數學傳播　卷期, pp.

相異代表系面面觀

張鎮華

一. 緣起

相異代表系 (System of Distinct Representatives, 縮寫爲 SDR) 是1930年代的問題 [1], 我們可以將它視爲委員會推派代表的問題, 也可以看成配對問題或婚姻問題, 甚至叫做橫截理論(Transversal Theory) [2]。

在委員會推派代表的問題裏, 某個團體中的一群人, 組成若干性質不一的委員會, 每個人可能參加幾個不同的委員會, 視個人意願而定; 問題是, 能否每個委員會各推派一位代表出來共同議事; 前題是, 不同委員會推派出來的代表要相異, 這一些代表所組成的集合就是所謂的相異代表系。舉例來說, 下面是四個委員會 A_1, A_2, A_3, A_4 所組成的集合族:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\text{張三, 李四, 王五}\},\\ A_2 &= \{\text{李四, 趙六}\},\\ A_3 &= \{\text{王五, 趙六}\},\\ A_4 &= \{\text{王五, 趙六}\}. \end{aligned}$$

在這個集合族中, 我們可以選派張三代表 A_1, 李四代表 A_2, 王五代表 A_3, 趙六代表 A_4; 或者說, 這個集合族有一個相異代表系是 (張三, 李四, 王五, 趙六)。事實上, 這個集合族恰好有兩個相異代表系, 另一個是 (張三, 李四, 趙六, 王五)。在以後的討論裏, 爲了書寫的方便, 我們改用符號或數字代替人名; 例如, 我們可以用3, 4, 5, 6分別代表張三、李四、王五、趙六, 這樣我們就可以說, 當 $A_1 = \{3,4,5\}$, $A_2 = \{4,6\}$, $A_3 = \{5,6\}$, $A_4 = \{5,6\}$時, 集合族 (A_1, A_2, A_3, A_4) 恰好有兩個相異代表系, 一個是 (3, 4, 5, 6), 另一個是 (3, 4, 6, 5)。

如果我們要討論配對問題或婚姻問題, 可以設想有 n 個女孩, A_i 是第 i 個女孩所喜歡, 而可能託付終身的所有男孩所成的集合, 當作一個成功的月老, 你的任務就是要在每個女孩喜歡的男孩中選出一位白馬王子, 將他們配成一對, 當然, 二女不可同配一夫, 所以這個問題也一樣成爲相異代表系問題。

一般來講, 假如 $F = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 是一含有 n 個集合的集合族, F 的一個相異代表系就是一個含 n 個相異元素的序列 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中 $a_i \in A_i$ 對 $1 \le i \le n$ 均成立。

並不是所有集合族都一定有相異代表系, 下面這個例子就很明顯沒有相異代表系, 因爲只有1可以代表 A_1, 只有2可以代表 A_2, 結果 A_3 就找不到代表了。

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{1\},\\
A_2 &= \{2\},\\
A_3 &= \{1,2\},\\
A_4 &= \{1,2,3,4,5\}.
\end{aligned}$$

讀者可以感覺到, 這麼一個看起來簡單的問題, 答案也應該不難, (其實, 這是要看你想得到什麼樣的答案而定)。這篇文章主要的目的, 是想借著這一個容易描述的題材, 從數學及其應用的各種角度, 來闡述數學發展的一個例子, 它雖然談不上是有絕對的代表性, 卻可以看出數學發展的戲劇性及多樣性。數學傳播季刊早期有關相異代表系的文章請參見 [3, 4]。

二. Hall 定理及其證明

我們先從相異代表系的第一個基本定理說起。首先, 讓我們來看下面這個例子, 考慮由下列10個集合所構成的集合族:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{2,3,4,6,8\},\\
A_2 &= \{3,4,7,9\},\\
A_3 &= \{2,3,6,7,9\},\\
A_4 &= \{5,6,8,11,12\},\\
A_5 &= \{2,3,4,6,8\},\\
A_6 &= \{2,4,6,7,9\},\\
A_7 &= \{3,4,6,7,8\},\\
A_8 &= \{1,3,8,10,13\},\\
A_9 &= \{2,3,4,7,9\},\\
A_{10} &= \{2,4,6,8,9\}.
\end{aligned}$$

對於這個集合族, 並不是立刻就可以看出來它到底有沒有相異代表系, 如果有, 答案又爲何。我們可以用窮舉法逐一嘗試, 例如: 先試著用2代表 A_1, 3代表 A_2, 6代表 A_3, 5代表 A_4, 4代表 A_5, 7代表 A_6, 8代表 A_7, 1代表 A_8, 9代表 A_9, 這樣 A_{10} 就找不到代表了; 接著, 再有系統

地嘗試其他所有可能的情況, 如此經過一段不短的時間, 當我們把所有可能的情況都試過以後, 最後的答案是: 這個集合族沒有相異代表系。

我們或許會不相信這個結論, 懷疑在冗長的檢驗過程中可能出錯, 那麼我們可以再試一次, 或者乾脆寫一個電腦程式幫忙檢驗。其實不必這麼麻煩, 縱使不再重複這一個冗長的檢驗過程, 下面這個說法很快就可以讓人相信, 這個集合族的確沒有相異代表系。首先, 去掉 A_4 和 A_8 這兩個集合, 剩下的8個集合, 如果將它們的元素通通拿出來, 只有2, 3, 4, 6, 7, 8, 9這7個元素而已, 所以不論如何分配, 總是不可能讓這8個集合各自得到自己的代表。

更一般來說, 一個集合族要有相異代表系, 不可或缺的條件是, 隨便拿出 k 個集合出來, 其所含的所有元素通通算起來, 至少要有 k 個。換個方式來說, 如果你可以找到某 m 個集合出來, 其所含的所有元素總共達不到 m 個, 那麼這個集合族一定沒有相異代表系。

上述的條件不只是一個集合族有相異代表系的必要條件, 其實也是一個充份條件; 也就是說, 滿足上述條件的集合族就一定會有相異代表系。這就是1935年著名的 Hall 定理 [1], 現在也常被人稱爲婚姻定理 (marriage theorem)。

Hall定理: *集合族 $F = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 有一個相異代表系的充分必要條件是, 任意從 F 中選取 k 個集合, 其聯集至少有 k 個元素。*

到底是什麼樣的直覺使 Hall 相信, 那個簡單而容易明瞭的必要條件同時也是充份條件, 歷史上並無記載; 然而, 就像許多數學定理一樣, 經過人們一再的精鍊, 我們已經可以提出種種簡明的證明。在普通的離散數學教科書中, 不難找到用數學歸納法寫出的證明; 不過, 最叫人讚賞的還是 Rado 提出來, 用最小原理的證明。簡單的說, 就是假設定理不成立, 所以有一個最小反例, 再經過一些集合個數計算的方法, 最後導出矛盾。這樣的手法, 基本上和數學歸納法有相同的本質, 在離散數學的領域中, 是一種經常使用的法子。

Hall定理的第一種證法: (參見 [5,6]) 必要條件如前所述。

我們用數學歸納法證明充分條件。當 $n = 1$ 時, 定理顯然成立; 假設 $n \geq 2$, 而且當 $m < n$ 時定理成立。對於 $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ 我們用 $A(I)$ 表示 $A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}$。則 Hall 的條件相當於: $|A(I)| \geq |I|$ 對所有 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ 恆成立。分兩種情形證明。

