

# 9

## 微分方程



## 9.6

# 掠食者與獵物系統

---

# 掠食者與獵物系統

我們討論了這麼多個生長模型，都是在同一個環境裡面同一種生物的單一生長模型。在這一節裡面我們將討論的是兩個物種在同一個棲地內競爭的模型。

現在的這個模型有兩個物種，其中一個是獵物 (prey) 另一種是掠食者 (predator)。獵物作為掠食者的食物。

現實世界中掠食者與獵物的例子有：森林中的狼與野兔、魚與鯊、蚜蟲與瓢蟲以及細菌跟阿米巴蟲。

# 掠食者與獵物系統

這個模型有兩組應變數，都是時間的函數。

我們定義  $R(t)$  為獵物的數量 (用  $R$  代表野兔 rabbits) ，

定義  $W(t)$  為掠食者的數量 (用  $W$  代表狼群 wolves) 。

若不考慮掠食者的情況，在短期內兔群會以自然成長模型生長。

$$\frac{dR}{dt} = kR \quad \text{其中 } k \text{ 為一正常數。}$$

對狼群來說，若沒有食物(獵物)供給，狼群的食物不充足則狼群的數量會開始下降

$$\frac{dW}{dt} = -rW \quad \text{其中 } r \text{ 為一正常數}$$

# 掠食者與獵物系統

接著是兩個物種間的交互影響，我們假設獵物會被掠食者捕食導致死亡，若掠食者越多，則被捕食率就越高。

另一方面，掠食者在有充足食物的情況下，生存率就越高。

掠食與被捕食主要依賴於兩個物種相遇的機率，我們假設這個機率會跟兩個物種的數量有關，兩個物種數量越多則越容易相遇。

在這裡我們假設這個機率正比於  $RW$ ，兩個數量的乘積。

# 掠食者與獵物系統

加入了交互作用項，我們有這樣的微分方程組：

$$\boxed{1} \quad \frac{dR}{dt} = kR - aRW \quad \frac{dW}{dt} = -rW + bRW$$

其中  $k$ ,  $r$ ,  $a$ , 跟  $b$  都是正常數。

注意到  $-aRW$  減少獵物的生長率，而  $bRW$  會增加掠食者的生長率。這些都取決於  $RW$  相遇的機率。

# 掠食者與獵物系統

這個方程組被稱為 掠食者與獵物方程 (predator-prey equation) 或者系統 (system, 兩個以上物種的方程組)。也或者稱為洛特卡－沃爾泰拉方程 (Lotka-Volterra equations)。

這組方程/系統的解，是指一組兩個  $R(t)$ ,  $W(t)$  描述獵物與掠食者的函數滿足這組方程式。

由於這組方程式是兩個函數綁在一起的，沒辦法先解一個獨立的方程式。因此如果要解便要兩個方程式同時解。

很不巧的是在一般情況下我們沒有辦法解出  $R$  跟  $W$  明確的表示式。然而我們仍然能藉由類似方向場的辦法用圖形分析這個系統跟解的行為。

# 範例一

我們現在考慮用洛特卡－沃爾泰拉方程組來描述野兔與狼的競爭模型，其中給定常數為  $k = 0.08$ ,  $a = 0.001$ ,  $r = 0.02$ ,  $b = 0.00002$ 。時間  $t$  的單位為月份。

- (a) 求系統的平衡點 (equilibrium, 常數解)
- (b) 利用方程式得到  $dW/dR$  的表示式
- (c) 劃出  $RW$  平面的方向場，並利用方向場繪出逼近解。



# 範例一

cont'd

(d) 假設在某個時間點，有 1000 隻野兔與 40 頭狼，以此為初始點劃出  $RW$  平面上解的曲線。解釋族群長期的變化。

(e) 利用 (d) 的結果分別刻劃出解  $R(t)$  跟  $W(t)$ 。

解:

