黑球,任取3球. 白球得1元,紅球失1元,黑球不得  
不失. 問: 得錢與失錢的機率

§ 分佈函數

§ 分佈函數的刻劃: 遞增、右連續、漸近值

§ 註: 左極限

§ 離散隨機變數 (分佈) 與其機率函數

§ Bernoulli 分佈與二項分佈

§ 二項分佈的另種形式, 直線格子點上的隨機漫步

§ 幾何分佈與負二項分佈

§ Poisson 分佈

§ Poisson 分佈與二項分佈的關連

§ 連續隨機變數 (分佈) 與其密度函數

§ 密度函數的刻劃: 非負、積分 1

§ 均勻分佈、指數分佈、正規分佈

§ 標準正規分佈與其尾估計

§ 正規分佈與二項分佈的關連: DeMoivre-Laplace 定理

§ 出事率: 致命事件的存活期為一連續隨機變數. 出事率函數定義為  $\lambda(t) := f(t)/(1-F(t))$ . 討論  $F, f, \lambda$  三者的關連. 討論  $\lambda$  為常數的充要條件.

§ Gamma 分佈與 Beta 分佈

§ Cauchy 分佈

§  $g(X)$  的密度函數

§ 兩隨機變數的結合分佈

§ 以結合分佈表結合機率

§ 結合機率函數與結合密度函數

§ 邊際分佈

§ 獨立性

§ 獨立性的結合密度函數刻劃

§ 多變量情形

§ 獨立實驗: 某實驗可能出現  $1 \dots r$  情況, 情況  $i$  出現的機率為  $p_i$ . 此實驗獨立地進行  $n$  次. 令  $X_i$  表  $n$  次中第  $i$  情況出現的次數. 問:  $X_i, i = 1 \dots r$  的結合機率函數.

§ Poisson 分佈問題: 一日中來店顧客數為 Poisson 分佈, 參數令為  $\lambda$ . 設男客與女客之機率, 分別是  $p$  與  $1-p$ . 証: 男客與女客為獨立的 Poisson 分佈

§ 打靶問題: 半徑為  $R$  的圓靶, 靶心為原點. 令彈著點為靶上的均勻分佈. 求: 1, 彈著點  $X$  座標與  $Y$  座標的結合密度函數 2, 彈著點與靶心距離的分佈函數

§ 銅板問題: 出現正面機率為  $p$  的銅板丟  $n+m$  次, 令前  $n$  次中出現正面次數為  $X$ , 而出現正面總次數為  $Z$ . 求:  $X$  與  $Z$  的結合機率函數

§ Buffon 問題: 平面以平行線分割, 間隔  $D$ . 丟一根長  $L$ ,  $L < D$ , 的針於平面上. 針與某線相交的機率

§ 平面點分佈問題: 座標平面的點坐標為  $(X, Y)$ . 設  $X$  與  $Y$  獨立, 其密度函數為可微. 且結合密度函數僅和  $(X, Y)$  與原點距離有關. 証:  $X$  與  $Y$  有相同的正規分佈

§ 獨立隨機變數的和: 離散情況

§ 獨立隨機變數的和: 連續情況

§ 兩隨機變數的條件分佈: 符號與意涵

§ 一些條件分佈的計算: 離散、連續、混合

## 第四章 期望值與相關的巨觀量

- § 期望值: 意涵與符號
- S 性質:  $g(X)$  的期望值、 $X$  的級距 (動差)
- § 一些分佈的期望值與級距的計算
- § 離散隨機變數的機率生成函數
- § 隨機變數的級距生成函數
- § 一些計算
- §  $g(X, Y)$  的期望值
- § 期望值的線性, 序性, 加性
- § 期望值的界性、無窮大的可能
- § 獨立隨機變數期望值的乘性
- § 獨立隨機變數之和的生成函數
- § 卡方分佈的生成函數
- § Wald 公式
- § 結合生成函數
- § 性質: 若  $X, Y$  為獨立且有相同的正規分佈, 証:  $X+Y$  與  $X-Y$  獨立
- § 變異數與標準差: 意涵與符號
- § 性質:  $aX + b$  的期望值、生成函數與變異數

§ 一些計算

§ 等候問題: 電話總機所接收之兩通電話間的時差為指數分佈. 已知平均而言等候時間為 20 秒. 問: 接收到一通電話後, 30 秒內沒收到下通電話的機率

§ 品管問題: 某精密元件的直徑長為正規分佈. 已知平均長為 100 毫米, 標準差為 2 毫米. 要求與平均長誤差 5 毫米以上者必須廢棄. 問: 平均廢棄率

§ 共變異數、相關與不相關

§ 隨機變數之和的變異數

§ 一些計算:

§ 相關係數

§ Cauchy-Schwarz 不等式

§ 雙變量正規分佈

§ 獨立同分佈序列的樣本平均與樣本變異數

## 第五章 極限定理與其它

§ Markov 不等式、 $\phi$ -不等式、Bernstein–Chernoff 不等式

§ Chebyshev 不等式、單邊 Chebyshev 不等式

§ 配對問題: 男女各 100 人, 任取 2 人成一對. 問: 100 對中最多 30 對是 1 男 1 女組成

之機率的適當上界

§ 弱大數法則與其證明

§ 強大數法則與其四級距情況的證明

§ 中央極限定理與其意涵

§ 利用生成函數證明 CLT

§ Devoivre–Laplace 定理的手算證明

§ 正規分佈與 Poisson 分佈的關連

§ Poisson 分佈與二項分佈的關連

§ 信賴區間: 百分之 95?

§ 銅板的假說檢定

§ 格子點上的隨機漫步: 常返與消逝

§ A view on axiomatic probability theory