(1) 除了 $I = \varnothing$ 或 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 以外均有 $|A(I)| > |I|$。

由 Hall 的條件可知 $|A_n| \geq 1$, 也就是 $A_n \neq \varnothing$, 所以可以選一元素 $x_n \in A_n$。考慮集合族 $(B_1, B_2, \ldots, B_{n-1})$, 其中各 $B_i = A_i - \{x_n\}$; 對任一集合 $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $|B(I)| \geq |A(I)| - 1 > |I| - 1$, 也就是 $|B(I)| \geq |I|$, 所以由歸納法假設, $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ 有一個相異代表系 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 再加上 x_n 和這些元素都相異, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 就是 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的一個相異代表系。

(2) 有一眞子集 I 滿足 $|A(I) = |I|$。

由歸納法假設, 集合族 $(A_i : i \in I)$ 有一相異代表系 $(x_i : i \in I)$。考慮另一個集合族 $(B_i : i \notin I)$, 其中 $B_i = A_i \setminus A(I)$; 當 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$ 時, 由 $B(J) = A(I \cup J) \setminus A(I)$ 及 Hall 的條件, $|B(J)| = |A(I \cup J)| - |A(I)| \geq |I \cup J| - |I| = |J|$, 根據歸納法假設, $(B_i : i \notin I)$ 有一相異代表系 $(x_i : i \notin I)$, 將這兩組相異代表系合起來, 就得到一個 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的相異代表。 □

Hall定理的第二種證法: (參見 [2]) 必要條件如前所述。

假設充分條件不對, 找一個沒有相異代表系, 但滿足 Hall 的條件的最小集合族 $F = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, 也就是說, 從任一個 A_i 中去掉任一個元素之後, Hall 的條件就不再對了。此時, 由 Hall 的條件, 每一個 A_i 都不是空集合, 如果 $A_i = \{x_i\}$, $1 \leq i \leq n$, 則由 Hall 的條件, 可以知道這些元素 x_i 都相異, 從而, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的一個相異代表系。

假設某一集合, 不失一般性假設其爲 A_1, 含有兩相異元素 x 和 y, 我們要證明這是不可能的。考慮兩集合族 $(A_1 - \{x\}, A_2, \ldots, A_n)$ 和 $(A_1 - \{y\}, A_2, \ldots, A_n)$, 由於 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 是滿足 Hall 的條件的最小集合族, 這兩個新的集合族都不滿足 Hall 的條件, 因而存在 $I, J \subseteq \{2, 3, \ldots, n\}$ 使得

$$\begin{aligned} 1 + |I| &> |(A_1 - \{x\}) \cup A(I)| \geq |A(I)| \geq |I|, \\ 1 + |J| &> |(A_1 - \{y\}) \cup A(J)| \geq |A(J)| \geq |J|, \end{aligned}$$

亦即 $|X| = |I|$, $|Y| = |J|$, 其中 $X = (A_1 - \{x\}) \cup A(I)$, $Y = (A_1 - \{y\}) \cup A(J)$, 所以

$$\begin{aligned} |I| + |J| &= |X| + |Y| = |X \cup Y| + |X \cap Y| \\ &\geq |A(\{1\} \cup I \cup J)| + |A(I \cap J)| \\ &\geq 1 + |I \cup J| + |I \cap J| = 1 + |I| + |J|, \end{aligned}$$

得到矛盾。 □

Hall定理是一存在性的描述, 後來 M. Hall [7], Rado [8]和 Mirsky [2]等人也都推導出一些量化的定理。比如, 若一個集合族除了滿足 Hall 的條件以外, 還要求每個集合至少有2個元素, 就可以證明這個集合族最少有2個相異代表系 (見習題1)。將此觀念推到另一種變化, 本文作者 [9]曾提出下述的問題。

對於任一非負整數 t, 一個 (t, n)-集合族是指一對所有非空子集 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ 均滿足 $|A(J)| \geq |J| + t$ 的集合族 $F = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$。如果用 $M(t, n)$ 表示 (t, n)-集合族相

異代表系最少的可能個數, 由 Hall 定理可知 $M(0,n)\geq 1$, 事實上很容易知道 $M(0,n)=1$。考慮 $F^*=(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, 其中 $A_i=\{i,n+1,n+2,\ldots,n+t\}$, $1\leq i\leq n$, 這是一個 (t,n)-集合族, 它共有 $U(t,n)=\sum_{j=0}^{t}\binom{t}{j}\binom{n}{j}j!$ 個相異代表系。[7]猜測 $M(t,n)=U(t,n)$, 並且當 $t\geq 1$ 時, 上述 F^* 也是唯一有這麼多相異代表系的 (t,n)-集合族。這個猜測後來 Leung 和 Wei [10]宣稱用 permanent 的定理可以證出來, 可惜發現是錯的 [11]。

三. Hall 定理的應用

Hall定理除了它本身的精巧以外, 也是離散數學理論的一個基本定理, 在數學的各個領域中, 一再被引用來做爲證明其他複雜定理的工具。下面我們將舉一個例子來說明。其他更多的例子可以參考一般離散數學的書籍, 如 [5, 6]。

所謂雙重隨機矩陣是一個 $n\times n$ 的非負實數矩陣, 其任一行或列的和均爲1; 如果其元素又剛好均爲0或1, 則稱爲排列矩陣, 換句話說, 每一行恰有一個1, 每一列也恰有一個1, 其他位置都是0。Birkhoff 和 von Neumann 曾經證明了一個雙重隨機矩陣的分解定理如下所述。

Birkhoff-von Neumann 定理: *對任意一個 n 階雙重隨機矩陣 D, 存在某正整數 m, m 個排列矩陣 $P_1,P_2,\ldots,P_m$, 以及 m 個和爲1的正實數 $c_1,c_2,\ldots,c_m$ 使得 $D=c_1P_1+c_2P_2+\cdots+c_mP_m$。例如:*

$$\begin{bmatrix}0.45&0.50&0.05\\0.55&0.15&0.30\\0.00&0.35&0.65\end{bmatrix}=0.3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}+0.5\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}+0.15\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+0.05\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}.$$

證明: 假設 D 有 r 個非零項, 顯然 $r\geq n$。我們要用數學歸納法來證明這個定理。當 $r=n$ 時, D 是一個雙重隨機矩陣, 取 $m=1$, $c_1=1$, $P_1=D$, 定理成立。

假設 $r>n$, 而且當 $r'<r$ 時定理成立。考慮集合族 $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, 其中 $A_i=\{j: D_{ij}\neq 0\}$; 對於任一 $I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$,

$$|A(I)|=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ j\in A(I)}}D_{ij}\geq\sum_{\substack{i\in I\\ j\in A(I)}}D_{ij}=\sum_{\substack{i\in I\\ 1\leq j\leq n}}D_{ij}=|I|,$$

其中第 (最後) 一個等式成立是因爲任一行 (列) 的和爲1, 不等式成立是因爲 D_{ij} 非負, 接下去的等式由 A_i 的定義可得。由 Hall 定理 $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ 有一個相異代表系 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, 令 P 爲對應於排列 $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ 的排列矩陣, 同時 $c=\min_{1\leq i\leq n}D_{ia_i}$, 則 $0<c<1$, 此時 $D'=\frac{1}{1-c}(D-cP)$ 是一個非零項數爲 $r'<r$ 的雙重隨機矩陣, 由歸納法假設, 存在排列矩