(a) 利用題設的值代入  $k, a, r, b$  方程式，

$$\frac{dR}{dt} = 0.08R - 0.001RW$$

$$\frac{dW}{dt} = -0.02W + 0.00002RW$$

# 範例一 / 解

cont'd

首先我們先找平衡解。此時  $R$  跟  $W$  皆為常數，因此導數均為  $0$ ，於是我們便要解決下列聯立方程式

$$R' = R(0.08 - 0.001W) = 0$$

$$W' = W(-0.02 + 0.00002R) = 0$$

顯然一個解為  $R = 0$  且  $W = 0$ 。(若其中一個為  $0$  則另一個也必定為  $0$ )。

另一個解則是

$$W = \frac{0.08}{0.001} = 80 \qquad R = \frac{0.02}{0.00002} = 1000$$

於是平衡點會落在 **80** 頭狼以及 **1000** 隻野兔的地方

# 範例一 / 解

cont'd

(b) 利用連鎖率，若  $W$  可以在小範圍內寫成  $R$  的函數，則有

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dR} \frac{dR}{dt}$$

因此

$$\frac{dW}{dR} = \frac{\frac{dW}{dt}}{\frac{dR}{dt}} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

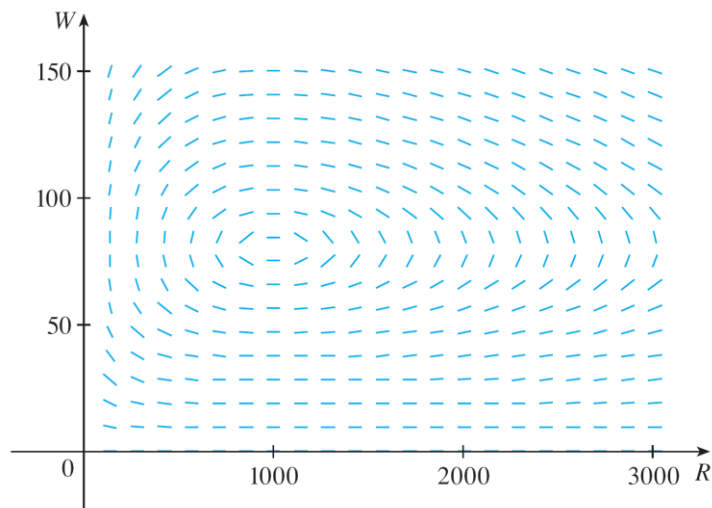
(c) 於是在考慮  $W$  為  $R$  的函數情況下，我們可以改寫方程式：

