數學方法與推理 楊維哲

§0 總結

這個演講的題目是我從前在台大開過的一門通識課程的名稱.那種通識課程的意思是給文科系與法科系大學生聽的,當然假定聽眾的數學程度不太好!
另外一方面說:我其實教過一些(主要是高中)資優生的課程,今天的演講,反倒是後者的意思!我相當用心地思考後,選了這個題目.
這是一個非常廣泛的題目,但是你們不要誤解爲我要把一學期的數學材料在三四個鐘頭內講授,實際上,因爲時間不多,所以我反倒自在一些:我要講的數學內容也許不多,但是我希望:就是在這樣小小的題材內,你們會聽到'有些不同的觀點!',會覺得有些刺激;因爲時間短,我所要強調的當然是所謂的方法論,也就是學習的方法,思考的方法.雖然這應該是在演講結尾處,總結強調的,可是我寧可現在就先宣示:
1.用心思考,掌握定理以及(更重要的!)定義的確實的涵義!
2.注意各式各樣的類推;
3.主動的學習!

§1 歸納法與演繹法

通常人在說'數學的方法',主要就是'數學的證明法'.事實上,任何稱得上'學問'的東西,都用到'推理',那就是'數學的證明法'!當然這就是數學的可貴處.
我當然認爲'推理'簡直是人的良知良能的一部份,而且是最重要的一部份.
最簡單的'推理',就是syllogism,三段論法.

$$\begin{array}{rl} (\text{大前提}) & \text{'凡是人,必有死,'} \\ (\text{小前提}) & \text{'Socrates 是人,'} \\ \text{因此,}(\text{結論}) & \text{'Socrates 必有死'.} \end{array} \tag{§1A}$$

其實這三段論法是古今東西都有的:希臘,支那,印度,馬雅?
全世界的Logic教科書,都抄自Aristotles的書,所以這個例子是所有的人都學過的!哈!我非常欣賞這個例子:Socrates是誰呢? Aristotles的'師公'!在支那文化,不可能出現這種例句!這是希臘文化偉大的一點.

高一學生學到的'數學的證明法',形式上有兩樣:
數學歸納法與歸謬法;例子?
【註】'主動的學習!',意思就是:
'不用聽下去,(或者看下去,)趕快自己思索這些例子'.

§1.1 歸謬法是希臘文明的貢獻!

當然,歸謬法就是矛盾法:'以子之矛,攻子之盾',可是在支那文化中,我沒有看過一個真正有聊的歸謬法的例證!(哈!偉大的希臘文明!)
泛希臘(=Helenistic)文明的代表性人物是Euclid.
Euclid有兩個經典的歸謬法的例證:

- 不可共度性(incommensurable)之存在!
【註】學習'字'的來源!in=不;com=共同的;-ble='可以的';measure=量度;
當然你學到的例子是: $\sqrt{2}$是無理數.
教學的失敗就在這裡!教師最常做的就是:'教他覺得最容易教的東西',(通常也因而是最無用無聊的東西!)而不是教真正重要學生必須切實掌握的東西.(這樣的東西倒不一定是'難',但是卻比較'不好教'!因爲學生必須主動學習,必須自行'建構概念',許多教師就嫌麻煩!)
每一個學生都應該這樣子重新敘述這一句話:
'一個正方形的一邊,與對角線,是不可共度的!'
只有這樣,你才是真正明白命題的涵義!那麼你一定會同意:
'一個正五邊形的一邊,與對角線,是不可共度的!'
='黃金分割比是無理數'.
只有這樣,你才真正明白'輾轉相除原理';那麼,到了唸'大學(='高等')代數'時,就很清楚'歐氏整域','唯一分解整域'的涵義了!

- 質數無限多;(再稱讚一次:除了希臘文明之外,沒有別的文明會去煩惱這兩個問題!在'反功利主義'的方向上,希臘文明,遙遙領先!)
當然我相信你會證明!那麼試試這個命題吧:
質數,除了2以外,當然都是奇數,奇數又分成兩類:
甲類是'用4除,餘數=1的',乙類是'用4除,餘數=3的';

$$\text{命題:乙類質數有}: 3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, \cdots, \underline{\text{無限多}}! \qquad (\S1B)$$

§2 遞迴法

'白馬非馬':數學歸納法並非歸納法!是演繹法.
歸納法的意思就是'照經驗',我當然有過在大學聯考數學科閱卷的許多年的經驗,所以我可以舉出歸納法的一個例子:'只要大學聯考數學科考一題數學歸納法,閱卷閱倒這一題,就苦矣!'

答卷上,總是寫:
若$n=1$,則$\cdots$成立;
若$n=k$時成立,則$\cdots$;所以$n=k+1$時也成立;
問題是:對於第一句話,閱卷者有時就找不到考生有'驗證的痕跡'!
(顯然他只是把式子裡的n改爲1而已;)
然後,他又把式子裡的n改爲$k+1$而已;
(可怕的是:他以爲這就是數學歸納法!教育的失敗就在於'背起來!',數學歸納法如何背?其成果就是這樣子的答卷.)
我的建議是:(非常不正統!)每一個教師在教到數學歸納法的時候:
第一,馬上聲明:'數學歸納法'是錯誤的用字!他並非歸納法!是演繹法;
第二,'更好的用字是遞迴法';
第三,舉出種種的遞迴法的例證.(不要那種愚蠢的例子!)並且用種種不同的方式,寫遞迴法.

§2.1 代數學根本定理

我喜歡問我的大一(甚至於更高年級的)學生:何謂'代數學根本定理'?
十之八九,答案是:

$$n\text{次多項式方程式,必有}n\text{個(複數)根.} \tag{§2A}$$

我笑一笑:'當然這個答案是錯的!二次方程式$x^2-6x+9=0$的根?'
學生馬上改口:

$$n\text{次方程式,如果把重根依照其重複度來計算,必有}n\text{個(複數)根.} \tag{§2B}$$

我笑一笑:'當然你現在的命題是正確的!但是這不是一個根本的定理!
正確的答案是:

$$Gauss: n(\geq 1)\text{次的多項式方程式}f(x)=0,\text{最少有一個(複數)根.} \tag{§2C}$$

從這個根本定理,就可以證明你的(不根本的)定理:當然要用遞迴法!
這就是要對於次數 $n=\deg(f(x))\in\mathbb{N}$(自然數系)來遞迴,所以我們將把$f(x)$寫成$f_n(x)=f(x)$;
首先,我們有一個根$\alpha_n\in\mathbb{C}$(複數系),$f(\alpha_n)=0$,現在利用因式定理:

$$\text{若}f(\alpha)=0,\text{則有因式分解}f(x)=(x-\alpha)\cdot g(x); \tag{§2D}$$

此地寫$\alpha=\alpha_n, g(x)=f_{n-1}(x)$,因而$\deg(f_{n-1}(x))=n-1$,如果$n=1$就不用證明了!否則$n>1, n-1\in\mathbb{N}$,那麼,根本定理對於方程式$f_{n-1}(x)=0$也適用,因此又有

$$f_{n-1}(x)=(x-\alpha_{n-1})\cdot f_{n-2}(x); \deg(f_{n-2}(x))=n-2\geq 0;$$

這樣子遞迴而降

$f(x) = (x-\alpha_n)(x-\alpha_{n-1})\cdots(x-\alpha_1)\cdot f_0(x), \deg(f_0(x)) = 0,$即是$f_0 \in \mathbb{C}, f_0 \neq 0;$

就證明了定理B!所以定理B並不根本!只要利用根本定理,以及(高一學到的!)因式定理,你就可以證明了你的定理!
想想看:有史以來最偉大的數學家Gauss,就是以此根本定理的證明作爲他的學位論文!所以他才根本!你的不根本!
容我強調一下:能夠分辨根本不根本,表示你的能力不太差!
還要再強調一下:所謂'數學歸納法',要點在於'遞迴而降',把n時候的狀況,歸結到$n-1$時候的狀況去處理!

