

數學沙龍 – 期末心得整理

壹、前言

這學期修習數學沙龍這門課，一直是半摸索著、沒有固定方向地前進，我將真實地記錄下我這學期所走過的歷史軌跡。總是多方嘗試導致內容可能會有點繁雜，但我想這也是摸索自己方向時很自然的現象。遺憾地到了最後也沒有鎖定一個十分具體的領域，但我想這些零碎的資訊中或許也將有一兩段會對讀者有一丁點啟發，那就已經是再好不過的事了。

貳、數學傳播

數學傳播是一份期刊，如同其名，內容不外乎是數學知識的介紹，編者試圖以稍微初等的方法介紹高等數學。但有趣的是其中亦有不那麼嚴肅的專欄，即數學家的訪談。每期的數學傳播都會訪問一名數學家（其中許多都是揚名國際的大數學家），聊聊他們學習數學的經驗以及想法。這部分對於想更了解職業數學家在做什麼事有幫助的，另外因為是輕鬆的對談，讀起來沒有壓力，也非常適合一般人閱讀。

接下來的部分我將介紹我所閱讀的一些訪談篇章以及心得。

- **Frans Oort 教授**：（149~151 期，分為上中下三篇）

Frans 教授提到的許多觀點都令人受用，尤其此次訪談分為三篇刊登，可見其內容之多（事實上 Frans 教授鉅細靡遺地敘述了他整個求學經過，讓讀者更能深入了接他的故事）。我很喜歡的一個觀念是：例子的重要性。透過瞭解一個(non-trivial)的例子可以讓你對抽象理論有所掌握，更重要的是，當你在推導理論的時候心中一直抓住那個例子可以讓你的過程更加順暢、不受太抽象所苦，而且不容易出錯（藉由時時以那個例子來檢驗）。對於學習我覺得這是一個非常好的辦法。

另外一個有趣的比較是做數學的方式。他在生涯中見識到兩種互相背道而馳的做數學的方法。一個是經由最純粹的抽象思考去建構理論與方法，另外一個是建構具體例子去解決好的情況，再將較難的情況轉換為這個好的情況處理。前者著重純粹的抽象思考，後者則在例子上下很多苦工。兩種方法是兩個極端，卻都有效。關鍵的結論是：每個人的性格不同，適合的方法也不同。

- **森重文(Mori Shigefumi)教授**：（132 期）

事實上會去看森重文教授的專訪並非偶然，起因為 Frans 教授在訪談中有提到他。Frans 教授認為森重文教授是個很聰明而具天才的人（事實上也有許多學者這麼認為）。但森重文教授本人卻不這麼認為。他說他小時候並不是數學特別厲害的人，大學時只是單純覺得想學數學才走上這條路的。甚至，其實他到 30 歲都還不是很確定自己要走研究的路（即便當時他已經做出了些成果）一路上一直缺乏自信，也常常說其他數學家才是真正敏銳、聰明、洞悉力強的人。

森重文的說法對人的鼓勵性著實很大，即便一直以來都不是數學特別厲害的人，但因為對數學的熱情與上癮（還有因為做出一些東西帶來的一點自信）所以才一路支持他走到現在的地位。他認為，比起想當上一個數學家，對數學的喜歡才是更重要而能支持人向前走的。就算缺乏自信，就算覺得別人都比自己厲害許多，相信自己的熱情才是最重要的。

- 張聖容、楊建平教授（153、154 期）

楊建平與張聖容教授賢伉儷皆任教於普林斯頓，他們提到美國與台灣很不同的一點是：在美國他們必須非常努力吸引學生來讀數學，因為許多大公司（如高盛）都會直接到學校裡搶人。因此他們必須有足夠吸引學生的課程才能說服學生來讀。但台灣比較不一樣的是，頂尖大學不需要做什麼，每年就有那麼多的學生會來念數學系，也使得課程規劃上不會那麼年年檢討符合學生需求。當然這也許也跟台灣與美國市場對數學人才的需求度不同有關。

另外有一點值得學習的是，張聖容在大學時期與班上幾名同學固定組成讀書會，互相討論習題等等。這是一個對於學習非常有效率而且讓學習變得快樂的方法，這些人後來幾乎都留在學術界或多或少也是受到這件事的影響。

