主題：從 van der Waerden 定理談算數數列

主講：B92 蔡牧村

一、 簡介

問題 1：是否能將自然數分成兩類，使得沒有一類當中存在長度無限的算數數列？

如果不行的話，那任意長度的算數數列如何？Baudet 猜想將自然數分成兩類則一定有一類存在任意長度的算數數列。但稍後更強的結果立刻就被證明了：

van der Waerden 定理（1928）：將自然數分成任意多類，只要是有限類，一定會有一類當中有任意長的算數數列。

精確而言，他證明了如下的事實：

定理：對於任意的 k 和 l 都存在一個數 $n(k,l)$（稱爲 van der Waerden 數），使得若將長度爲 $n(k,l)$ 的一段自然數隨便分成 k 類，則都至少有一類存在長度爲 l 的算數數列。

例如：$n(k,1)=$____ 而 $n(k,2)=$_______（這即是 ______ 原理）

一般而言要決定 $n(k,3)$ 是多少已經相當困難了。

問題 2：請說明上面兩個定理的敘述是等價的。

二、 van der Waerden 定理的證明

關鍵：只要找出一個上界，就可以證明 van der Waerden 數存在。

剛才我們已經有 $n(k,1)$ 以及 $n(k,2)$ 的值了，現在我們準備用歸納法，即假設 $n(k,l)$ 對所有的 k 都存在，而我們要證明 $n(k,l+1)$ 也對所有的 k 都存在。我們作下面的遞迴定義：

$$q_0=1, n_0=n(k,l)$$
$$q_i=2n_{i-1}q_{i-1}, n_i=n\left(k^{q_i},l\right)$$

最後，我們宣稱：$n(k,l+1)\le q_k$。

至於細節，請於上課時專心聽講並勤作筆記。

三、 **van der Waerden 數與 Szemerédi 定理**

Szemerédi 定理（van der Waerden 定理的加強版）：

假設 $A \subseteq \mathbb{N}$ 滿足 $\limsup_{N\to\infty} \max_{m\geq 0} \frac{\#\left(A \cap [m+1, m+N]\right)}{N} > 0$，那 A 裡面就會有任意長的算數數列。

四、 與 **Ramsey** 理論的關連

Ramsey 理論：討論大結構的分割。其典型的結論通常具有如下的型式：

只要原本的東西夠大，那不管怎麼樣分成若干個部分，一定有某個部分包含了某種特定的結構。

例如，Ramsey 定理告訴我們，不管 n 是多少，只要人數夠多，一定有辦法在裡面找到 n 個彼此通通認識的人，或 n 個彼此通通不認識的人。一個有名的例子是 $n=3$ 的情況，此時只要 6 個人就足夠，記作 $R(3,3)=6$。

另外，Hales-Jewett 定理則說，不管 n 和 k 是多少，只要維度夠大，那麼將 $n \times n \times \cdots \times n$ 的高維方陣任意填成 k 種顏色時，一定會有某行某列是同一個顏色的。作為其推論，假如在高維度的棋盤中玩井字遊戲，下到最後就一定有會分出勝負，不會出現平手的情況。

類似的定理還有不少，但是往往都只能證明「夠大的時候就一定有辦法」、卻沒有辦法說清楚「到底要多大」。以 Ramsey 數為例，Erdös 曾經講過這樣的一個比喻：

假如今天擁有高度科技的外星人來攻打地球，說：「把 $R(5,5)$ 算出來，不然就把地球毀滅」，那麼我們應該做的事情是集合全世界所有的數學家跟電腦一起拼命把答案算出來；但是假如今天外星人說：「把 $R(6,6)$ 算出來，不然就把地球毀滅」，那麼我們應該做的事情是直接跟外星人拼了。

計算 $n(4,4)$ 跟 $n(5,5)$ 恐怕也是類似的難度。

五、 其他跟算數數列有關的問題

2004 年時，B. Green 和 T. Tao 宣稱證明了質數當中存在有任意長的算數數列。目

前其證明已經大致獲得一般數學界的承認。

另外一個著名的 Dirichlet 定理感覺上跟 Green-Tao 定理的敘述正好相反：

假設 a 跟 d 互質，那在所有型如 $a+dn$ 的自然數中存在無限個質數。

也就是說，一個無限長的算數數列只要滿足這個條件，裡面就會有無限個質數。這跟前面的問題正好相反。Dirichlet 定理的證明需要用到群特徵以及複數的方法，這邊就不多提了。

除此之外還有很多其他的研究是在討論其他類型的數當中是否存在算數數列的問題，其中值得一提的是冪次數。Fermat 首先提到，平方數當中不存在四項以上的算數數列，後來這個結論由 Euler 所證明。這個問題雖然屬於初等數論，但證明卻不容易，算是初等方法中頗難的一題。至於三次以上的數，1997 年時 Darmon 和 Merel 證明了裡面連三項的算數數列都不存在，其證明相當地困難，與 Wiles 證明 Fermat 最後定理的手法類似，這邊就不多說了。

六、 附錄

Teacher: Kids, today I would like all of you to sum over 1 to 100. This is very difficult and I’m not sure what your chances are.

Gauss: 50-50?

Teacher: Oh my god, you give the correct answer immediately! You’re a genius!