§2.2 拼湊法

'數學歸納法',有何例子?
【多邊形內角之和】

$$\text{平面上的一個}n\text{邊形,其內角之和} = 2\pi\cdot(n-2); \qquad (\S 2E)$$

當然這是'拼湊法':只要把這個n邊形,分割成爲$n-2$個三角形就好了!
但是,寫證明時,經常會有'語病'!你會畫出一個圖(通常是凸的多邊形!)$P_1P_2\cdots P_n$,所以你就寫:
'把n邊形$P_1P_2\cdots P_n$分割成爲$n-2$個三角形

$$\triangle P_1P_2P_3, \triangle P_1P_3P_4, \cdots, \triangle P_1P_{n-2}P_{n-1}, \triangle P_1P_{n-1}P_n; \qquad (\S 2F)$$

就好了!'
問題是:多邊形並不限定是凸的多邊形!我可以畫出一個多邊形

圖圖: 2F:拆割

$P_1P_2\cdots P_n$,使得你所寫的分割行不通!
'遞迴而降'的意思是:
把$n+1$邊形$P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}$的情形,歸結到n邊形的情形!

所以我們連結P_1P_n,得到一個三角形$\triangle P_1P_nP_{n+1}$,
於是只要考慮兩種狀況:
甲:P_{n+1}在多邊形$P_1P_2\cdots P_n$的外面;
乙:P_{n+1}在多邊形$P_1P_2\cdots P_n$的內部;
前者當然很簡單:P_1, P_n,兩個頂點處的內角就增加了!恰好就是增加了'他們作爲三角形$P_1P_nP_{n+1}$頂點的內角部分'!那麼再加上頂點P_{n+1}處的內角,就等於增增加了一個三角形$P_1P_nP_{n+1}$的內角π;
後者呢:P_1, P_n,兩個頂點處的內角就減少了!恰好就是減少了'他們作爲

圖圖: 2F: 多邊形內角之和

三角形$P_1P_nP_{n+1}$頂點的內角部分'!至於頂點P_{n+1}處的內角,就等於從一個週角2π減去三角形$P_1P_nP_{n+1}$的頂點P_{n+1}處的內角;那麼整體來說,
多邊形$P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}$的內角之和,是多邊形$P_1P_2\cdots P_n$的內角之和,
再加上'2π減去一個三角形$P_1P_nP_{n+1}$的內角之和π'.
【多邊形面積】多邊形$P_1P_2\cdots P_n$的有號面積,如果用座標$P_j = (x_j, y_j)$來表示,則爲

$$\mathcal{A}(P_1P_2\cdots P_n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_jy_{j+1} - y_jx_{j+1}); \qquad (\S 2G)$$

其中規定足碼$n+1 \equiv 1$;
當然大家都知道有號面積的右手迴轉規約!此時遞迴的式子

$$\mathcal{A}(P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}) = \mathcal{A}(P_1P_2\cdots P_n) + \mathcal{A}(P_1P_nP_{n+1});$$

更加顯然!
【領海原理】某一島嶼國家,領土是一個凸的多邊形區域$P_1P_2\cdots P_nP_{n+1}$;現在宣佈其海岸線範圍w以內是其(經濟)領海,則其經濟領海的面積是

$$L\cdot w + \pi w^2; \qquad (\S 2H)$$

自每一邊$\overline{P_jP_{j+1}}$,以另一邊w(向外海)做出矩形,則面積爲$w\cdot\overline{P_jP_{j+1}}$;
每個頂點P_j處,另外還有一個扇形域:半徑w而

圖圖: 2H:領海

中心角$=\pi-$(頂點P_j處的內角)!
【格子點多邊形的面積】假設所有頂點$P_j=(x_j,y_j)$都是格子點$x_j\in\mathbb{Z}$(
整數系,$y_j\in\mathbb{Z}$,
如果在多邊形$P_1P_2\cdots P_n$的內部有格子點一共s個,
而在此多邊形的邊界線上有格子點一共e個;

$$\text{則格子點多邊形}P_1P_2\cdots P_n\text{的面積是}s+\frac{e}{2}-1; \tag{§2I}$$

§2.3 遞迴的定義法

數學中常常用到遞迴的定義法,例如說
【'階乘'(函數)】

$$\begin{array}{ll} !(n) & := n\cdot !(n-1); (n\in\mathbb{N};) \\ !(0) & := 1; \end{array} \tag{§2J}$$

【註】驚嘆號通常是'後置';我故意採用前置式的寫法!
上一式是'遞迴而降',下一式是規定'初始條件'!
當然你可以模仿:

$$\begin{array}{ll} !!(n) & := n\cdot !!(n-2); (n\in\mathbb{N}, n>1,) \\ !!(0) & := 1; \\ !!(1) & := 1; \end{array} \tag{§2K}$$

比較有用的是把前者推廣到連續的變數!那麼

$$!(x) := x\cdot !(x-1); (x\in\mathbb{R}; x\geq 1,) \tag{§2L}$$

這一來問題就推給了$!(x),(0\leq x<1,)$的'初始定義'了!
這個問題非常重要而且有趣!我們不談;但是你也看得出來;
'遞迴而降'的定義式,自動就是'遞迴而升'的定義式

$$!(x) := \frac{!(x+1)}{x+1}; x\in\mathbb{R}; -x\notin\mathbb{N}; \tag{§2M}$$

【$\mathcal{C}ont^k$型】假定你懂得何謂函數f的連續性:

$$\text{對於任何}a, \text{當}x\text{趨近}a\text{時}, f(x)\text{就會趨近}f(a); \tag{§2N}$$

我們把這樣子的函數f,記做$f \in \mathcal{C}ont^0$;
假定你懂得何謂函數f的可以導微性,以及導微函數 f':

$$f'(x) := \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}; \tag{§2O}$$

那麼我們可以遞迴地定義

$$f \in \mathcal{C}ont^n, (n \in \mathbb{N})\text{意即} : f' \in \mathcal{C}ont^{n-1}; \tag{§2P}$$

【註】如果是多個自變數的函數$f = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$呢?
這時必須用到函數f的偏導函數 $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f_j$;那麼我們可以遞迴地定義

$$f \in \mathcal{C}ont^n\text{意即}, \text{對於}j = 1, 2, \cdots, m, \text{各個}f_j \in \mathcal{C}ont^{n-1}; \tag{§2Q}$$

【超限序數】自然數之間有大小順序:

$$(0 <)1 < 2 < 3 < 4 < \cdots \tag{§2R}$$

這些叫做有限序數(finite ordinal);於是想像有'比他們都大的'序數,
那當然是無限的序數(infinite ordinals),
這其中,恰好有一個最小的,記做ω,這是最小的無限的序數,
那麼就可以定義下一個序數$\omega + 1$,於是又有

$$(0 <)1 < 2 < 3 < 4 < \cdots < \omega < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \cdots$$

'比這些序數都大的序數',恰好有一個最小的,記做$\omega + \omega = 2\omega$,
於是又有

$$\begin{array}{rl} (0 <) & 1 < 2 < 3 < 4 < \cdots \\ < \omega & < \omega + 1 < \omega + 2 < \omega + 3 < \omega + 4 < \cdots \\ < 2\omega & < 2\omega + 1 < 2\omega + 2 < 2\omega + 3 < 2\omega + 4 < \cdots \end{array}$$

實際上可以定義

$$\begin{array}{rl} < 3 & \omega < 3\omega + 1 < \cdots \\ < 4 & \omega < 4\omega + 1 < \cdots \\ < & \cdots\cdots \\ < n\omega & < n\omega + 1 < \cdots\cdots \\ < & \cdots\cdots \\ < \omega * \omega = \omega^2 & < \omega^2 + 1 < \cdots\cdots \\ < \omega^2 + \omega & < \omega^2 + \omega + 1 < \cdots \\ < & \cdots\cdots \end{array}$$

你看出來:可以有Cantor的超限多項式,
係數的範圍是非負整數$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$, (用'字典的順序'!)
然後呢?還有

$$< \omega^\omega < \omega^\omega + 1 < \cdots < \omega^\omega + \omega < \cdots$$

對於所有的這些序數x,我們都可以說'之後一個'(the following)序數$x + 1$;不過,像$\omega, 2\omega, \cdots, \omega^2 + 3\omega$,等等,我們沒有辦法說之前一個 (the preceeding)序數$x - 1$,這樣子就被稱做極限(a limiting ordinal)序數;
Cantor由此發展了一套超限序數,超限基數,超限歸納(=超限遞迴)的理論!
【註】這一節當然是廣告時間!