陣 $P_1, P_2, \ldots, P_m$ 及和爲1的非負實數 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 使得 $D' = c_1P_1 + c_2P_2 + \cdots + c_mP_m$, 因此

$$D = (1-c)D' + cP = (1-c)c_1P_1 + (1-c)c_2P_2 + \cdots + (1-c)c_mP_m + cP,$$

其中係數亦爲非負且和爲1, 所以定理得證。 □

Birkhoff 和 von Neumann 原來的證明比較繁雜, 上述應用 Hall 定理的證明, 充份展現了 Hall 定理的威力。如果有機會回頭去讀 Birkhoff 和 von Neumann 兩人原來的證明, 就會發現, 裏頭穩含後來發展出來的線性規劃的對偶定理相關的內容。若再回到 Hall 定理來看, 這也暗示 Hall 定理應當和某些線性規劃或整數規劃有所關聯。在這裏我們可以體會到, 一個數學理論的發展 (例如線性規劃的理論), 常常不是單獨冒出來的, 在其發展的年代前後, 許多類似或相關的思想, 總在同時期前前後後相繼出現。從文獻上考據, Hall 定理出現在1935年的論文, 事實上, 早在1931年 König [12]就曾經用 (0,1) 矩陣的語言證明到相同的結果; 尤有甚者, Menger [13]在1927年時, 因爲研究網路的連通性, 就有一些更一般化的定理。Hall定理重要的貢獻是, 這樣描述的定理, 開啓了一些緊閉的窗扉, 通向鮮爲人知的大道。從1930年代到1950年代之間是相異代表系的起步時期, 其中 Rado 的貢獻頗多; 一直到1960年代, 這套理論和 擬陣理論(matroid theory)(參見 [14, 15, 16]) 相結合, 更大放異彩。

四. 電腦和演算法

在許多實用的例子裏, 當我們把問題化爲求集合族的相異代表系時, 其所涉及的集合及元素個數常常是成千上萬, 用人力及紙筆的計算根本不可能。電腦的發明打破了這個局限, 許多大量及重複的計算, 在電腦無怨的默默運算下, 快速精確地完成。

事實上, 電腦的能力在第二次世界大戰時初試鶯啼, 到如今, 其對人類全面性的影響已經十分明顯。第二次世界大戰時, 美國軍方爲了有效運用軍備及兵力, 由 Dantzig 發展出線性規劃的單體法(simplex method), 配合上 von Neumann 設計出來的電腦, 應用到武器和兵力在各戰場的分配, 得到很好的效果。這便是運籌學(operations research) 的起源, 展現出數學家在實用上的貢獻, 而這套理論, 要是缺少電腦快速計算的幫忙, 完全無從發揮效力。戰後, 這套理論被用到工商業界, 據說有很長久一段時期, 世界各地的電腦佔很大時間在執行單體法的計算。很有名的例子是, 美國航空 (US Air) 成立了一個運籌學小組, 替他們發展出一套飛機排程及票務相關系統, 比原來人工安排精確並有效不少, 替公司省了不少經費。

電腦的進步十分快速, 比起早年初創, 快而方便千百倍; 不過, 不管電腦的速度多快, 一個好的方法和一個差的方法, 寫成電腦程式, 執行起來的效果還是有極大的不同。回到相異代表

系的問題來看, 如果用土法鍊鋼, 去嘗試一個個可能的答案, 縱使使用電腦, 找出答案的速度也將很慢。那麼試試看 Hall 定理, 這麼漂亮的敍述應該有所幫助。假設我們有 n 個集合, 爲了回答是否存在相異代表系, 我們必須對任意 k 個集合試看看其元素總數是否至少 k 個, 如果很幸運, 所有可能的情況都是肯定的, 那就表示存在相異代表等, 如果在計算的中途有某 m 個集合其元素總共不及 m 個, 就表示不存在。從計算觀點來說, 任取 k 個集合的組合, 共有 2^n 個可能: 取0個集合有1種, 取1個集合有 n 種, 取2個集合有 $n(n-1)/2$ 種, 取3個集合有 $n(n-1)(n-2)/6$ 種, $\cdots$。這其中的 2^n 對於大一點的 n 其實是一個天文數字, 電腦也將無可奈何。爲了讓大家有大略的感覺, 讓我列出一個參考表如下所示:

n	$n\log n$	n^2	n^3	2^n
10	2.3×10	10^2	10^3	10^3
10^2	4.6×10^2	10^4	10^6	10^{30}
10^3	6.9×10^3	10^6	10^9	10^{300}
10^4	9.2×10^4	10^8	10^{12}	10^{3000}
10^5	1.2×10^6	10^{10}	10^{15}	10^{30000}

從這個表中可以看出來, 只要 $n=100$, 2^n 就是一個可怕的數字。舉個例子來說, 如果電腦每秒鐘可以幫忙算 10^{10} 個情況 (不算慢了), 以一年約有 3×10^7 秒估算, 利用 Hall 定理需花去 3×10^{12} 年才能幫你驗算出相異代表系存在與否 (嘆! 我生苦短!), 更何況, 縱使驗算出最後答案是肯定的, 知道相異代表系的確存在, Hall 定理並未提供你一個相異代表系。從這個計算觀點來看, Hall 定理簡直成了一大廢物。(所以說, 並無行諸四海皆通的道理。)

Hall定理並不是一個極端的例子, 在衆多實用的例子中, 電腦程式安排的好壞, 確有極大的差別, 於是*演算法理論*應運而生。簡單來說, 這個理論, 在消極方面是要在你提供的方法眞正寫成程式前, 先做一番理論的估算, 瞭解所花的時間不會像 2^n 那樣的成長, 這是預防用的; 更積極來說, 如果別人的方法從你的理論分析起來不佳, 這個行業的人有興趣的是替人消災, 看看如何設計出有效的方法供人使用。

演算法理論發展至今五花八門, 方法各式各樣, 其中最基本用來判定一個方法好壞的準則, 是看其時間是否爲 (或小於) 問題參數 n 的多項式, 一般以多項式時間的方法稱爲有效算法, 拿上表來看, 光是 $n=100$ 這樣小的數目, n^3 和 2^n 就可以差上許多, 可見一斑。有關演算法的書籍可參考 [17, 18, 19]。

當然, 實用上更精細的分析也常因問題及需要性而有差異。舉個例子來說, $n\log n$ 和 n^2 雖然一樣是多項式時間, 但是當 $n=10^5$ 時相差可達百倍, 這百倍說大不大, 說小可也不小。

比方說, 我們現在的大專聯考大約有十萬考生, 考完試以後, 閱卷、計分、排序、填志願、分發 $\cdots$ 試務極多, 就以排序一項來說, 要把十萬考生的成績由大而小排出來, 也算一大工程; 當然啦, 在電腦的幫助之下, 排序算是一項簡單的工作, 學過一點資料結構入門的人至少也知道五種排序方法; 可是這些方法確有種種不同, 有的容易寫程式, 有的速度快, 其中有的花的時間就是 n^2, 有的花時間是 $n\log n$。這樣看來, 排序的快慢也有百倍之差, 也就是說, 寫的好的排序程式, 可能兩三天排出來考生的成績, 寫的差的可能要一年。一年! 如果眞有這樣的排序程式被用上的話, 那十萬考生考完聯考後, 最節省的方法就是先去當一年兵再回來看榜, 於是中華民國的兵役制度就有了極大的變化了。

