9

微分方程

9.5 線性方程

線性方程

一個一階的線性微分方程形如下者：

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

其中 P, Q 為連續函數。

線性方程

這裡舉一個例子 $xy' + y = 2x$ ，在考慮 $x \neq 0$ 的情況下，可以改寫成

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \qquad \boxed{2}$$

就剛好符合前面所要求的樣式。

注意到這個微分方程由於多了一項常數，無法分離變數。

線性方程

但注意到，原先的形式可以利用微分的乘法原理合併在一起

$$xy' + y = (xy)'$$

也因此我們可以改寫原方程式成為更簡單的形式：

$$(xy)' = 2x$$

線性方程

兩邊同時積分則可以得到

$$xy = x^2 + C \quad 或 \quad y = x + \frac{C}{x}$$

但若不是我們先寫成 xy’ + y = 2x 這樣的形式，而是 y’ + y/x = 2 這樣的標準形式，那麼我們就要猜到要先同乘以 x ，在將方程式改寫成可分離的樣子 (xy)’ = 2x 。

於是我們接下來要討論的是，對任意的一階線性微分方程式否都可以用同樣的方法解決？是否可以乘上某些函數將方程化成可分離的形式。

乘上讓方程變成可分離的函數，我們稱為積分因子(integral factor) 。

線性方程

假設方程式一存在這樣的積分因子，它需要滿足若我們將積分因子乘上等式兩邊，要能寫成乘積的微分：

$$\boxed{3} \qquad I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)'$$

若我們可以找到這樣的積分因子，那麼接下來要解的便是

$$(I(x)y)' = I(x)\,Q(x)$$

線性方程

兩邊同時積分可以得到

$$I(x)y = \int I(x)\,Q(x)\,dx + C$$

最後得到解

$$\boxed{4} \qquad y(x) = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)\,Q(x)\,dx + C\right]$$

線性方程

回過頭來看積分因子 I(x) ，我們希望可以寫成乘積的微分

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$

$$I(x)\,P(x) = I'(x)$$

於是可以得到 I(x) 自己必須要滿足的微分方程式，由於 I(x) 的方程式可分離，我們可以直接解決

$$\int \frac{dI}{I} = \int P(x)\,dx$$

$$\ln|I| = \int P(x)\,dx$$

線性方程

於是有

$$I = Ae^{\int P(x)\,dx}$$

其中 $A = \pm e^C$。由於積分因子只需要讓原方程式可以改寫成乘積形式，因此我們只需要找到一種便可。不失一般性我們直接假設 A = 1 ，

$$\boxed{5} \qquad I(x) = e^{\int P(x)\,dx}$$

接著我們可以在將這個積分因子代入前面的公式，便可以得到方程式解的表示式了。

線性方程

對於一個線性方程，重要的是找到積分因子可以化成可分離的形式。

[一階線性方程的積分因子] 給定一個一階線性方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

其積分因子為 $I(x) = e^{\int p(x)dx}$ 。在等式兩邊相乘後，可將方程式改寫為可分離方程

$$(I(x)y(x))' = I(x)q(x)$$

兩邊積分則可得到解

$$y(x) = \frac{1}{I(x)} \int I(x)q(x)\ dx.$$

範例一

解方程式

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2.$$

解:

給定的方程式已經是標準式，其中 $P(x) = 3x^2$ 以及 $Q(x) = 6x^2$ 。

此時積分因子為

$$I(x) = e^{\int 3x^2\,dx} = e^{x^3}$$

範例一 / 解

於是兩邊同乘以積分因子 e^{x^3} ，寫成全微分

$$e^{x^3}\frac{dy}{dx} + 3x^2e^{x^3}y = 6x^2e^{x^3}$$

$$\frac{d}{dx}(e^{x^3}y) = 6x^2e^{x^3}$$

兩邊同時積分

$$e^{x^3}y = \int 6x^2e^{x^3}\,dx = 2e^{x^3} + C$$

$$y = 2 + Ce^{-x^3}$$

範例二

求下列初始值問題的解

$$x^2y' + xy = 1 \qquad x > 0 \qquad\qquad y(1) = 2$$

解:

首先我們先把方程式化成標準形式

$$\boxed{6} \qquad y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad x > 0$$

因此積分因子為

$$I(x) = e^{\int (1/x)\,dx} = e^{\ln x} = x$$

範例二 / 解

cont'd

兩邊同乘 x ，改寫方程式

$$xy' + y = \frac{1}{x} \qquad (xy)' = \frac{1}{x}$$

因此

$$xy = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \qquad y = \frac{\ln x + C}{x}$$