§3 原子論

【質數】對於自然數,我們可以把期間的相乘,看成一種'(化學)作用',
那麼,整數論的'原子',就是質數(prime number).
所以,Euclid所證明的'質數無限'的定理,意思是:
(見(§1B),)整數論的'乘法基本元素',爲數無窮!
【Pythagoras的音頻原子】Pythagoras發現:音樂中的'音程',
(從這個音x到那個音y,)其間的'頻率之比'爲簡單的有理數;
比較原始的音樂,是所謂'五音':

$$do, re, mi, sol, la, \widehat{do}; \tag{§3A}$$

進一步,是用'七音'也就是'八度':

$$do, re, mi, fa, sol, la, ti, \widehat{do}; \tag{§3B}$$

從do到$\widehat{do}$ '高了八度'(octave),就是:'頻率加倍';
我們知道:'五音'沒有fa, ti,意思是

$$(mi \to fa) = (la \to ti), \text{都是'半音程'}, \tag{§3C}$$

$$\text{頻率之比}\frac{\nu(fa)}{\nu(mi)} = \frac{\nu(ti)}{\nu(la)} = w := \frac{16}{15}; \tag{§3D}$$

其他的全音程,其實有兩種:

$$\begin{array}{ll} u := \frac{9}{8} & = (do \to re), \quad (fa \to sol), \quad (la \to ti), \\ v := \frac{10}{9} & = (re \to mi), \quad (sol \to la), \end{array} \tag{§3E}$$

Pythagoras的問題就是:
有8個頻率$\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_8$,換言之有7個比$\mu_j = \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}$;已知:

$$\begin{array}{lll} \text{甲} & \prod_{j=1}^{7} \mu_j & = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_7 = 2 = \frac{\nu_8}{\nu_1}; \\ \text{乙} & \mu_j & \in \{u, v, w\}; \\ \text{丙} & \frac{\nu_j}{\nu_1} & \text{是簡單有理數}; \end{array} \tag{§3F}$$

由於乙,假定μ_j中,有a個u,b個v,c個w;a, b, c,是自然數(或零),那麼:由於甲,

$$2 = u^a \cdot v^b \cdot w^c; \log(2) = a \log u + b \log v + c \log w; \tag{§3G}$$

這樣子就可以算出來:

$$a = 3, b = 2, c = 2; \tag{§3H}$$

那麼再由丙:把3個u,2個v,2個w,做適當的排列$t_1, t_2, \cdots, t_7$,
使得其累乘,

$$t_1, t_1 t_2, t_1 t_2 t_3, \cdots, t_1 t_2 t_3 \cdots t_6, \tag{§3I}$$

都是‘簡單有理數’,就好了!
Pythagoras (幾乎唯一!)的答案是:

μ_j	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	
$\frac{\nu_j}{\nu_1}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

(§3J)

【兩種分析】化學分析必須做‘定性分析’與‘定量分析’:
這個混雜的東西裡面有哪些‘基本的東西’,而且‘含量’各各多少?
用這個Pythagoras問題做例子:
2是由a個u,b個v,c個w去合成的;這裡合成只是相乘!
‘基本的東西’就是u,v,w,三種(Pythagoras的音頻原子!);
在線性代數裡面,‘基本的東西’就是‘基底向量’,合成就是線性組合,也就是乘以‘係數’再相加!
‘定性分析’要先確定這個基底,‘定量分析’要確定這些係數;我們把乘法的式子

$$2 = u^a \cdot v^b \cdot w^c; \tag{§3K}$$

利用‘同構’(取對數!),改寫爲:

$$\log(2) = a\log u + b\log v + c\log w; \tag{§3L}$$

事實上,

$$\begin{aligned} \log u &= 2\log 3 - 3\log 2;\\ \log v &= \log 2 + \log 5 - 2\log 3;\\ \log w &= 4\log 2 - \log 3 - \log 5; \end{aligned} \tag{§3M}$$

(對於有理數系來說) $\log 2, \log 3, \log 5$,是線性獨立的!
所以比較係數,就可以解出a,b,c,

$$\begin{aligned} \log 2 = a(&\ -3\log 2 \quad +2\log 3 \qquad\qquad)\\ +b(&\quad\ \log 2 \quad -2\log 3 \quad +\log 5)\\ +c(&\quad 4\log 2 \quad\ -\log 3 \quad -\log 5) \end{aligned} \tag{§3N}$$

【註】這裡的加法乘法,由於可換性,所以其分析比較簡單!
但是做丙的時候,就要思考排列的順序了,就麻煩一點.
當然,在化學上,對於一個化學分子,寫出分子式(例如說:C_2H_6O,)並未完全決定這個分子!必須寫出結構式.(到底是C_2H_5OH,或CH_3OCH_3.)
【單體(simplex)與複體(complex)】上面的拼湊法,就是用

$$\text{三角形} = 2\text{維單體}, \text{線段} = 1\text{維單體}, \text{四面體} = 3\text{維單體}, \tag{§3O}$$

當作‘基本的材料’(即是‘元素’(的原子),)來拼湊的!這句話當然有些不對:必須相同元素的原子都相同!不過,在位相幾何學(topology,請勿音譯爲‘拓樸’!那是沒有水準的人才如此!)其實就是這一種思考!

§4 維數的類推

我以爲:'類推'是科學(尤其數學,)的學習中,最重要的一招!
數學上,尤其要注意'維數的類推',有時候,這是很容易的,有時候,卻是不簡單!

【Pythagoras定理】如果是平面解析幾何,定理可以這樣子表達:
從點(x_0, y_0)到點(x_1, y_1)的線段長是

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}; \Delta x := x_1 - x_0, \text{等等}, \tag{§4A}$$

推廣到立體解析幾何,就有這樣子的定理:
從點(x_0, y_0, z_0)到點(x_1, y_1, z_1)的線段長是

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}; \Delta x := x_1 - x_0, \text{等等}, \tag{§4B}$$

這個類推是很容易的,幾乎無聊,不!他是很重要很有用的!
但是還有更不簡單的類推!
我們先這樣子表達平面解析幾何中的Pythagoras定理:
(假定$hk \neq 0$,)直線

$$(\text{截距式:})\frac{x}{h} + \frac{y}{k} = 1 \tag{§4C}$$

在某一個(只有一個!)象限中,割到一個有限的線段(=1維單體),則其長度爲

$$\sqrt{h^2 + k^2} = \text{三個投影長度的平方和的平方根}; \tag{§4D}$$

於是有一個立體解析幾何中的Pythagoras定理是:(假定$hkl \neq 0$,)平面

$$(\text{截距式:})\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1 \tag{§4E}$$

在某一個(只有一個!)掛限中,割到一個有限的三角形(2維單體),則其面積爲

$$\frac{1}{2}\sqrt{h^2k^2 + k^2l^2 + l^2h^2} = \text{三個投影面積的平方和的平方根}; \tag{§4F}$$

【線段的類推】如何把一維線段類推爲三維的東西.這是很不容易的!
首先,我們可以類推爲'立方體':

$$\text{把} a \leq x \leq b \text{改爲} a \leq x, y, z, \leq b; \tag{§4G}$$

或者類推爲'長方體':

$$\text{把} a \leq x \leq b \text{改爲} a_1 \leq x \leq b_1; a_2 \leq y \leq b_2; a_3 \leq z \leq b_3; \tag{§4H}$$

(當然,結論是:應該改寫$x_2 := y, x_3 := z$.)
或者類推爲'球體':

$$\text{把} |x - c| \leq r, (c = \frac{a+b}{2}, r = |\frac{b-a}{2}|,)\text{改爲} |\mathbf{x} - \mathbf{c}| \leq r; \tag{§4I}$$

或者類推爲‘四面體’!這是最難的一種類推!(§.3O)