$$\frac{dW}{dR} = \frac{-0.02W + 0.00002RW}{0.08R - 0.001RW}$$

# 範例一 / 解

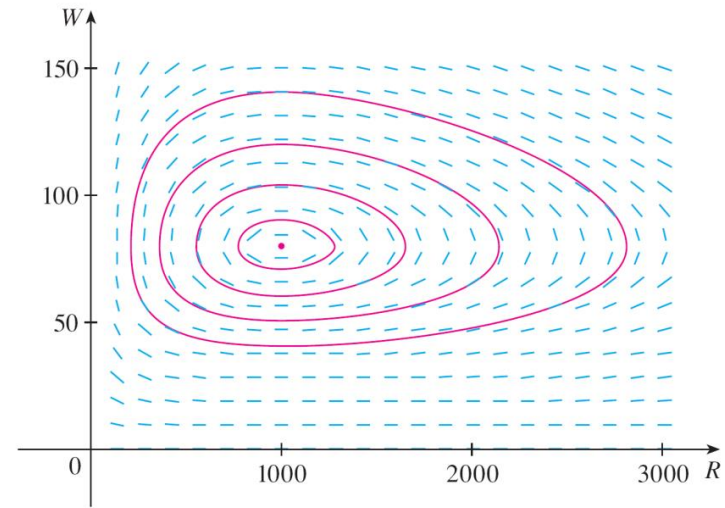
cont'd

得到  $W(R)$  的微分方程式後，我們可以劃出  $WR$  上的方向場如下圖，並利用方向場劃出不同的解曲線。



$W(R)$  方向場

圖一



$W(R)$  的軌跡

圖二

# 範例一 / 解

cont'd

當我們沿著  $W(R)$  解的曲線觀看時，我們可以觀察  $W, R$  之間的關係與相互影響的變化。

注意到這些曲線是封閉的曲線，沿著曲線移動時，總是會經過同樣的點。

並同樣注意到，平衡點  $(1000, 80)$  落在這些封閉曲線所圍的區域中間。

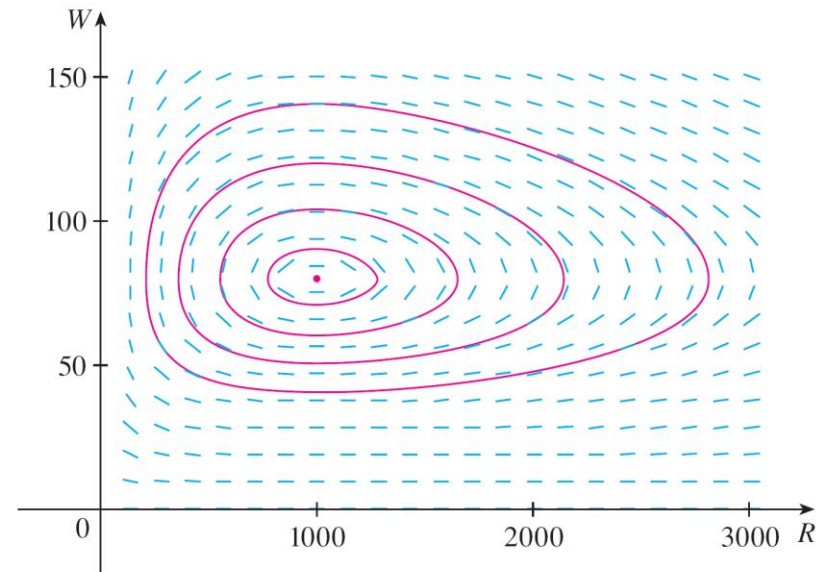
# 範例一 / 解

cont'd

當我們將方程組的解以如圖右  $RW$  平面上曲線的方式表示時，我們稱  $RW$  平面為相位平面 (phase plane)，而相位平面上的軌跡，則稱為相位軌跡 (phase trajectories)。

因此一個相位軌跡便是  $(R, W)$  隨著時間變化所形成的封閉曲線。

一個相圖 (phase portrait) 則包含了平衡點以及相位軌跡，如右圖。



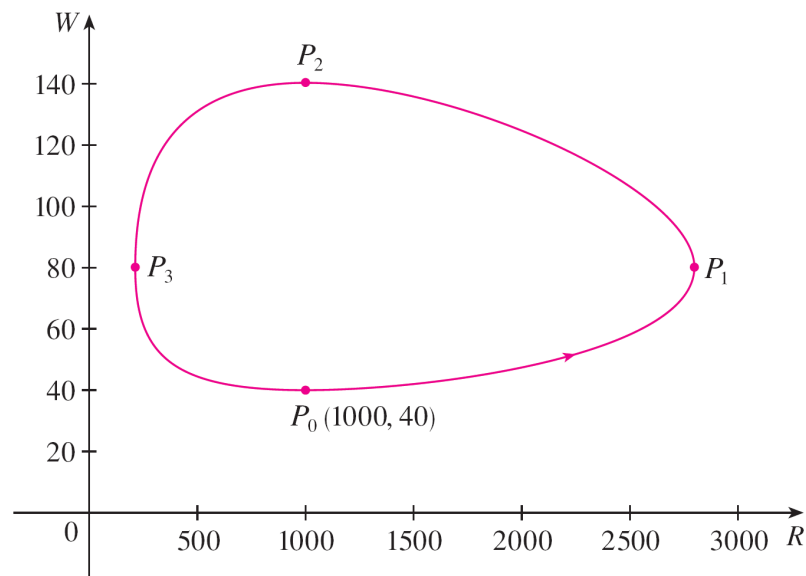
這個系統的相圖 (phase portrait)

圖二

# 範例一 / 解

cont'd

(d) 於是我們從 1000 隻野兔，40 頭狼開始，沿著方向場移動得到近似解。下圖三為從此點開始的軌跡。



經過(1000,40)的軌跡

圖三

# 範例一 / 解

cont'd

前面所示的軌跡是  $W$  對  $R$  的變化，但我們不知道是否當時間  $t$  增加時， $W, R$  移動的方向會是沿著曲線的順時針或者逆時針方向。

考慮將  $R = 1000, W = 40$  代入方程式，觀察初始變化率：

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= 0.08(1000) - 0.001(1000)(40) \\ &= 80 - 40 \\ &= 40\end{aligned}$$