五. 匈牙利算法

匈牙利籍的 König 和 Egerváry 在1930年代發展出求相異代表系的有效算法, 現在俗稱*匈牙利算法*。為了介紹這個方法, 我們順便引進圖論的語言, 在這套說法裏, 相異代表系問題就相當於二部圖裏求最大匹配的問題。

一般而言, 一個*圖*(graph) 包括有限個*頂點*(vertices), 以及一些聯接兩頂點的*邊*(edges)。圖1中的圖有8個頂點 $A_1, A_2, A_3, A_4, 3, 4, 5, 6$, 以及9條邊 $(A_1, 3)$, $(A_1, 4)$, $\ldots$, $(A_4, 5)$, $(A_4, 6)$。

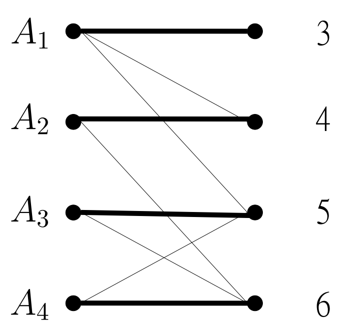

圖1

將圖畫出來只是爲了視覺上的幫忙, 其實我們只需要列出這些點和邊來就可以決定這個圖, 尤其在電腦程式中, 更看不出圖1這樣的東西來。值得留意的是, 圖1的頂點只有8個, $(A_1, 5)$ 和 $(A_2, 4)$ 這兩條邊相交出來的點並不算頂點, 事實上, 聯接某兩頂點的邊其實只在表示這兩頂點是有*關係*或*相鄰*而已, 到底是用直線或曲線表示, 並沒有差。有關圖論的書請參考[20, 21]。

圖1的圖就是所謂的*二部圖*(bipartite graph), 因爲其頂點可以分成兩個部份, 其中任一部份內的任二頂點不相鄰, 換句話說, 任一條邊一定是聯接不同二部份的兩頂點。其實, 圖1就是本文起頭的第一個集合族的圖表示法, $(A_1, 3)$ 是一條邊, 表示3在集合 A_1 之內 (我們已經

將張三、李四、王五、趙六改用3, 4, 5, 6代表)。在圖論裏, (A_1, A_2, A_3, A_4) 的一個相異代表系 (3, 4, 5, 6) 可以用$(A_1, 3)$, $(A_2, 4)$, $(A_3, 5)$, $(A_4, 6)$ 這四條邊來表示, 因爲這分別表示了 $3 \in A_1$, $4 \in A_2$, $5 \in A_3$, $6 \in A_4$; 這四條邊中任二條邊沒有共同頂點, 因爲四個元素各爲四個集合的相異代表, 圖1中的四條粗線表示這四條邊。像這種兩兩不含共同頂點的邊所組成的集合稱爲匹配(matching)。所以求某集合族 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的一個相異代表系, 相當於求它所對應的二部圖中的一個含 n 條邊的匹配。

用二部圖表示集合族 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 的另一個好處是可以看出集合 A_i 和元素 b_j 的對稱性。如果對每一個元素 b_j, 定義集合 $B_j = \{a_i : b_j \in A_i\}$, 則 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 和 $(B_1, B_2, \ldots, B_m)$ 所對應出來的二部圖, 除了頂點左右相反, 名稱各異以外, 實際上是同一個圖。在婚姻問題中, 這顯示男女平等 (或女男平等)。

隨便給一集合族 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, 並不一定存在相異代表系, 所以它的二部圖也不一定找得到有 n 條邊的匹配。一般來說, 我們有興趣的是, 隨便給一個二部圖, 求一個具有最多邊的匹配。換回集合族的語言, 某一集合族可能沒有相異代表系, 但我們可以求一最大的部份相異代表系, 也就是有些集合不派代表, 但派代表的任兩集合也要派相異代表, 現在當然是要看最多能有多少集合派出代表。著名的匈牙利算法(Hungarian algorithm) 就是解決二部圖最大匹配問題的有效方法。

給定一個二部圖 $G = (A, B, E)$, 其中 A 和 B 表示頂點的二個部份, E 表示邊集, 任一條邊有一個端點在 A, 另一個端點在 B。圖2表示一個有12個頂點及13條邊的二部圖, 粗線的四條邊形成一個匹配 $M = \{(a_1, b_1), (a_2, b_6), (a_3, b_2), (a_4, b_4)\}$。

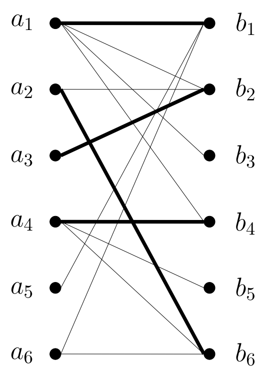

圖2

一個圖 G 的一條 M-可擴張路徑(M-augmenting path) 是一條含 $2n+2$ 個頂點及 $2n+1$ 條邊的路徑 $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n+1})$, 並滿足下列三個條件:

(A1) $(v_0, v_1), (v_2, v_3), \ldots, (v_{2n}, v_{2n+1})$ 這 $n+1$ 條邊均不在 M 內;

(A2) $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \ldots, (v_{2n-1}, v_{2n})$ 這 n 條邊均在 M 內;

(A3) v_0 和 v_{2n+1} 都不是任一 M 中的邊的端點。

在上述定義中, 像 (A3) 中所描述的 v_0 和 v_{2n+1} 這樣的頂點, 叫做 *M-暴露點*(M-exposed vertices)。例如在圖2中, a_5, a_6, b_3, b_5 都是 M-暴露點, (a_5, b_1, a_1, b_3) 是一條 M-可擴張路線, $(a_6, b_1, a_1, b_4, a_4, b_5)$ 也是。

找到一條 M-可擴張路徑 P 的用處是, 可以將 M 裏在 P 上的邊去掉, 換上 P 中不在 M 的邊, 得到一個新匹配 M^*, 其邊數比原來 M 的邊數多1。圖4就是用 (a_5, b_1, a_1, b_3) 做出來的 M^*。

法國數學家 Berge 曾經證明下述的定理, 它對一般的圖都成立。

Berge定理: *任一圖中的匹配 M 是最大匹配的充分必要條件是不存在 M-可擴張路徑。*

匈牙利算法的主要精神就是從二部圖 $G = (A, B, E)$ 的任一匹配 M(例如空集合) 開始, 逐層有系統的尋找一條 M-可擴張路徑, 若找到就可以得到一個更大的匹配, 再繼續一直到不存在 M-可擴張路徑爲止。其方法如下所述:

(H1) $i \leftarrow 1$; 列出 A 中所有 M-暴露點當第 i 層。

(H2) 當 i 是奇數時: 列出和第 i 層頂點相鄰但不曾被列出過的頂點當第 $i+1$ 層; 如果這一層沒有頂點, 表示不存在 M 可擴張路徑, 這時 M 已經是最大匹配。

(H3) 當 i 是偶數時: 若第 i 層有一個 M-暴露點, 表示找到一條 M 可擴張路徑; 否則將第 i 層每一頂點所連接的一條 M邊找出來, 另一端點當做第 $i+1$ 層的頂點。