線段(=1維單體) $a \leq x \leq b$ 有兩個頂點(或者說端點) a, b,
於是線段中的任意一點 x 都可以表達成爲:
放在此兩頂點處的某種質量質點的質量中心,
而且這兩個割比(權重的相對比例) (α, β) 是由 x 而完全決定的:

$$\begin{array}{ll} x & = \alpha a + \beta b; 0 \leq \alpha, \beta; \alpha + \beta = 1; \\ \alpha & = \frac{b-x}{b-a}, \\ \beta & = \frac{x-a}{b-a}; \end{array} \qquad (\S 4J)$$

三角形(2維單體) $\triangle ABC$ 有三個頂點(或者說端點) A, B, C,
於是此三角形中的任意一點 P,都可以表達成爲:
放在此三頂點處的某種質量 (α, β, γ) 質點的質量中心,
而且這三個割比 (α, β, γ),是由 P 而完全決定的:

$$\begin{array}{ll} R & = \alpha A + \beta B + \gamma C; 0 \leq \alpha, \beta, \gamma; \alpha + \beta + \gamma = 1; \\ \alpha & = \frac{\mathcal{A}(PBC)}{\mathcal{A}(ABC)}; \\ \beta & = \frac{\mathcal{A}(APC)}{\mathcal{A}(ABC)}; \\ \gamma & = \frac{\mathcal{A}(ABP)}{\mathcal{A}(ABC)}; \end{array} \qquad (\S 4K)$$

這裡 $\mathcal{A}(ABC)$ 表示三角形 $\triangle ABC$ 的有號(oriented)面積;
【非常重要的註解】在平面解析幾何,寫下座標

$$A = (x_1, y_1), B = (x_2, y_2), C = (x_3, y_3);$$

於是前面提到的面積公式是:(記得Sarrus規則!)

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, & x_1, & y_1 \\ 1, & x_2, & y_2 \\ 1, & x_3, & y_3 \end{vmatrix}; \qquad (\S 4L)$$

因爲面積有正負!所以,從頭就要選擇 ABC 正確的轉向!
如果點 P 在三角形 ABC 的內部,則這三個割比 α, β, γ 都是正的;
實際上,依照這個公式,當點 P 在三角形 ABC 的外部時,則三個割比 α, β, γ
中,一定有負的;當然 $\alpha + \beta + \gamma = 1$ 則是永遠成立的!
當然你該試試立體解析幾何的類推了!
你能夠寫出多面體的體積公式?

§5 不等式

不等式常常是有趣的但是偶而覺得難!
我先強調:不等式的背後也許有等式!當然:

$$-(x^2+y^2) \leq 2xy \leq x^2+y^2;$$

意思只是:

$$(x \pm y)^2 \geq 0;$$

從此而得算幾不等式.

§5.1 算幾不等式

最簡單的兩項的算幾不等式

$$\text{若}X \geq 0, Y \geq 0, \text{則}\frac{X+Y}{2} > \sqrt{XY}; \text{除非}X = Y. \tag{§5A}$$

一般的n項的算幾不等式是

$$\text{若}x_j \geq 0, (j=1,2,\cdots,n)\text{則}\frac{\sum x_j}{n} > \sqrt[n]{\prod x_j}; \text{除非}x_j \text{ 都相等.} \tag{§5B}$$

腦筋要很清楚!不要說成:

$$\text{若}x_j \geq 0, (j=1,2,\cdots,n)\text{則}\frac{\sum x_j}{n} \geq \sqrt[n]{\prod x_j}; \tag{§5C}$$

因爲這種說法,'弱得太多了'!
你記得其經典的(Wallace?)證明?非常有趣的辦法:
首先,限定$n = 2^m$是2的冪方,那麼,就用(對於$m \in \mathbb{N}$的)遞迴法!
如果$2^{m-1} < n < 2^m$,我們就補上:

$$\text{對於}k = n+1, n+2, \cdots, 2^m, \text{令}x_k = A = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}; (\text{或}=\text{G}=?) \tag{§5D}$$

§5.2 CBS不等式

若是$x_1, x_2, \cdots, x_n$,不全爲零,$y_1, y_2, \cdots, y_n$,不全爲零,

$$|\sum x_j y_j| < \sqrt{\sum x_j^2}\sqrt{\sum y_j^2}; \text{除非}x\text{與}y\text{成比例} \tag{§5E}$$

這個不等式的背後就有等式!只要將之平方:
【Lagrange恆等式】

$$(\sum x_j^2)(\sum y_j^2) = (\sum x_j y_j)^2 + \sum_{i \neq j}(x_i y_j - x_j y_i)^2; \tag{§5F}$$

可是本來的說法,好處是有幾何意義:
對於$\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n],\mathbf{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$,

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}:=\sum x_jy_j\text{稱爲其內積;}\|\mathbf{x}\|=\sqrt{\sum x_j^2}\text{是}\mathbf{x}\text{的值;} \tag{§5G}$$

對於$n=3$,事實上,

$$\begin{aligned}\text{內積}\ &=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cdot\cos(\theta);\theta\text{是夾角;}\\ \text{叉積}\ &:=\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{i}(x_2y_3-x_3y_2)+\text{等等(輪換);}\end{aligned} \tag{§5H}$$

叉積之方向與$\mathbf{x}$以及$\mathbf{y}$都正交,其(大小)值則是

$$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|\cdot\sin(\theta);\theta\text{是夾角;} \tag{§5I}$$

那麼CBS不等式就很顯然了!

我們重新敘述這個定理:我們用$\sqrt{x_j}$代替$x_j\geq 0$,用$\sqrt{y_j}$代替$y_j\geq 0$,

$$\sum\sqrt{x_jy_j}<(\sum x_j)(\sum y_j^2);\text{除非}x\text{與 }y\text{成比例} \tag{§5J}$$

這樣子就有一種解釋:我們有兩個正(只是不負!)實數列:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\ &=[x_1,x_2,\cdots,x_n],\\ \mathbf{y}\ &=[y_1,y_2,\cdots,y_n],\end{aligned}$$

其實這可以看成一個兩列n行的(非負實數)矩陣!所以我們考慮一般的m列n行的(非負實數)矩陣!
【縱橫算幾平均不等式】

$$\begin{aligned}&\text{‘先做各行的幾何平均,得到一列,再將這列算術平均(或做和)’},\\ <\ &\text{‘先將各列算術平均(或做和),得到一行,再將這行做幾何平均’};\end{aligned} \tag{§5K}$$

如何證明?
CBS不等式是說:$m=2$時成立;
那麼如果$m=2^l$是2的冪方,那麼,就用(對於$l\in\mathbb{N}$的)遞迴法!
於是,如果$2^{l-1}<m<2^l$,我們就用補足法,如(§5D)!

§5.3 高階平均不等式

在CBS不等式中,取$\mathbf{y}\propto 1_n$(是常數列),

$$1_n:=[1,1,\cdots,1]; \tag{§5L}$$

就有一個很顯然的結論:若有一個正實數列: $\mathbf{x}=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$,

$$\mathcal{M}_2(\mathbf{x}):=(\frac{1}{n}\sum x_j^2)^{\frac{1}{2}}>\mathcal{M}_1(\mathbf{x}):=\frac{1}{n}\sum x_j;\text{除非 }\mathbf{x}\propto 1_n; \tag{§5M}$$

其實我們可以更一般地,令$\mathbf{x}$的m階平均爲:

$$\mathcal{M}_m(\mathbf{x}) := (\frac{1}{n}\sum x_j^m)^{\frac{1}{m}}; \tag{§5N}$$

特別地,-1階平均就是<u>調和平均</u>:

$$\mathcal{M}_{-1}(\mathbf{x}) := \frac{n}{\sum_1^n \frac{1}{x_j}}; \tag{§5O}$$

週知:(除了無聊的例外!)

$$\mathcal{M}_{-1}(\mathbf{x}) < \mathcal{M}(\mathbf{x}); \tag{§5P}$$

這只要在CBS不等式中令$y_j = \frac{1}{x_j}$就好了!

