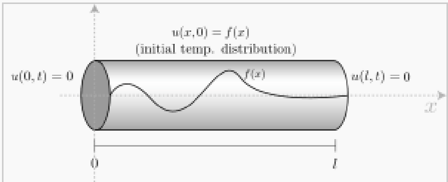
傅立葉級數

林楨芸

June 26, 2015

傅立葉級數是法國數學家 Joseph Fourier 在研究熱傳導方程時所提出的，希望熱傳導方程的解能用正弦及餘弦函數的級數和來表示。傅立葉級數在數論、信號處理、光學、聲學、影像處理等領域都有廣泛的應用，可說是與我們的生活息息相關。



在理想狀態下一根棍子的熱傳導，配上均勻的邊界條件。

考慮一個函數 $f(t), t \in [-\pi, \pi]$，我們想知道是否可以找到實數 a_n 和 b_n 將 $f(t)$ 以正弦及餘弦函數表示：

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad -\pi \le t \le \pi \tag{1}$$

而這樣的級數就稱為傅立葉級數。其中

$$\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \cdots, \cos nt, \sin nt, \cdots,$$

是所謂的諧波。這些諧波具有週期 $\frac{2\pi}{1}, \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \cdots, \frac{2\pi}{n}$ 。

微積分中主要工具

- 週期函數
  一個定義在實數上的函數 $f(t)$，若存在常數 $p > 0$ 使得 $f(t)$ 都滿足下面等式

  $$f(t+p) = f(t) \text{對於所有 } t \in \mathbb{R} \tag{2}$$

  函數 $f(t)$ 被稱為週期函數，此數 p 被稱為 $f(t)$ 的一個週期。如果一個週期函數 $f(t)$ 具有一個最小的週期 $p > 0$ ，則被稱作 $f(t)$ 的基本週期。

- 無窮級數/級數收斂性

- 極限/單邊極限

- 三角函數的積分

討論

假設一個函數 $f(t), t \in [-\pi, \pi]$ 可以用正弦及餘弦函數表示，也就是說

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad -\pi \le t \le \pi \tag{3}$$

並假設我們可以對級數 (1) 逐項積分。則 a_0 為

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \tag{4}$$

且 $a_n, b_n, n \ge 1$ 如下

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt \tag{5}$$

問題 **1.** 說明 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mxdx = 0$ 對於所有 n, m

問題 2. 説明

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} 0 & \text{如果} n \neq m \\ \\ \pi & \text{如果} n = m \end{cases} \tag{6}$$

問題 3. 計算 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx$

問題 4. **說明等式** *(4)* **和** *(5)*，**也就是**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

且 $a_n, b_n, n \geq 1$ **為**

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$$

傅立葉級數

Definition 1 (傅立葉級數). **假設** $f(t)$ **為一個分段連續函數，定義在** $[-\pi, \pi]$ **之間。**$f(t)$ **的傅立葉級數定義如下**

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \tag{7}$$

其係數 a_0 **為**

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \tag{8}$$

係數 $a_n, b_n, n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt \tag{9}$$

並稱為傅立葉係數。

備註 5. **注意到這裏並沒有說** *1.* **傅立葉級數是否收斂** *2.* $f(t)$ **與其傅立葉級數是否相等。**

在我們繼續往下討論傅立葉級數之前，讓我們用兩個問題思考一下「級數收斂」、「級數與函數相等」有什麼陷阱。

問題 6. **等比級數** $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ **是否收斂？**

問題 7 (級數收斂/級數跟函數). **對一個可微分函數** $f(x)$**，我們可以定義級數**

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

稱作 $f(x)$ **對** $x = 0$ **的泰勒展式。考慮** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$**，求** f **對** $x = 0$ **的泰勒展式。**

問題 8. **求函數 $f(t) = \cos^2(3t)$ 的傅立葉級數。**

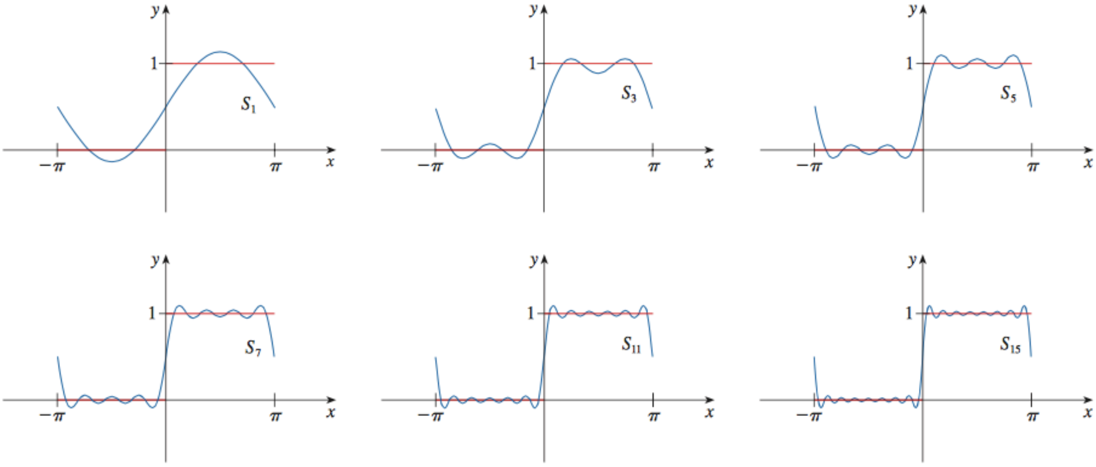
定理 1 (傅立葉級數的收斂性). 假設 $f(x)$ 是一個週期為 2π 的函數且 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上都是分段連續。則我們有傅立葉級數收斂。在函數 $f(x)$ 連續的地方，$f(x)$ 等於其傅立葉級數和。在 $f(x)$ 不連續的地方，(設 $x = a$ 唯一不連續點)，其傅立葉級數和為 $f(x)$ 在該點的左、右極限的平均，即

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to a^+} f(x) + \lim_{x\to a^-} f(x)\right)$$

問題 9. **考慮方波函數** *(square-wave function)*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } -\pi \le x < 0 \\ 1, & \text{if } 0 \le x < \pi \end{cases} \tag{10}$$

並且 $f(x + 2\pi) = f(x)$。求方波函數 $f(x)$ 的傅立葉級數。



$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \cdots + \frac{2}{n\pi}\sin nx, \text{ 其中 } n \text{ 為奇數}$$

問題 10. 利用方波函數的傅立葉級數，說明

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

隨堂練習

問題 **11.** 如何計算下面級數和

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

(解)

1. 計算在 $x\in(0,2\pi)$ 上，Ax^2+Bx+C 的傅立葉級數。
2. 找出 A,B,C ，使得
$$Ax^2+Bx+C=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$$
3. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=$

結語

傅立葉分析本身除了工程應用的重要性也是數學領域中的一個分支，我們今天利用簡單的微積分看到如何用正弦、餘弦函數得到一個週期函數的傅立葉級數。在問題 9 中，我們也看到傅立葉級數的部分和是如何地逼近函數，因此傅立葉級數可用來當作函數的逼近式。未來同學在微積分課程中也許不會碰到傅立葉級數，但會正式學到一些處理無窮級數的方法。

參考資料/圖片來源

1. http : //www.stewartcalculus.com/data/CALCULUS%206E%20Early%20Transcendentals /upfiles/topics/6et_at_01_fs_stu.pdf
2. https : //zh.wikipedia.org/wiki/ 熱傳導方程式