(H4) $i \leftarrow i+1$ 並回到 (H2) 重做。

以圖2爲例, 可以得到圖3所示層次, 因此就得到 (a_5, b_1, a_1, b_3) 這條 M-可擴張路徑。利用這條 M-可擴張路徑得到的新的匹配就如同圖4所示。

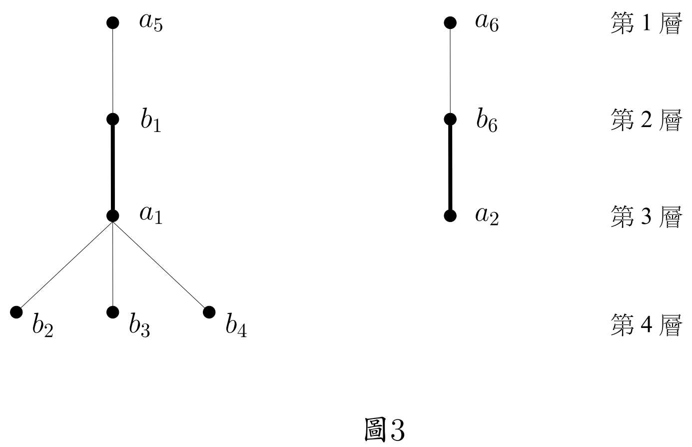

圖3

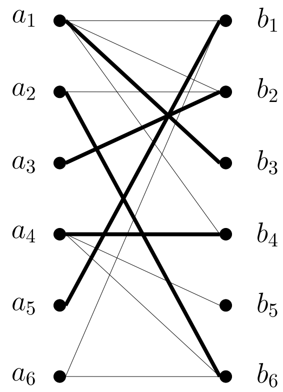

圖4

如果用同一個方法作用到圖4的匹配, 可以得到圖5所示的層次, 這時候, 經過5層, 匈牙利算法就停在步驟 (H2), 表示不存在可擴張路徑, 所以圖4的匹配是最大匹配。

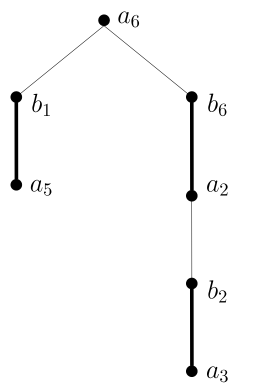

圖5

在結束這一節之前, 我要提出一個小的問題, 這是大部份文章或書籍內不曾關心到的小細節, 一般人或許不在乎, 但當做一個數學研究者, 這樣的邏輯推演是要很在意的。這個問題是: 爲什麼匈牙利算法在 (H2) 步驟停下來時就表示找不到 M-可擴張路徑? (如果這是對的, 經由 Berge 定理, 自然可以說 M 是一個最大匹配。)

一般似乎覺得匈牙利算法這樣一層層的有系統找法, 應該已經把所有可能的 M-可擴張路徑都找尋過了, 但這其實是直覺上的邏輯迷思。主要的問題是, 在各步驟中, 各層頂點被列出的次序並不限定; 當某層的頂點用不同順序列出來時, 其畫出的圖可能不同, 例如將圖2的匹配執行匈牙利算法時, 如果是 a_6 先於 a_5, 則可能得到圖6的層次 (請和圖4比較), 於是得到另一

M-擴張路徑 (a_6, b_1, a_1, b_3)。所以一般而言, 可擴張路徑的找法有很多種, 我們不能說已經找過所有路徑。

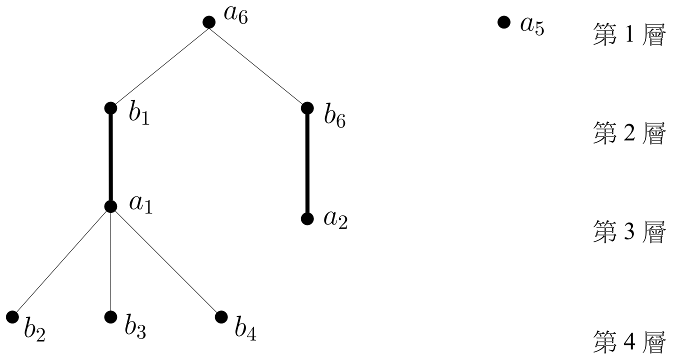

圖6

當然, 如果同樣是得到 M-可擴張路徑, 還是一樣可以得到更大的匹配 M^*。麻煩的是, 如果得不到可擴張路徑, 是否表示換另一種順序就一定得不到可擴張路徑? 或者更進一步來說, 如果在更早期的運作裏, 就用了各式各樣不同順序, 得到不同匹配, 會不會就在這一次就變成可以找到可擴張路徑? 甚至, 有沒有辦法可以保證, 不可能再用其他任何方法找到可擴張路徑? 凡此種種, 從數學的嚴謹性來說都是必須講求的。下一節, 我們將引進對偶(duality) 的說法來解釋爲何匈牙算法停下來時, 它的答案就是最大匹配。

六. 對偶理論

這一節我們準備引進對偶理論, 這樣的概念在離散數學或一般數學上很常見, 其精神也展現了線性規畫的對偶性質, 是一個有用的方法。

在一圖 $G = (V, E)$ 中, 一個頂點蓋集(vertex covering) 是指一個頂點集$S \subseteq V$, 使得 G 中任一條邊 (x, y) 至少有一端點在 S 中。舉例來說, 圖4的二部圖中, $S = \{a_1, a_4, b_1, b_2, b_6\}$ 就是一個頂點蓋集。例如 (a_1, b_1) 這條邊就有 a_1 這個端點在 S 中; (a_1, b_2) 更有兩個端點都在 S 中; 其他邊也均相同。

如果 M 是任意一個匹配, S 是任意一個頂點蓋集, 則 M 中的任一條邊可以對應到一個 S 中是此邊端點的頂點 (若有兩個可能, 則隨便選一個頂點出來對應), 因爲 M 是匹配, M 中不同二邊並不會對應到相同的頂點, 所以 $|M| \leq |S|$; 一般來說, 有些 S 中的頂點也可能不被對到, 所以不等號可能成立, 因此, 可以得到下列的弱對偶不等式:

$$\max_M |M| \leq \min_S |S|,$$

這就是說, 最大匹配的邊數不超過最小頂點蓋集的頂點數。

要說明匈牙利算法的確給出最佳解, 我們考慮下面兩集合 M^* 和 S^*: 首先, M^* 就是算法停下來時的匹配; 其次, 在算法停下來的最後那次, 有些頂點被列出來, 有些未被列出來, S^* 就是所有 A中未被列出的頂點和 B 中被列出的頂點所成的集合。舉例來說, 由圖4這個匹配經由圖5顯示, 匈牙利算法停下來, 所以得到

$$\begin{aligned} M^* &= \{(a_1,b_3),(a_2,b_6),(a_3,b_2),(a_4,b_4),(a_5,b_1)\}, \\ S^* &= \{a_1,a_4,b_1,b_2,b_6\}. \end{aligned}$$

如果我們能說明下列三件事情:

(D1) M^* 是一個匹配,

(D2) S^* 是一個頂點蓋集,

(D3) $|S^*| \leq |M^*|$,

則可以得到下列不等式:

$$|M^*| \leq \max_M |M| \leq \min_S |S| \leq |S^*| \leq |M^*|,$$

因此, 所有不等式也就成爲等式, 這其實一舉證明了下面三件事實:

(D1$'$) M^* 是一個最大匹配。

(D2$'$) S^* 是一個最小頂點蓋集。

(D3$'$) 最大匹配的邊數等於最小頂點蓋集的點數。

要說明 (D1)(D2)(D3) 成立並不難。首先, 由演算法可以得知 M^* 顯然是一個匹配, 所以 (D1) 成立。

要說明 (D2), 假設 S^* 不是一個頂點蓋集, 表示存在一條邊 (a,b), 其中 a 是 A 中被列出來的頂點 (這個頂點在 i 爲奇數的某個第 i 層), 而 b 是 B 中未被列出來的頂點。但如果是這樣的話, 當匈牙利算法在 (H2) 步驟做到第 i 層的 a 這個頂點時, 就應該將 b 列出來, 不可能最後還不被列出來的。可見 S^* 是一個頂點蓋集, 所以 (D2) 成立。

要說明 (D3), 可分兩方面。首先 S^* 中任一頂點若是在 A 中, 必是未被列出來的某頂點 a, 此時必有一條 M^* 中的邊和它相鄰, 要不然它應該在 $i=1$ 時就被列出來; 例如圖4的 M^* 中

$$a_1 \text{ 對應 } (a_1,b_3), \quad a_4 \text{ 對應 } (a_4,b_4)。$$

如果 S^* 中的頂點是在 B 中的某個頂點 b, 則它是被列出來的頂點, 它必是在某個偶數 i 的第 i 層, 由匈牙利算法的 (H3) 步驟, 它該對應某個 M^* 中的邊; 例如圖4的 M^* 中; 在圖5可見

$$b_1 \text{ 對應 } (a_5,b_1), \quad b_6 \text{ 對應 } (a_2,b_6), \quad b_2 \text{ 對應 } (a_3,b_2)。$$

因此, S^* 中的每一頂點均對應到 M^* 中的某一邊, 當然, 不同頂點對應到不同邊, 所以 $|S^*| \leq |M^*|$, 也就是 (D3) 成立。

七. 穩定婚姻問題

相異代表系的求解可以轉化爲圖論中的二部圖最大匹配問題, 其解法我們已詳細解說如上。後來的發展朝各個方面展開, 例如:

(1) 更快的算法。

(2) 邊加權二部圖的最大匹配問題。

(3) 一般圖 (不一定是二部圖) 的最大匹配問題。

(4) 網路的最大流問題。

(5) 二擬陣相交問題。

(6) 穩定婚姻問題。

相關資料可參考 [15, 16, 17, 18, 19]。這一節裏, 我們以穩定婚姻問題爲例, 做一點介紹。在這方面交大資科系譚建民教授研究極多。

假設現有 n 男 n 女, 每個人對異性均排出其喜好的順序, 下面圖7中的表裏顯示出4男4女, 男生用 a, b, c, d 命名, 女生用 A, B, C, D 爲名。在某一男生所對應的橫列, 及某一女生所對應的直行所在位置有二個數目, 第一個數目表示這男生對這女生的排序, 第二個數目表示這女生對這男生的排序; 例如 (a, A) 位置所記載的1, 3表示 a 第1喜歡 A, 而 A 第3喜歡 a。就 a 來說, 他第1喜歡 A, 第2喜歡 B, 第3喜歡 C, 第4喜歡 D; 就 A 來說, 她第1喜歡 d, 第2喜歡 c, 第3喜歡 a, 第4喜歡 b。

	A	B	C	D
a	1, 3	2, 3	3, 2	4, 3
b	1, 4	4, 1	3, 3	2, 2
c	2, 2	1, 4	3, 4	4, 1
d	4, 1	2, 2	3, 1	1, 4

圖7

當這 n 男 n 女各自對其異性列出其喜歡的順序後, 我們的問題是要將男女兩兩配對, 使其成爲穩定配對系統。

男女兩兩配對的方法很多, 總共有 $n!$ 種, 那麼何謂穩定配對呢? 所謂穩定配對就是一種配對方法, 其中不存在任何一對不穩定的男 x 女 y, 他們沒有被配在一齊, 但是 x 喜歡 y 的

程度勝過他喜歡目前配偶, 而且 y 喜歡 x 的程度也勝過她目前配偶; 反之, 如果存在這麼一男一女, 這個系統就稱爲*不穩定*, 其所以不穩定是因爲 x 和 y 最有可能放棄目前配偶, 雙雙私奔, 造成社會不安。舉例來說, 就上述圖7的系統, 考慮下面的配對法:

$$a \leftrightarrow A, \quad b \leftrightarrow B, \quad c \leftrightarrow C, \quad d \leftrightarrow D,$$

這樣的配對並不穩定, 因爲存在 b 和 D, 他們目前未被配在一齊; 但是 b 第2喜歡 D, 勝過第4喜歡他目前的配偶 B; 同時, D 第2喜歡 b, 勝過第4喜歡她目前的配偶 d。如果考慮下列的配對:

$$a \leftrightarrow C, \quad b \leftrightarrow D, \quad c \leftrightarrow A, \quad d \leftrightarrow B,$$

就沒有不穩定的因素存在, 比方說, 看看 a 和 B 這兩個人, 他們目前未被配在一齊; a 第2喜歡 B, 勝過第3喜歡他目前的配偶 C; 但是在 B 這方面, B第3喜歡 a, 差於她目前第2喜歡她的配偶 d; 所謂落花有意流水無情, a 雖然較喜歡 B, B 卻不會理他。其他任何兩個未被配在一齊的兩人也都類似, 不產生不穩定的情況, 所以這樣的配對是穩定的。

一般來說, 雖然不是任何一種配對都是穩定配對, 但也有不少是的。縱使如此, 當男女數目大一點時, 用目測的方法, 看表去找一組穩定配對, 卻也不容易。或者問看看, 什麼樣的喜好順序表有穩定配對? 什麼樣的沒有? 這似乎也不易看出來, 類似 Hall 定理的敍述也不清楚是否存在。

令人驚訝的是, Gale 和 Shapley 兩人提出一個演算方法, 經過 $n^2 - 2n + 2$ 個步驟以內, 不管表的長像如何, 永遠可以找到一組穩定配對。以下就來說說他們的方法。

這個方法可以稱爲*女方守株待兔法*, 方法是這樣的, 所有女生坐著等男生來求婚, 首先, 所有男生都去找他第1喜歡的女生, 如果這樣的結果每個女生恰有一個男生來求婚就停止; 如果有一個女生有多人向她求婚, 則展開第二回合。在第二回合裏, 每一有多人求婚的女生暫時接受一名, 就是她最喜歡的那一位, 拒絕其他人; 這些被拒絕的男生就退而求其次, 再去向他下一個喜歡的女生求婚; 這時候如果每一女生恰有一男生向她求婚, 就停止; 如果至少有一女生有多人向她求婚, 則類似剛才的方法, 再到下一回合。

以上這方法, 最多經過 $n^2 - 2n + 2$ 個步驟, 一定會停下來, 而且一定得到一組穩定配對。(請證明之)