【高階平均不等式】當$l > m$,就有:

$$\mathcal{M}_l(\mathbf{x}) > \mathcal{M}_m(\mathbf{x}); (\text{除非}\mathbf{x} \propto 1_n(\text{是常數列});) \tag{§5Q}$$

我們引入這樣子的記號:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^l &:= [x_1^l, x_2^l, \cdots, x_n^l]; \\ \text{因而 } \mathbf{x}^0 &:= 1_n := [1, 1, 1, \cdots, 1]; \end{aligned} \tag{§5R}$$

然後我們引入$m = h + k$個列向量,其中有h個是$\mathbf{x}^h$,有k個是$\mathbf{x}^0 = 1_n$;
對於這個矩陣,縱橫幾算平均不等式就告訴我們:(除了無聊的例外!)

$$(\mathcal{M}_{\frac{h}{h+k}l}(\mathbf{x}))^{\frac{h}{h+k}l} < (\mathcal{M}_l(\mathbf{x}))^{\frac{h}{h+k}l};$$

因此

$$(\mathcal{M}_{\frac{h}{h+k}l}(\mathbf{x})) < (\mathcal{M}_l(\mathbf{x}));$$

這對於一切自然數h, k, l,都成立,因此:只要取$m = \frac{h}{h+k}l < l$,則

$$(\mathcal{M}_m(\mathbf{x})) < (\mathcal{M}_l(\mathbf{x})); \tag{§5S}$$

【註】實際上高階平均不等式,只要$l > m$就好,可以是負整數,
(如果$m = -1, < l = 1$,那就是:調和平均小於算術平均.)
不過,對於負的階數$m < 0$,只要有一個$x_j = 0$,則$\mathcal{M}_m(\mathbf{x}) = 0$,狹義的不等式,就可能退化成爲廣義的不等式.

【例:開平方乘十】小時候,學期末,當老師的爸爸,常常對著成績紀錄傷腦筋;通常我只是幫他做加法與與乘法(也就是加權平均),但是有一次,我就越過本分,建議他'開平方乘十',雖然他的數學並不好,但是他很快就掌握了這個意涵:這樣子是'加分';分數高的加分少,分數低的加分多;(一百分的與零分的不動,)這是保序的:加分之後,不會顛倒高低!讓他做,也許有些困擾,但是對我來說是易如反掌!(當然用到平方根表的機

會不多!)
請問:如果這樣子動過手腳之後的全班平均是70分,那麼,原來的全班平均是比49分高或者低?(49的換算是70.)
【解】照題意, $\mathcal{M}_{\frac{1}{2}} = 49$;因此,原來的全班平均是$\mathcal{M}_1(\mathbf{x}) > \mathcal{M}_{\frac{1}{2}} = 49$;
哈哈!這是'電腦題',(='不會做,也會得到滿分的'試題!)我們可以這樣子簡化問題:
想像全班只有兩個人:動過手腳之後的分數分別是$60, 80$,然則原始的分數是$36, 64$,平均$50 > 49$.
'最簡化',我常常稱之爲<u>極端化</u>,其實就是<u>無聊化</u>:
改變數據!想像全班只有兩個人:原始的分數是$0, 100$,於是動過手腳之後的分數還是$0, 100$;平均都是=50,然則原始的平均分數是50動過手腳之後的平均分數是50,其實才相當於'25的換算'.) $50 > 25$,故知:原始的分數平均> 49,相當於'70的換算'.

§6 不等式的補充

§6.1 連續與離散

【實數指數】誰都知道$\pi^{\frac{31}{10}}$的定義,$= \sqrt[10]{\pi^{31}}$;當然$\pi^{\frac{31}{10}} < \pi^{\frac{32}{10}}$,因爲$\frac{31}{10}\frac{32}{10}$,這就是(有理)指數函數的單調性;那麼我們從

$$\frac{31}{10} < \frac{314}{100} < \cdots < \pi < \cdots \frac{315}{10} < \frac{32}{10};$$

就得到一個'夾擊列'

$$\pi^{\frac{31}{10}} < \pi^{\frac{314}{100}} < \cdots < \pi^{\frac{315}{100}} < \pi^{\frac{32}{10}},$$

於是定義了無理指數函數值,例如π^{π}.而且他也會保持單調性!
【加權平均】這樣子就有了深遠的後果:'平均'都可以改爲<u>加權平均</u>.
如果$1 > \alpha, \beta, \gamma > 0, \alpha + \beta + \gamma = 1$,以他們構成權重,可以做出$A, B, C$,的

$$\begin{aligned} &\text{加權算術平均} &&:= \alpha \cdot A + \beta \cdot B + \gamma \cdot C; \text{(這裡}A, B, C,\text{是任意實數;其實,也可以是向量!)} \\ &\text{加權幾何平均} &&:= A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma}; \text{(但是限定 }A, B, C,\text{爲正實數;)} \end{aligned} \tag{§6A}$$

後者是比較'難'(=不習慣!)的概念.
【實數階平均】高階平均不等式:當$l > m$,就有:$\mathcal{M}_l(\mathbf{x}) > \mathcal{M}_m(\mathbf{x})$;而$l, m$,可以是任意非零實數!
【零階平均】但是若有一個階數爲零?最重要的就是:

$$\lim_{\alpha \to 0} \mathcal{M}_{\alpha}(\mathbf{x}) := \mathcal{M}_0(\mathbf{x}) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}\text{是幾何平均;} \tag{§6B}$$

【註】你當然猜得到:$\mathcal{M}_{+\infty}(\mathbf{x}), \mathcal{M}_{-\infty}(\mathbf{x}) =?$
事實上,你還是可以用'極端化'的手法!

想像全班只有兩個人:原始的分數是0,以及1 =(滿分);於是

$$\mathcal{M}_1(\mathbf{x}) = 0.5; \mathcal{M}_2 = \sqrt{0.5} = 0.70+; \mathcal{M}_4(\mathbf{x}) = \sqrt{0.70+} = 0.836;$$
$$\mathcal{M}_8 = \sqrt{0.836} = 0.914\cdots; \lim = 1;$$

當然猜得到:

$$\mathcal{M}_{+\infty}(\mathbf{x}) = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n); \tag{§6C}$$

這樣子一來:

$$\mathcal{M}_{-\infty}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{M}_{\infty}(\mathbf{x}^{-1})} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n); \tag{§6D}$$

(縱橫算幾平均不等式或者說) CBS不等式就導致Hölder不等式:

$$\sum x_j^{\alpha} y_j^{\beta} \le (\sum x_j)^{\alpha} (\sum y_j)^{\beta}; (\text{其中,一切都是正數}, \alpha + \beta = 1;) \tag{§6E}$$

通常改用$p = \frac{1}{\alpha}, q = \frac{1}{\beta}; X_j = x_j^p, Y_j = y_j^q$;於是:

$$\sum X_j Y_j \le (\sum X_j^p)^{\frac{1}{p}} (\sum Y_j^p)^{\frac{1}{q}}; (\text{假定}\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,) \tag{§6F}$$

§6.2 Steiner恆等式與不等式

【配方法】一元二次函數的配方法,簡單而妙用甚多!

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}; \tag{§6G}$$

假定$a > 0$,這就看出:極小點$= x_0 = \frac{-b}{2a}$;極小值$= f(x_0) = \frac{4ac-b^2}{4a}$,
(這不重要!)重要的是:對於任意的x當然$f(x) \ge$極小值$= f(x_0)$;
大了多少?就是$a|x - x_0|^2$;這就是所謂的Steiner恆等式:

$$f(x) = f(x_0) + a|x - x_0|^2; (\text{若是}a = 1,) f(x) = f(x_0) + (x - x_0)^2; \tag{§6H}$$

【註】首項(=領導項,leading term)是ax^2,因此,當$a = 1$,我們稱二次式為'么(=1)領的';此時可以稍稍簡化¡翻譯成白話':
么領二次函數的函數值,比起他的極小值,
所多的就是:這一點x與極小點x_0的距離的平方!
【代表值與參差度】假設我們把某次考試學生的分數寫成

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n); (\text{全班}n\text{人!}) \tag{§6I}$$

但是,這個資料X對一個校長不太有用:對他來說,要緊的是如何從這堆數據中,得到一個代表值與參差度;
假設我們μ當做X的代表值,這就產生相對(於μ的)偏差

$$X(\omega) - \mu = (x_1, x_2, \cdots, x_n); \tag{§6J}$$

而(平)方(偏)差爲

$$|X(\omega)-\mu|^2=((x_1-\mu)^2,(x_2-\mu)^2,\cdots,(x_n-\mu)^2); \tag{§6K}$$

其平均爲相對(於μ的)平均方差

$$\mathrm{Var}(X,\mu)=(\mathcal{M}_2(X-\mu))^2=\frac{1}{n}\left((x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2)\right);$$

這是一個變數爲μ的么領二次式!