因此  $dR/dt > 0$ ，於是在一開始  $R$  會增加， $W$  也會跟著增加，接著隨著時間變動， $(R, W)$  會沿著曲線逆時針方向變化。



# 範例一

cont'd

我們可以發現，在最初時，狼群的數量無法壓制野兔群，因此野兔群一開始會增加。而野兔群增加，狼群也會自然生長跟著增加。

直到野兔數量增加到一個上限(大約 2800 左右)，狼群的數量也增加到開始可以平衡野兔的數量。

但在此後狼的數量太多，於是野兔的數量也開始減少，接著狼群的數量也會跟著減少。

(大約回到在  $R = 1000$ ,  $W = 140$  時，狼群開始減少)

# 範例一 / 解

cont'd

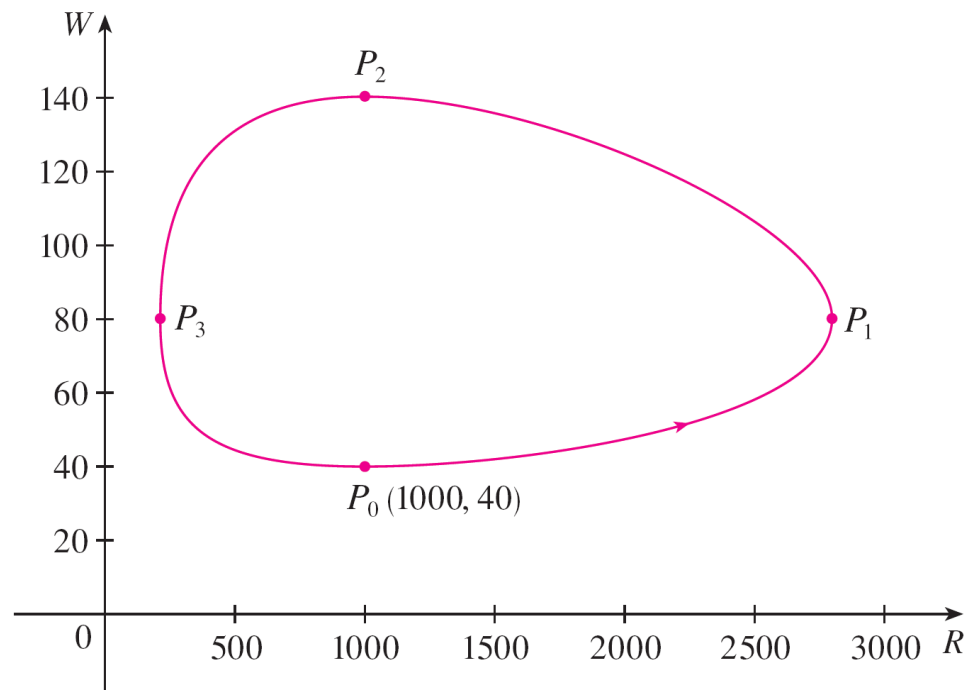
雖然野兔跟狼群一起減少了，但對於野兔來說，狼減少了野兔的生長率就增加了，於是在約莫  $R = 210, W = 80$  的時候，野兔群又開始增加數量。

最後回到接近原始的狀態  $R = 1000, W = 40$  ，  
接著週而複。

# 範例一 / 解

cont'd

接著我們要分別將  $R, W$  寫成是  $t$  的函數。我們分別標記  $P_1, P_2$  以及  $P_3$  三個點如下圖，以及發生的時間點  $t_1, t_2, t_3$ 。



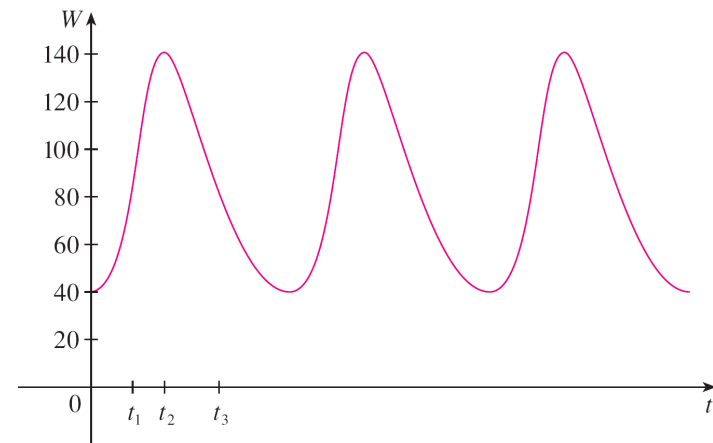
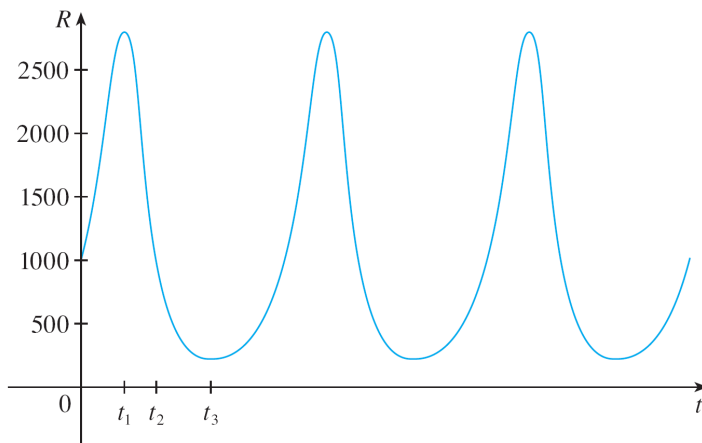
經過 (1000,40) 的相位軌跡