由這樣的方法找出來的配對, 同時也是*男性最佳配對*(man optimal), 也就是說, 如果還有其他組穩定配對, 那麼任一男生在這組最佳穩定配對時, 其配偶的排名一定在另一方法時配偶排名之前。在直觀上, 這件事情其實很容易想像, 因爲每位女生都是被動的坐在那裏等人來求婚, 而男生則主動的由最喜歡的女生逐一求婚, 主動當然有利。當然啦, 爲了顧及女男平等, 我們也可以讓男士們坐著等女仕來求婚, 這樣就會得到一組女性最佳配對。

穩定配對可以推廣到大專聯考的分發問題, 此時, 考生可視爲男生, 各科系可視爲女生, 每一考生依其喜好塡志願來排列各科系, 每一科系用考生的成績來排列考生。這時比較大的不同是, 考生不一定要將科系完全排名, 而同時, 各科系也可選擇超過一個學生 (而且通常如此), 但是這些差別, 對於 Gale 和 Shapley 的算法卻沒什麼影響。所以這個方法說起來是考生最佳分配方法, 從這個觀點來說, 大專聯考的分發實在是替考生想盡了好處。有一點值得注意的是, 以前的聯考計分均採總分制, 每個科系對學生的排序均相同, 現在的計分採加權制, 不同科系加權的科目不同, 對考生的排序也不同, 不過, 不管如何, 由以上的理論, 分發對考生仍是很有利的。

八. 擬陣理論

數學家最拿手的好戲之一是將事情抽象化, 這一方面是要將各個不同樣子的東西, 用一種方式表達出來, 由一種說法來涵蓋許多已知的結果, 更進一步由此導出簡便的證明, 以及新的結論。就這一方向來說, 二部圖的配對可以抽象成二擬陣相交問題。

擬陣 (matroid) 也就是類似於矩陣的意思。在線性代數(或者乾脆就說矩陣) 裏, 有線性獨立的觀念; 在圖論討論生成樹時, 有不含迴圈的觀念; 在二部圖的配對裏, 有邊對 A (或 B) 各頂點的度數不超過1的觀念; 另外在其他許多離散數學的內容中, 也有類似的觀念。這些看起來似乎不相干的東西, 都被一共同的抽象函蓋, 這個觀念就是擬陣。

擬陣理論始於1930年代 Whitney 的第一篇論文, 經後人的發揚光大, 將它和二部圖匹配結合, 創下二擬陣相交的種種理論, 成爲一重要的領域。這中間有許多技術層面的道理, 有興趣的讀者可參考 Welsh [22]及 Lawler [15]的書, 在此不多著墨。

九. 無窮集合的迷思

在討論相異代表系時, 我們一開始時規定集合族只有有限個集合, 而每個集合也只有有限個元素。如果我們將這有限的條件去掉, 那麼問題會有何變化呢?

變化可大著呢! 分三個層次來說。

首先, 如果集合個數還是有限, 譬如說有 n 個集合, 但有些集合有無窮多元素。這時候問題很容易, 我們可以先將問題限制在那些只有有限個元素的集合, 用 Hall 定理或任何一個方法來看看, 這個小一點的系統有沒有相異代表系。如果答案是肯定的, 那麼原來的大系統也一定有相異代表系, 因爲剩下的一些 (有限個) 集合每個都含有無窮多元素, 總有辦法找到代表自己的元素。如果答案是否定的, 那麼原來的大系統就更不存在相異代表系了。事實上, 我們也可以說, 這個時候 Hall 定理照樣成立。當然啦, 我們可以問, 如果是無窮集合, 它元素的個數是什麼意思。懂得一些集合論的人, 可視爲基數, 不知道也暫時沒有關係, 就想像無窮大於有限好了, 因爲這時候集合只有有限個。

如果集合個數是無窮多個又如何? 例如, 考慮集合族 $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$, 也就是每一自然數 n 都有一集合 A_n。這時許多事情就不一定成立了, 比方說, 最基本的 Hall 定理就不對, 簡單的例子是下面的系統:

$$A_1 = \{2, 3, 4, 5, \ldots\},$$
$$A_n = \{n\} \quad \text{其中 } n \geq 2。$$

這時候任意拿出 k 個集合出來, 如果 k 是有限數, 這些集合可能總共有 k 個元素, 也有可能有無窮多個元素 (如果拿到 A_1 的話); 如果是拿出無窮多個集合, 那麼元素總共也會有無窮多個, 假如我們有共識*無窮等於無窮*, 那麼Hall 定理的條件總是成立的, 但是這個系統無論如何找不出相異代表系, 因為 A_n 一定要用 n 當代表 $(n \geq 2)$, 所以 A_1 就沒有人可以代表它了。

無窮集合的迷思早在本世紀初集合論被提出來就有種種討論, 我們趁此做一點簡單介紹, 不過, 在這之前, 讓我們來說一下 Rado 證明*局部有限*的Hall 定理。這時候, 集合的個數可以無窮, 但是每個集合的元素都一定有限, 在這個情況下, Hall 定理又對了, 事實上, Rado 的證明顯示相異代表系存在的充要條件是對任意有限的 k 個集合其元素總共至少有 k 個。也就是不必拿無窮多個集合的條件來看。Rado 的證明是 Hall 定理加上*超無限歸納法*, 這是無窮集合的一個基本手段。

相異代表系在一般無窮的情況, 能講的實在很少, 我們就此打住。在結束本文之前, 讓我們來看一下無窮集合的一些有趣事情。

首先, 無窮本身其實是人類想出來的, 但我們不妨想像有*所有自然數所成集合*這種東西存在。

無窮的第一個迷思是*部份可以等於全部*。在歐氏幾何學裏, 開宗名義的幾個公理中, 有一個是*全部大於部份*。這看起來是天經地義的嘛, 一線段若切出一部份, 當然短一些; 十個數取出一半, 剩下5個, 當然就少了一些。如今, 在無窮集合裡卻不這樣了。

首先, 我們先要講清楚, 兩個集合什麼時候叫做個數相同。簡單的說, 就是可以將這兩個集合的元素列成一對一的對應。例如 $\{1, 2, 3\}$ 和 $\{4, 5, 6\}$這兩個集合一樣多元素, 因為可以 $1 \leftrightarrow 4$, $2 \leftrightarrow 5$, $3 \leftrightarrow 6$ 這樣一對一的配對。

同意了這個說法, 我們來看看所有自然數所成的集合 $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, 這是一個無窮集合, 如果我們將其中的第1個元素去掉, 得到 $N_1 = \{2, 3, 4, \ldots\}$, 我們要說 N_1 雖是 N 的一部份, 但是兩者的元素卻是一樣多, 這只要考慮下列的對應就可以了:

$$1 \leftrightarrow 2, \quad 2 \leftrightarrow 3, \quad 3 \leftrightarrow 4, \quad \ldots, \quad n \leftrightarrow n+1, \quad \ldots.$$

你可能會說, N 有這麼多元素, 少一個當然無所謂。如果是這樣, 讓我們再去掉更多元素看看, 這次, 去掉所有奇數, 留下所有偶數所成的集合 $N_2=\{2,4,6,8,\ldots\}$。去掉夠多了吧, 有一半不見了呢! 但是別急, N_2 還是和 N 有一樣多個元素, 請看下面的對應:

$$1\leftrightarrow 2,\quad 2\leftrightarrow 4,\quad 3\leftrightarrow 6,\quad \ldots,\quad n\leftrightarrow 2n,\quad \ldots.$$