【命題】使平均方差$\mathrm{Var}(X,\mu)$爲最小的('代表值')μ,就是算術平均$\mathcal{M}(X)$,這是函數的極小點,函數的極小值則是<u>變異數</u>(variance);其平方根(取正值)叫做<u>標準偏差</u>(Standard deviation) $\mathrm{sd}(X)$.這是最重要而且也是最常用的參差度;用來衡量算術平均這個代表值的好壞程度.

Steiner恆等式就是

$$\mathrm{Var}(X,\mu)=\mathrm{Var}(X)+|\mu-\mathcal{M}(X)|^2; \tag{§6L}$$

作爲特例:(令$\mu=0$,)

$$\mathrm{Var}(X)=\mathcal{M}(X^2)-(\mathcal{M}(X))^2=\text{平方之平均 - 平均之平方}; \tag{§6M}$$

【命題】使總偏差等於0的代表值μ就是算術平均$\mathcal{M}(X)$;(不太有用!)

【命題】使平均絕對偏差$\mathcal{M}(|X-\mu|)$爲最小的代表值μ就是<u>中位數</u>(medean) $medean(X)$;

一般地可以問:

使p階誤差$\mathcal{M}_p(|X-\mu|)$爲最小的代表值$\mu_p=?$最小值$\epsilon_p=?$

$$\begin{array}{ll}\mu_1=medean(X), & \epsilon_1\text{叫做}meandeviation;\\ \mu_2=\mathcal{M}(X), & \epsilon_2=\mathrm{sd}(X);\\ \mu_\infty=\frac{\max X+\min X}{2}, & \epsilon_\infty=\frac{\max X-\min X}{2};\end{array} \tag{§6N}$$

【註】對於變量X,我們稱

$$`X\text{的標準化}'=\frac{X-\mathcal{M}(X)}{\mathrm{sd}(X)}; \tag{§6O}$$

【慣性矩】假設有許許多多的質點,排在一條直線上,質量m_j者位置是x_j;所以$X=((x_j),(m_j))$代表的是整個質點系的位置與權重!不是只有位置而已.

此系平均位置(質心)爲加權平均

$$\mathcal{M}(X)=\frac{\sum m_jx_j}{\sum m_j}; \tag{§6P}$$

相對於點μ之慣性矩爲

$$\begin{aligned} Inertia(X,\mu) &:= \sum m_j(x_j-\mu)^2, (\text{並未規範化!}) \\ (\text{規範化了的!})Var(X,\mu) &:= \frac{Inertia(X,\mu)}{\sum m_j}; \\ \text{迴轉半徑}\mathrm{sd}(X;\mu) &:= \sqrt{\mathrm{Var}(X,\mu)}; \end{aligned} \tag{§6Q}$$

【Steiner的慣性矩恆等式】慣性矩$Inertia(X;\mu)$的極小,在質心處;
一般,相對於點μ之慣性矩,就是這個極小值,加上'將整個系的質量$M=\sum m_j$,置放在質心$\mathcal{M}(X)$處時,對於支點μ的慣性矩':

$$Inertia(X,\mu) = M*Var(X)+M*(\mu-\mathcal{M}(X))^2; \tag{§6R}$$

【註】假設有n個氣體分子,質量都是m;在一小塊區域內運動;其速度是

$$\mathbf{v} := (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n);$$

我們就可以算出

$$\begin{aligned} \text{其平均}\quad & \mathbf{u} := \mathcal{M}(X); \\ \text{其無偏化}\quad & \mathbf{w} := \mathbf{v}-\mathbf{u} = (\mathbf{v}_1-\mathbf{u}, \mathbf{v}_2-\mathbf{u}, \cdots, \mathbf{v}_n-\mathbf{u}); \end{aligned} \tag{§6S}$$

這些氣體分子的運動能量是

$$\frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2 := (\frac{m}{2}|\mathbf{v}_1|^2, \frac{m}{2}|\mathbf{v}_2|^2, \cdots, \frac{m}{2}|\mathbf{v}_n|^2);$$

於是Steiner的恆等式告訴我們:這些氣體分子的總運動能量是

$$\sum_{j=1}^n \frac{m}{2}|\mathbf{v}_j|^2 = \frac{nm}{2}|\mathbf{u}|^2 + \sum_{j=1}^n \frac{m}{2}|\mathbf{w}_j|^2; \tag{§6T}$$

以上所說是氣體分子運動論的微觀的(microscopic)說法.
宏觀地(macroscopically)看,這(微觀的)一小塊區域,只是(宏觀的)一'點'(x,y,z);
$n*m$ (除以體積),就是(氣體)流體在這一點的質量密度;
$\mathbf{u}(x,y,z)$就是流體在這一點的流動速度!
因此流體的動能密度就是$\frac{nm}{2}|\mathbf{u}|^2$;
速度$\mathbf{w}$是屬於(看不到的!)熱運動的!
而能量(密度) $\sum_{j=1}^n \frac{m}{2}|\mathbf{w}_j|^2$是熱能量(密度);
這應該是與絕對溫度成正比!

§6.3 Markov 與 Chebyshev 不等式

假設這一班有 48 個人，考了一次試，平均分數是 23 分 (對不起, 故意把你們看扁了 !) 那麼成績超過 46 分的人, 一定不到一半; 成績超過 69 分的人, 一定不到三分之一; 超過 92 分的人數不到 12 個人; 這個道理是顯然的! 這就是下面所謂的

【Markov 不等式】設

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \geq 0; \mu := \mathcal{M}(Y) > 0,$$

則對於 $k > 1$, 滿足 $y_j > k * \nu$ 的那種 j, 其'相對頻度'一定 $< \frac{1}{k}$; 我們可以寫成:

$$\mathfrak{f}_Y(\{j : y_j \geq k * \nu\}) \leq \frac{1}{k}; \tag{§6U}$$

【推論:Chebyshev 不等式】設

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n); \mu := \mathcal{M}(X), \sigma := \mathrm{sd}(X);$$

則對於 $k > 1$,

$$\mathfrak{f}_X(\{i : |x_i - \mu| > k * \sigma\}) < \frac{1}{k^2}; \tag{§6V}$$

事實上, 這只是令: $Y = |X - \mu|^2$ 而已!

§7　整式與整數的類推

§7.1　餘數定理

【問1】11231被9除,餘數=?可否被11除盡?
【九盡法九餘法】如果自然數N的各位數字之和s是9的位數,則N也是9的倍數;若s不是,N也不是.事實上,s就是N用9去除,所得的餘數!
類似的定理有:拾壹盡法,拾壹餘法;這些定理和'十進位'有關係!
【問2】求$f(x)=x^4+x^3+2x^2+3x+1$被$(x-1)$除的餘數;又:$f(x)=2x^5+3x^4+4x^3+5x^2+6x+4$可否被$(x+1)$除盡?
我們將把'多項式'說成'整式',並不是爲了少用一個字,而是要和'整數'類推!
實數系複數系有理數系,都是'體',因爲有'加減乘除'的<u>四則運算</u>;
'整式系'和'整數系',只有'加減乘'的<u>三則運算</u>;所以術語叫做'環';但是他們也有'帶餘除法',因此叫做Euclid式的整環!
【除法原理:整數系】若自然數l不小於m,那麼我們可找到自然數q及一數$r, 0\leq r<m$,使得:$l=m\cdot q+r$;q和r分別叫商及餘數;不但找得到,而且只能找到一組!
【除法原理:整式系】設$\deg f(x)\geq\deg g(x)>-\infty$.(即$f(x)$與$g(x)$均非零多項式0,且前者次數只大不小),那麼必可找到多項式$q(x)$,(非零)及多項式$r(x)$, $\deg(r(x))<\deg(g(x))$; $q(x)$與$r(x)$分別叫商式及餘式,不但找得到,而且只有一組!
【規約】$\deg(g(x))$是'非零多項式' $g(x)$的'次數';
零多項式的次數規定爲$-\infty$(負無限大);
換言之,若是$\deg(r(x))=-\infty$,表示'除得盡',餘式爲零多項式.
【餘數定理】設整式$f(x)$被$(x-\alpha)$除,餘數爲r(商式不用管),則$r=f(\alpha)$.
當然這個等式有兩面的用法:或者由函數值$f(\alpha)$求得餘數r,或者由餘數r,求得函數值$f(\alpha)$.通常是後者.(因爲我們可以使用<u>綜合除法</u>!)
特例是:
【'9餘法'】'$f(x)$被$(x-1)$除'之餘數,就是諸係數的和!
【'11餘法'】'$f(x)$被$(x+1)$除'之餘數,就是偶次係數和減去奇次係數和!
餘式定理一個很重要的推論必須特別提出來講:
【因式定理】多項式$f(x)$可被$(x-\alpha)$除盡的充要條件就是$f(\alpha)=0$.
因此:'九餘法'和'拾壹餘法',都是餘數定理之類推,而'九盡法'和'拾壹盡法',都是因式定理之類推.