帶入初始值 y(1) = 2 ，

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

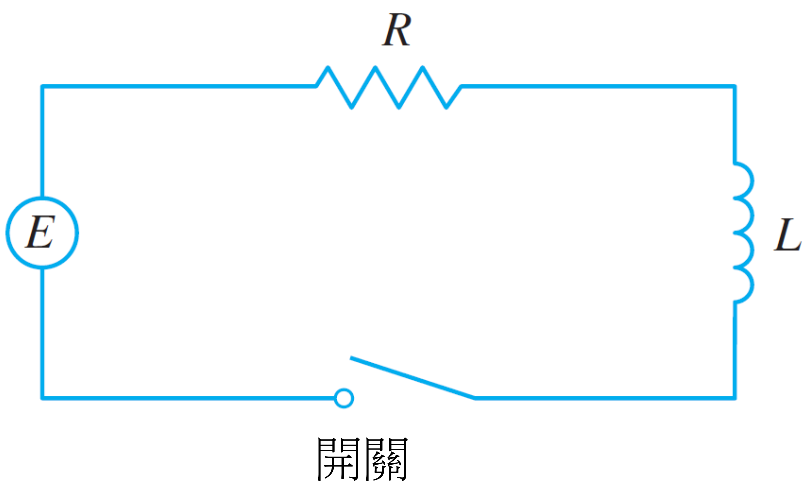
得到最後的解

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}$$

電流迴路上的應用

電流迴路上的應用

在介紹方向場時，我們曾提過 RL 電流迴路的模型：一個迴路接上電源(E)電感(L)以及電阻(R) 如下圖



圖四

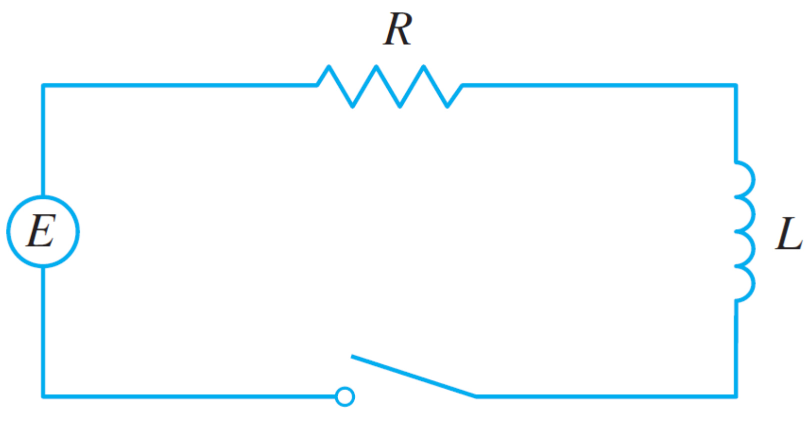
同時推得這個 RL 電路方程

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \quad \boxed{7}$$

範例四

假設在下圖的電路中，電阻為 12 Ω ，電感為 4 H ，電源所給的電壓是穩定的 60V 。當我們在 $t = 0$ 時把開關接上，因此電流 $I(0) = 0$ 。

試求 $I(t)$ 。估算 $I(1)$ 以及 $I(t)$ 最終收斂的值。



範例四 / 解

(a) 我們將常數 R = 12 ， L = 4 等代入初始值問題

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad I(0) = 0$$

化成標準形

$$\frac{dI}{dt} + 3I = 15 \qquad I(0) = 0$$

乘上積分因子 $e^{\int 3\,dt} = e^{3t}$,

$$e^{3t}\frac{dI}{dt} + 3e^{3t}I = 15e^{3t}$$

範例四 / 解

$$\frac{d}{dt}(e^{3t}I) = 15e^{3t}$$

$$e^{3t}I = \int 15e^{3t}\,dt = 5e^{3t} + C$$

$$I(t) = 5 + Ce^{-3t}$$

由於 $I(0) = 0$ ，計算 $5 + C = 0$ 有 $C = -5$ ，於是電流

$$I(t) = 5(1 - e^{-3t})$$

(這裡的 I 是電流，不是積分因子)

範例四 / 解

cont'd

(b) 因此在一秒之後的電流值為

$$I(1) = 5(1 - e^{-3}) \approx 4.75 \text{ A}$$

(c) 最後電流趨近的極限值為

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} 5(1 - e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$