如果你還是不滿意, 也可以說, 留下一半還是有很大比例嘛, 再看看下面這個例子, 去掉所有非完全平方數, 只留下平方數, 這時 $N_3=\{1,4,9,16,\ldots\}$, 這時候, 從1到 n^2 中間只留下 n 個數, 所以留下的比例是 $1/n$, 當 n 接近無窮大時, 這個比例就近乎零, 所以說, 留下來的比例夠小了吧! 可是, N_3 還是和 N 有一樣多元素:

$$1\leftrightarrow 1,\quad 2\leftrightarrow 4,\quad 3\leftrightarrow 9,\quad \ldots,\quad n\leftrightarrow n^2,\quad \ldots.$$

到此, 你可能還是會說, 總之, 都是無窮嘛, 所以當然都是一樣。如果你有這樣的誤會, 請看看下面這個例子, 設 $I=(0,1)$ 是介於0到1之間之所有實數所成的集合, 其中的每一元素都可以用

$$0.\ a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ldots\ldots\ldots$$

的方式表達出來, 其中各個 a_i 均是 $\{0,1,\ldots,9\}$ 中某一數。我們要說, 這次 N 和 I 的元素個數不同了。這可以用對角線法來說, 假設 N 和 I 的元素可以一對一應成如下:

$$\begin{aligned}
1\leftrightarrow x_1 &= 0.\ a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ a_{1,4}\ \ldots\\
2\leftrightarrow x_2 &= 0.\ a_{2,1}\ a_{2,2}\ a_{2,3}\ a_{2,4}\ \ldots\\
3\leftrightarrow x_3 &= 0.\ a_{3,1}\ a_{3,2}\ a_{3,3}\ a_{3,4}\ \ldots\\
4\leftrightarrow x_4 &= 0.\ a_{4,1}\ a_{4,2}\ a_{4,3}\ a_{4,4}\ \ldots\\
&\vdots\\
n\leftrightarrow x_n &= 0.\ a_{n,1}\ a_{n,2}\ a_{n,3}\ a_{n,4}\ \ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

考慮這樣的一個實數$0.\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4\ \ldots$, 其中每個 b_n 均和 $a_{n,n}$ 不相同, 比方說, $a_{n,n}=1$ 時就取 $b_n=2$, 而 $a_{n,n}\neq 1$ 時就取 $b_n=1$。這樣取出來的實數在 I 中, 但卻不可能是某個 x_n (因爲 b_n 不等於 $a_{n,n}$), 這就是一個矛盾, 所以 N 和 I 的元素個數不相同。

我們對無窮的例子就說到這裏, 本文也就此結束。有興趣的讀者可以參考數學傳播中柯慧美教授的譯文 [23], 或者一般集合論的書。

十. 習題

(1) 假設集合族 $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ 滿足 Hall 的條件, 並且每一集合 A_i 至少有2個元素, 證明這個集合族至少有兩個相異代表系。

(2) 若將上述的「2個元素」改成「 r 個元素」, 則可以得到什麼結論?

(3) 一最小 (t, n)-集合族是指一 (t, n)-集合族, 若去掉其中任一集合內任一元素, 結果就不再是 (t, n)-集合族。試證任一最小 (t, n)-集合族中的任一集合恰有 $t+1$ 個元素。

(4) 從實數列 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 中找出連續一段, 使其和爲最大, 其計算複雜最低可達多少? (可以對所有 $1 \leq i \leq j \leq n$ 算出 $x_1 + x_{i+1} + \cdots + x_j$ 的值, 再求其中最大的, 這樣要花去的時間大約是 cn^3, 所以你的答案一定要比這更改進, 最好是 cn。)

(5) 當 $r \geq 1$ 時, 證明每一個 r-正則的二部圖一定有一個完全匹配。

(6) 一個 $r \times n$ 階拉丁矩陣 $(r \leq n)$ 是一個 $r \times n$ 矩陣, 其元素均爲 $1, 2, \ldots, n$ 中的數, 而且同行或同列都沒有相同的數。證明: 當 $r < n$ 時, 任一個 $r \times n$ 階拉丁矩陣, 均可增加第 $r+1$ 列, 使成爲一個 $(r+1) \times n$ 階拉丁矩陣。

(7) 給定實數軸上的 n 個閉區間 $[a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq n$, 考慮下面兩個問題。第一個問題是要從這 n 個區間中, 找出最多個兩兩相交的區間。第二個問題是要將這 n 個區間, 分成最少類 (k 類), 每一類中的區間均兩兩不相交。有一個方法是這樣的, 首先, 將 n 個區間的右端點依大到小排序, 所以, 不妨假設 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$。現在考慮下面的著色方法: i 從1到 n 逐一的對 $[a_i, b_i]$ 著色, 其所著的顏色是最小的正整數 j, 使 $[a_i, b_i]$ 和任一已經著 j 的區間均不相交。

由上面的演算法很容易知道, 著同一色的區間兩兩均不相交。如果已經知道總共用了 k^* 個顏色, 請用對偶原理證明, 這個 k^* 是上述問題的最佳解。

(8) 證明所有正有理數和自然數有相同的基數。

參考文獻

1. P. Hall, On representation of subsets, *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), 26-30.
2. L. Mirsky, *Transversal Theory*, Academic Press, New York, 1971.
3. 王子俠著, 相異代表系統簡介,「數學傳播」, 第四卷第四期 (民國69年12月), 8-12。
4. 張鎭華著, 相異代表系古今談,「數學傳播」, 第十卷第一期 (民國75年2月), 53-59。
5. P. J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
6. C. L. Liu, *Introduction to Combinatorial Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1968.
7. M. Hall, Jr., Distinct representatives of subsets, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 922-956.

8. R. Rado, On the number of systems of distinct representatives of sets, *J. London Math. Soc.*, 42 (1967), 107-109.
9. G. J. Chang, On the number of SDR of a (t,n)-family, *European J. Combin.*, 10 (1989), 231-234.
10. J. Y.-T. Leung and W.-D. Wei, A Comparison theorem for permanents and a proof of a conjecture on (t,n)-families, *J. Combin. Theory, Ser. A.*, 61 (1992), 98-112.
11. G. J. Chang, Corrigendum, *J. Combin. Theory, Ser. A.*, 73 (1996), 190-192.
12. D. Konig, Graphok es matrixok, *Mat. Fiz. Lapok*, 38 (1931), 116-119. [Hungarian with German Summary.]
13. K. Menger, Zur allgemeinen Kurventheorie, *Fundamenta Math.*, 10 (1927), 96-115.
14. D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.
15. E. Lawler, *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
16. C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization, Algorithms and Complexity*, Prentice-Hall, Englewood Cliff, NJ, 1982.
17. T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein, *Introduction to Algorithms*, Second Editioon, The MIT Press, Cambridge, 2002.
18. U. Mamber, *Introduction to Algorithms, A Creative Approach*, Pearson Education Taiwan Ltd., Taipei, 2003.
19. A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. D. Ullman, *The Design and Analysis of Computer Algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
20. D. B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
21. R. Diestel, *Graph Theory*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2000.
22. D. J. A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic Press, London, 1976.
23. 柯慧美譯, 無限集合的一些特殊性質,「數學傳播」, 第一卷第一期 (民國65年5月), 53-57。

—本文作者任教於臺灣大學數學系—