§7.2　原子觀

前面說過:'正整數系',對於乘法來說,其'原子'就是質數;對於'整式系'呢?
通常說的整式系有兩種:或者係數允許複數,或者限定實係數;前者是整式系$\mathbb{C}[x]$,後者是整式系$\mathbb{R}[x]$;

前者比較簡單!因爲代數學根本定理就說清楚:
$\mathbb{C}[x]$的'乘法原子',就是'一次式';
後者的情形,在整式系$\mathbb{R}[x]$中,除了一次式是質式以外,二次式ax^2+bx+c,也可以是質式,其條件爲:判別式$b^2-4ac<0$;
【問】爲何除外別無質式?因爲實係數的整式(方程式),虛根共軛成對!

§7.3 韓信點兵:Lagrange方法

支那文明,在數學上,當然也有些貢獻.(大體上,支那文明比較偏重實用(=功利),所以對於根本性的問題,想都不想!)'鬼谷算',或即是韓信點兵,算是不錯的一個成就:
求一個自然數$F\in\mathbb{N}$,使得他,
'用3除,餘2',用5除,餘3',用7除,餘2';
因爲這樣子的題目出現在孫子算經中,所以這個理論也叫做'孫子算法'.
孫子(應該是指孫武,指孫臏也可以!)是大軍事學家,所以被認爲'必然是大數學家!';稱爲'鬼谷算'或韓信點兵,完全是同樣的理由!
這是三個'同餘問題'的聯立,我們採用很方便的'同餘'記號,

$$F\mathrm{mod}3=b_1, F\mathrm{mod}5=b_2, F\mathrm{mod}7=b_3;(\text{例如 } b_1=2, b_2=3, b_3=2,) \tag{§7A}$$

這種問題的解答公式,是出現在'算經'中的口訣
三人同行七十稀, 五樹梅花廿一枝,
七子團圓正月半, 除百零五便得知.
而由於金庸的名著,使得公式廣爲人知!
【孫子乘數】把漢文翻譯爲數學文,那麼公式就是

$$F=(b_1\cdot 70+b_2\cdot 21+b_3\cdot 15)\mathrm{mod}(105); \tag{§7B}$$

這裡出現的$M=[70,21,15]$,叫做孫子乘數;
而 $L=3\times5\times7=105$,當然是最小公倍數;我們先解釋後者!
如果我們把餘數b_j都取爲零,這樣子的問題,就叫做原來問題的

$$\text{'伴隨齊次方程}':0=F\mathrm{mod}3=F\mathrm{mod}5=F\mathrm{mod}7; \tag{§7C}$$

這個方程的'通解',(一切可能的解答)我們稱之爲'補助通解',當然是:
F爲$3,5,7,$的公倍數,因而就是'最小公倍數'L的倍數!
【平直疊合原理】同餘方程式(組)的通解,乃是其一特解,加上其伴隨齊次方程的通解而得!
【特解疊合原理】要如何找到這同餘方程式(三個一組)的特解?這只要把三個同餘方程組的特解加起來就好了!這三組就是這樣子做:原來的三

個方程只保留其一另外兩個都改爲伴隨的齊次方程;換句話說:我們要解

$$\begin{array}{ll} & F_1\text{mod}3=b_1, F_1\text{mod}5=0, F_1\text{mod}7=0; \\ & F_2\text{mod}3=0, F_2\text{mod}5=b_2, F_2\text{mod}7=0; \\ & F_3\text{mod}3=0, F_3\text{mod}5=0, F_3\text{mod}7=b_3; \\ \text{則解答爲} & F=F_1+F_2+F_3; \end{array} \tag{§7D}$$

【基底疊合原理】那三組方程的特解就是

$$F_1=b_1\cdot M_1, F_2=b_2\cdot M_2, F_3=b_3\cdot M_3; \tag{§7E}$$

這三個孫子乘數M_j,就是當對應的$b_j=1$時候的特解F_j!
所以,例如說,要找M_1,

$$M_1\text{mod}3=1, M_1\text{mod}5=0, M_1\text{mod}7=0;$$

我們只需考慮5,7,的公倍數,也就是35的倍數,從

$$M_1=35?70?105?$$

之中,一個一個去試!一下子就找到了!

§7.4 韓信點兵:Newton方法

Newton的辦法是'逐步做去'!首先應付[A]之第一個方程[Ai]:

$$F\text{mod}3=2;$$

通解就是:

$$F=2+3\cdot n;(n\in\mathbb{Z};)\text{意即 } F=2,5,8,11,14,\cdots$$

(我們爲方便就不寫$-1,-4,\cdots$)
其次考慮[A]之首兩個方程[A.i,ii]

$$F\text{mod}3=2, F\text{mod}5=3,$$

$3,5,$的最小公倍數=15,這就算出了補助通解;
至於特解,我們就從第一個方程的通解中去找:

$$2,5,8,\cdots$$

第三個就找到了!於是這個方程組[A.i,ii]的通解,就是:

$$F=8\text{mod}(15)=8,23,38,53,68,83,98,\cdots,$$

最後對付全部的[A]:

$$F\text{mod}3=2, F\text{mod}5=3, F\text{mod}7=2;$$

可是,前兩個,就等於單一個 $F\text{mod}15=8$,所以全部的問題,就是

$$F\text{mod}15=8, F\text{mod}7=2;$$

但是15,7,的最小公倍數=105;這就算出了補助通解;
至於特解,我們就從方程[A.i,ii]的通解中去找:

$$8, 23, 38, 53, 68, 83, 98, \cdots,$$

$8, 23$,第二個就找到了!於是這個方程組的通解,就是:

$$23\text{mod}(105);$$

§7.5 插值問體與孫子算法

【插值問題】假設給我們一個函數 $f(x)$,又給了 k 個不同的點 a_i,$(i=1,2,\cdots,k)$,我們當然可以算出在這些點的函數值:

$$f(a_i)=b_i, (i=1,\cdots,k,) \qquad (\S7F)$$

把問題顛倒過來,就問這樣子的問題:已經給了我們

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\cdots,(a_k,b_k); \qquad (\S7G)$$

其中 a_i 互異,要去找函數 $f(x)$,使得[F]成立!這樣子不夠精確:我們要求 $f(x)$ 是多項式函數.
【類推】由於餘數定理,這個 k 點插值問體,就等於:
求多項式 $f(x)$,使得:

$$f(x)\text{mod}(x-a_j)=b_j, (j=1,2,\cdots,k,) \qquad (\S7H)$$

當然是韓信點兵問題的類推!
我們也同樣有兩種方法來思考!
如果是Lagrange的方式,我們要找'孫子乘子' M_j, $(j=1,2,\cdots,k)$ 使得

$$\begin{aligned} M_j(x)\text{mod}(x-a_i) &= 0, (\text{當 } i\neq j,) \\ M_j(x)\text{mod}(x-a_j) &= 1; \end{aligned} \qquad (\S7I)$$

依照因式定理,上面 $(k-1)$ 個方程式的解答是

$$M_j(x)=\prod_{i\neq j}(x-a_i)\cdot A(x);$$

(當然 $A(x)\in\mathbb{R}[x]$,)那麼代入下一個方程式,那就是(依照餘數定理!)

$$1=M_j(a_j)=\prod_{i\neq j}(a_j-a_i)\cdot A(a_j);$$

我們已經假定了 a_i 互異,所以只要取 $A(x)$ 爲常數

$$A(x) = A = \frac{1}{\prod_{i \neq j}(a_j - a_i)}$$

就好了,因此'孫子乘子'就是

$$M_j(x) = \prod_{i \neq j} \frac{(x - a_i)}{(a_j - a_i)};$$

插值問體的口訣就是 Lagrange 插值公式

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \prod_{i \neq j} \frac{(x - a_i)}{(a_j - a_i)}; \tag{§7J}$$

請注意 $\deg(M_j(x)) = k - 1$, 因此 $\deg(f(x)) < k$;
【註】在 $\deg(f(x)) < k$ 的限制之下,插值問體的解答是唯一的!