圖三

# 範例一 / 解

cont'd

前面標記的點剛好是  $R$  或  $W$  個別數量最多跟最少的狀態：



野兔跟狼群分別對時間的函數圖形

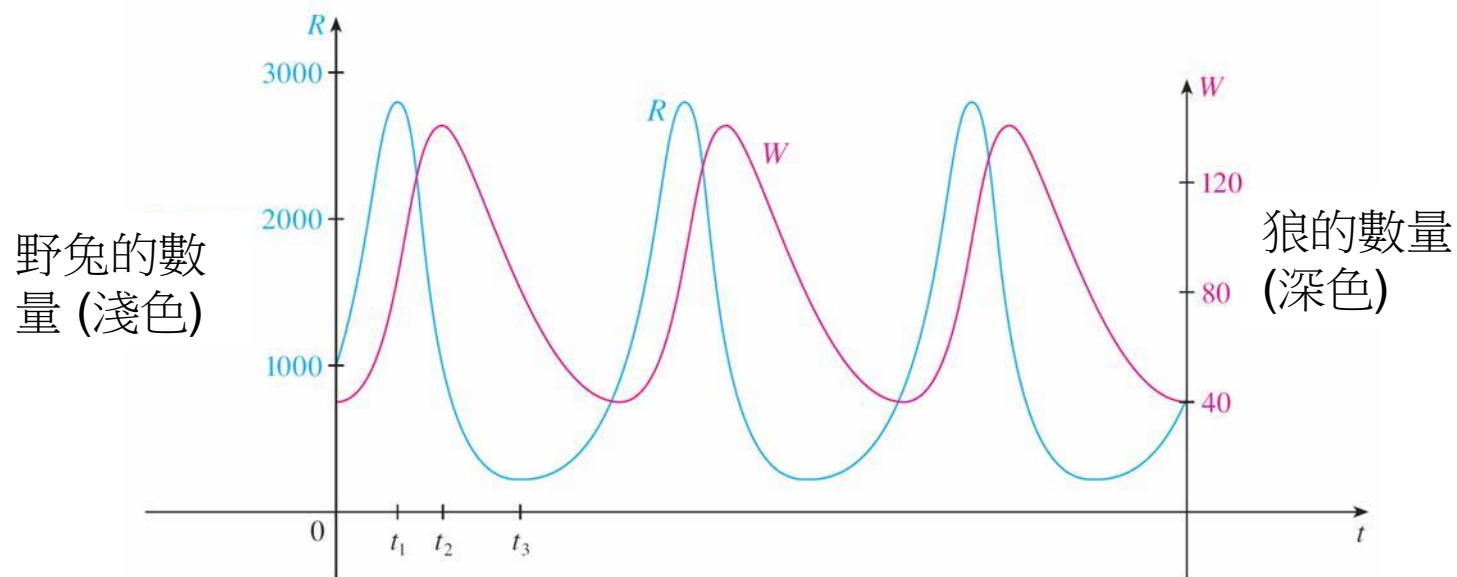
圖四

我們分別標出這三個時間點  $t_1, t_2, t_3$ 。

# 範例一 / 解

cont'd

為了比較  $R$  跟  $W$  的互動，我們可以將兩個圖放在一起比較：



野兔跟狼群的數量函數圖形比較

圖五