- 小結

讀這些訪談內容的過程是很輕鬆有趣的，從中又可以了解到數學家的生活、生長過程、還有他們的想法，不管將來是不是要當數學家，我認為對數學系的學生都是獲益良多的。

參、 音樂與數學

自己一直以來都是對音樂十分感興趣的人，所以嘗試著思索音樂與（高等）數學之間的聯繫，在美國數學學會（AMS）的網站找到了一些材料，放在此節分

享。

- 最難聽音樂背後的美妙數學

影片：<https://www.youtube.com/watch?v=RENk9PK06AQ>

這是一則 TED 的演講，裡面探討的是一個音樂問題：最難聽的音樂應該長什麼樣？這真的是一個有趣的問題，而且從中我們可以發現，數學跟音樂其實真的有很深的關係。而對於最難聽的定義是：完全沒有「規律」的樂曲。所有我們認為好聽的音樂都一定是因為某種規律使得他好聽。事實上要做到沒有規律必須仰賴數學家的構造才有辦法做到，而影片最後也演奏了這段音樂。

- AMS - Mathematics & Music :

網址：<http://www.ams.org/samplings/math-and-music>

這裡搜集了許多數學在音樂上的應用，也在此我發現原來是有數學與音樂的期刊的，固定發表數學家（與音樂家）們對這個領域的研究。我將挑選幾篇在以下進行分享。

- ***Musical Actions of Dihedral Groups*** , Alissa S. Crans, Thomas M. Fiore, and Ramon Satyendra

這是一篇文章分享代數在音樂上的應用，裡面提到一些代數對於音樂結構的解讀。樂理的和弦理論裡面最重要的東西之一大概就是大(三)和弦與小(三)和弦(增、減、七和弦等，甚至調式音階暫不在討論範圍)。我們可以把相差八度的音視為同一個音，而因為十二平均律的緣故我們可以把八度切成十二個半音，也就是說我們有十二個不同的音，而且向上向下移動便會循環。這便是代數裡 $Z/12Z$ 的結構。也就是我們可以把每個音視為一個 $Z/12Z$ 的元素，標示在「時鐘」上，進而考慮正十二邊形的對稱群。我們有兩種(音樂的)方法來看待這個群：其一是考慮兩個函數 T (平移，也就是移調) 跟 I (鏡射，上行樂句反為下行，反之亦然)，這在音樂上是有意義的概念。我們可以發現 T 跟 I 跟別對應到 G 裡面的 r 跟 s ($G = \text{dihedral group of order } 24, r^{12}=1=s^2, rs=sr^{-1}$)。所以考慮 T 跟 I 在時鐘(正十二邊形)上的群作用會發現： T 會把大和弦映到大和弦，小和弦映到小和弦； I 會把大和弦映到小和弦，小和弦映到大和弦。例如 C 和弦可以想成時鐘上的 $\{0, 4, 7\}$ ， I 會把它映射到 $\{0, 5, 8\}$ ，也就是 Fm 和弦。我們會發現其實可以把 T/I 形成的群想成是會在大小和弦形成的集合上作群作用。(而且 T/I 群其實就是 G 。)

另外一種方法是用 P、L、R 三種映射去討論相似的問題，而我們會得到一些相似的結果（事實上 PLR 群也同構到 G），但 PLR 的特點是他定義的映射會有某種唯一性。

總而言之，代數的手法提供了我們另一個詮釋樂理的方法。事實上可以發現一些音樂上的樂理圖其實編排上是依循著某種代數邏輯的，或許可以幫助理解與記憶。

- **Generalized Contextual Groups**, Thomas M. Fiore and Ramon Satyendra

這篇跟上一篇比起來算是更深入的研究代數在樂理上的用處，他們發現透過一些特殊的群可以對音樂做一些有趣的、有意思的研究，而且這些發現可能是單從音樂的角度看不出來的，必須借助數學這把工具的力量。