【用 Newton 觀點考慮插值問題】逐步做去!
首先,$f_0 = b_1$ 可解 $f_0(a_1) = b_1$, 而且 $\deg(f_0) \leq 0$; 其一般解則爲

$$f_1(x) = f_0 + t_1(x) \cdot (x - a_1); \text{其中} t_1(x) \text{是任意多項式}; \tag{§7K}$$

現在取常數 $t_1(x) = t_1$, 使得

$$f_1(a_2) = f_0 + t_1 \cdot (a_2 - a_1) = b_2; \tag{§7L}$$

這將有一個(其實也是唯一的一個)解答!這一來首兩點的插值問題,一般解就是

$$f_2(x) = f_1(x) + t(x)(x - a_1)(x - a_2); \tag{§7M}$$

依此類推!

§8 物理:極值原理

§8.1 Heron 直進說

Heron(大約西元 20 年出生)完全清楚光線的直進說:光走直線的理由是'依直線而進,則路程最短!';由此,他得到大概是歷史上第一個理論物理的原理,當然它也是歷史上第一個最小作用量原理:
【Heron 平面鏡射原理】已予一平面 π; 以及其同側兩點 A_1, A_2; 眼睛在 A_1, 物在 A_2, 則物影在 A_2', 因爲:

$$\text{光(的里)程 } u(P) := \overline{A_2P} + \overline{PA_1} \tag{§8A}$$

圖圖:桌面邊緣的布置

'在限制條件 $P \in \pi$ 下,求里程極小'的答案,就是:

$$P = E = \overline{A_1 A_2'} \cap \pi; (\cap \text{ 意指'交截'};) \tag{§8B}$$

過 E 點作平面 π 的法線 $\overrightarrow{EN}$ 則:兩點 A_1, A_2 與法線 $\overrightarrow{EN}$ 共面!

$$\text{入射角} \angle A_2 EN = \text{反射角} \angle NEA_1 \tag{§8C}$$

【Heron的制限平衡問題】5這個問題可以轉化成物理學上的位能最小問題!

設有兩條不計重量的絲線,PA_1, PA_2,長爲 $l_j(, j = 1, 2)$,各分成兩段,一段 $\overline{PA_j}$ 在桌面上,另一段 $\overline{A_j B_j}$ 從桌面邊緣的定點 A_j 自然下垂,下端繫上重量 μ_j;兩條的絲線的另一端結成結點 P,限制在水平桌面之某一定直線 l 上活動.

全系統總位能是

$$u(P) = \mu_1 \overline{A_1 P} + \mu_2 \overline{A_j P} + C; (\text{常數} C = 2H - l_1 - l_2;) \tag{§8D}$$

我們假設 $\mu_1 = \mu_2$;靜力學的安定平衡條件是:位能必須極小!換言之:
Heron的制限平衡問題與Heron的光程最短問題其實完全相同!
但是制限平衡的問題可以另有解法!
原理是:限制力恰好抵銷總外力的法向成分!
現在受到的

$$\begin{aligned} \text{外力是} \quad & \mathbf{F}(P) := \mu_1 \mathrm{sign}(\overrightarrow{PA_1}) + \mu_2 \mathrm{sign}(\overrightarrow{PA_2}); \\ \text{限制力是} \quad & -\mathbf{F}(P)_\perp = -\mathbf{j}(\mathbf{j} \cdot \mathbf{F}(P)); \end{aligned} \tag{§8E}$$

圖圖:折射定律

我們此地是取 $\mathbf{i}$ 在 l 軸方向,而 $\mathbf{j}$ 與 l 軸垂直!
如此,在平衡時,總外力的切向成分爲零!即是:

$$\begin{aligned} &\mu_1 \sin \angle A_1PN = \mu_2 \angle A_2PN; \mu_1 = \mu_2; \\ \text{故} \quad &\angle A_1PN(\text{入射角}) = \angle A_2PN(\text{反射角}). \end{aligned} \tag{§8F}$$

§8.2 Snell-Fermat

Fermat 對 Snell 折射定律的解說,大概是歷史上第二個理論物理的原理;當然它也是歷史上第二個最小作用量原理.
歷史上第一(或二?)個物理的實驗觀察,應當是 Snell 的折射定律!
【Snell 的折射定律】光線從一介質進入另一介質時,入射線,與折射線,共一平面而與介面垂直!
入射角,與折射角,正弦之比只與兩介質有關!

Fermat 想到:可把 Heron 的鏡射原理推廣!光線的進行,同樣是選擇'光程最短!',只不過這個'光程',是'時程',並非'里程'!而光線的速率,與介質有關;因此'里程最短',並非'時程最短',反之亦然!(計程車司機最清楚了!)
於是:設光線在兩介質的速率各爲 v_1, v_2,從兩介質的點 A_1 到點 A_2,通過介面(xy 平面)上的 P 點,其間則是直線進行!故共費時

$$u(P) = \frac{1}{v_1}\overline{A_1P} + \frac{1}{v_2}\overline{PA_2} \tag{§8G}$$

【Snell 折射原理的動力觀】考慮如上述的 Heron 受限力學系統;
只是現在假定:絲線下端所繫的重量各爲 $\mu_1 \neq \mu_2$;(另外有一個不同:前此是'反射',因此 A_1, A_2,是在 l 的同一側,現在是折射,因此 A_1, A_2,是在 l 的

不同側;但是這和計算倒是不相干!)所以,全系統總位能是:公式[D]

$$u(P) = \sum \mu_j \overline{A_j P}$$

因此:Fermat的'光程極小問題'等於是這個'受限力學系統的平衡問題',只要令:

$$\mu_1 v_1 = \mu_2 v_2 \tag{§8H}$$

這個受限力學系統所受到的

$$\begin{array}{ll} \text{總外力是} & \mathbf{F}(P) := \mu_1 \mathrm{sign}(\overrightarrow{PA_1}) + \mu_2 \mathrm{sign}(\overrightarrow{PA_2}); \\ \text{限制力是} & -\mathbf{F}(P)_\perp := -\mathbf{j}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{F}(P)); \end{array} \tag{§8I}$$

我們此地是取$\mathbf{i}$在l軸方向而$\mathbf{j}$與l軸垂直!
如此,(限制力可以抵銷總外力的法向成分!)在平衡時,
總外力的切向成分為零!即是:

$$\mu_1 \sin\angle A_1PN = \mu_2 \angle A_2PN; (\angle A_1PN = \text{入射角}, \angle A_2PN = \text{折射角},) \tag{§8J}$$

§9 結論:學習(數學)的方法

有何學習數學的方法?當然是要你自己去慢慢體會,我只想提出兩點供參考:
【練習敘述!】對於定理或定義,'到底懂不懂?'差不多='講得清楚嗎?'
大定理,如代數學根本定理,或者Weierstrass連續函數的極值存在定理,暫時你是不可能懂得其證明的,但是嚴謹的敘述,應該是不難的!這是很重要的:在這個階段,'能敘述'當然是比'能證明'更重要,因為暫時你不可能會證明!
【類推!】學問總是這一部份和那一部分有關聯!掌握這種種關聯,你的認識,就深一層!尤其是'類推',常常是'真義'所在!