此外，在上述 AMS 的網站裡也可以找到一些音樂與拓樸、幾何的結合，一樣非常有趣。

- **小結**

音樂與數學的結合其實一直都有所耳聞，但（就我聽到的而言）多半是關於複雜的數拍問題，但那樣子的數學我認為較為初等，並沒有真正發揮到數學強大的地方，所以發現這些資源令我感到十分開心。雖然和我的想像有點不一樣，但也算是增廣了眼界，並且了解到這個方向其實是可以持續研究的。

肆、 留學

對於留學的資訊其實是靠近期末才開始研究，所以也沒辦法說出多大的道理，下面將會盡我所能講述一些我整理出來的想法與事實。在此最前面先提供我查詢資料的管道：大部分是來自於我熟悉的論壇 PTT 的 studyabroad 版，而不清楚、或想更多了解的部分便在 Google 上查詢部落格參考其他人的經驗。

另外，要留學最大的難關們之一就是考取托福、GRE 檢定，這部分的資訊則可以在 PTT 的 TOFEL 版、GRE 版看到很多人分享的心路歷程與應考準備方法。

以下開始介紹我所整理出的心得。

- **關於兵役問題**

對於男生來說，出國留學比起女生更為麻煩的一點就是兵役問題了。而因為制度年年在改，所以還必須過濾掉太久以前的資訊，看到別人分享的說法也得做查證才行。在 PTT 上有前人整理好的建議時程，就是什

麼時候該考托福、GRE，什麼時候準備找教授寫推薦信等等，是個滿有用的參考。其中第一個讓我困惑的就是，男生建議大四畢業先去當兵，隔年再出國。其中又建議考預官。但以我的年次來說，現在是只需要當4個月的兵，考預官反而要當一年，所以我覺得還是一般入伍就好，時程上才不會太趕（畢竟當一年的兵隔年要出國，中間準備東西的時間應該很趕）。這部分的資料除了看別人的分享之外，也一直回兵役局與國防部的網站參照、檢查資訊的正確性，花了不少時間。（**注意！此資訊更新時間為 2017.12**）

另外似乎現在也可以先出國留學再回來當兵（以前不行），但這樣子的話畢業後要先回來當兵，對於找工作或繼續研究等等可能會造成滿大的不方便。總結來說我覺得最佳的時程應該是畢業就先去當兵，4個月結束之後還有比較多時間可以處理申請的問題，是我認為最適合的行程。

女生的部分就比較沒有兵役問題，時間的規劃上就不太一樣。

- 關於托福、GRE 等

托福測驗的場次比較多，GRE 就比較少（sGRE 一年只考一次）。這些測驗考一次都很貴（托福為 180 元美金，GRE 為 205 元美金），所以不能抱著馬虎的心態。另外，托福的成績只保存兩年，所以如果要畢業隔一年再出國，也不能太早考。規劃上大概大四寒假左右的時候考。另外如果考得不理想，或許可以當兵回來的那段時間再考一次？如此規劃一來，大三後半也差不多要開始準備加強英文能力了。

女生的部分，時程上是升大四暑假就把托福、GRE 考好才來得及（如果是要畢業直接出國的話），那就必須更早開始準備英文了。

接著簡單說說托福與 GRE 的不同。托福是考你的語言能力，包括聽說讀寫，也可以想成是你的基礎英文能力，確認你有能夠和人溝通與生活的能力。GRE 比較像是考你學術專業上的英文能力，包括學術文章的寫作等等。因此單字上也偏向考較冷門的學術單字，與托福的準備方向還是略有不同的。

有一點必須強調的是，這個段落所述的主要是以前往美國留學作為出發點，所以如果是要前往歐洲等地留學，情況又會不同。例如托福跟 GRE 就不見得是每間歐洲學校都需要的，因此也可能會有不一樣的要求。再三強調：這個段落是以留學美國為立足點所撰，並不是所有段落都是用前往其他地方留學。

最後，留學要準備的東西真的太多太多，從學校資料、申請需要的文件、到

上面提過的托福、GRE，甚至男生的兵役問題都是很重要的，因此我自己也並沒有到非常瞭解的程度。若最後真的走上留學之路必定會有更多且更全面的資訊可以分享與介紹，屆時或許便能將心得改得更趨完善吧！