6

積分的應用

6.5 函數的平均值

函數的平均值

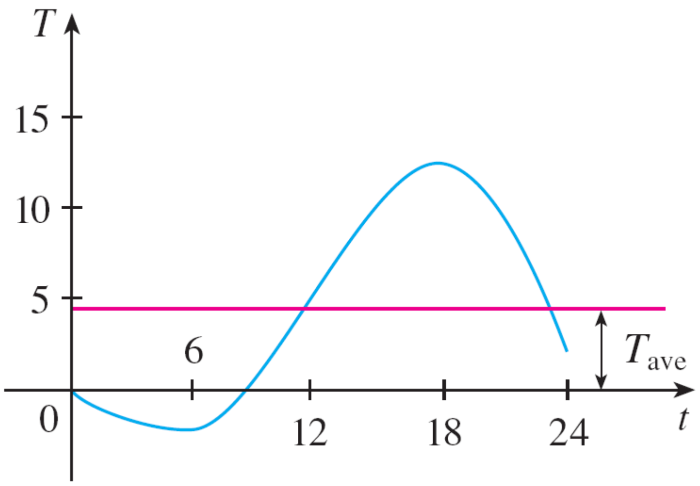
計算 n 個數值 $y_1, y_2, . . . , y_n$ 的平均值很簡單：

$$y_{ave} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

但要怎麼計算一天之內的平均溫度才算合理呢？計算溫度需要測量數值，那麼要測量多少數值也才算合理呢？

右圖一是在一天中的不同時間點所測量的溫度值。

我們大致上估計有一個平均溫度為 T_{ave} 。



圖一

函數的平均值

一般來說，我們想測量函數的平均值，首先便是要平均的測量在不同時間或地點的數值。考慮函數 y = f(x) 在範圍 $a \le x \le b$ 上。我們可以將 [a, b] 等分為 n 個區間，其中每一個小區間寬度為 $\Delta x = (b - a)/n$ 。

接著我們在每個區間上都挑選一個取樣點 $x_1^*, \ldots, x_n^*$ ，並測量其值 $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$ ，最後再來平均：

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

舉例來說，若 f 為時間 x 時的溫度，我們一天分 24 區段，每小時測量一次，則 n = 24 。取樣點 x_i^* 也就是在 i 時與 i+1 時之間的某個時間點。

函數的平均值

由於 $\Delta x = (b - a)/n$ ，我們可以改寫 $n = (b - a)/\Delta x$ ，此時平均值則為

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

其中最右方的加總，便是 f 在 [a, b] 區間上的黎曼和。

所以若我們增加 n 的取樣次數，似乎我們計算平均值時，這個平均值便會靠近某個數值。

函數的平均值

從定積分的定義我們可以知道這個數值的極限為

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

因此，我們可以定義連續函數 f(x) 在 [a, b] 區間上的平均值為：

$$\boxed{f_{\text{ave}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}$$

範例一

計算 $f(x) = 1 + x^2$ 在 [–1, 2] 上的平均值。

解:

考慮 $a = -1$, $b = 2$ ，計算平均值的積分為

$$
\begin{aligned}
f_{\text{ave}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1+x^2)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

函數的平均值

考慮 T(t) 表示時間 t 時的溫度，根據前面的定義，我們可以得到一個合理的平均溫度值。同時，一天下來溫度起起伏伏，溫度的變化是連續的，似乎應該會有哪個時間點的溫度正好要等於一整天的平均溫度吧？

如右圖所示，溫度曲線與平均溫度相交於中午前後某一點。

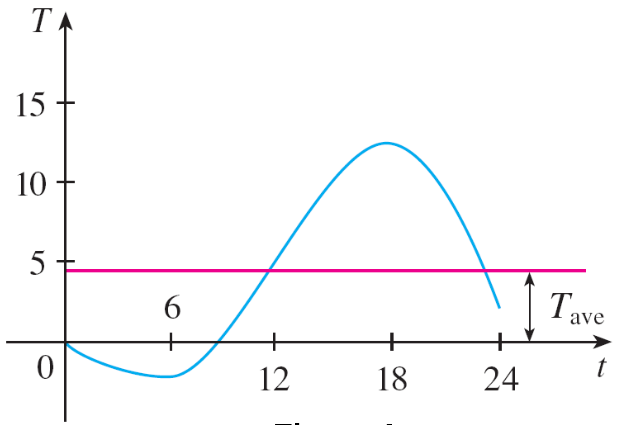


Figure 1

更一般來說，給定 [a, b] 上的函數 f ，是否存在其中一點 c ，其函數值 f(c) 恰好為函數在 [a, b] 上的平均值呢？

函數的平均值

答案是肯定的，不過我們需要要求函數 f(x) 是連續函數。此時我們有下面定理：

[積分均值定理] 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續，則存在 $c \in [a,b]$ 使得

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

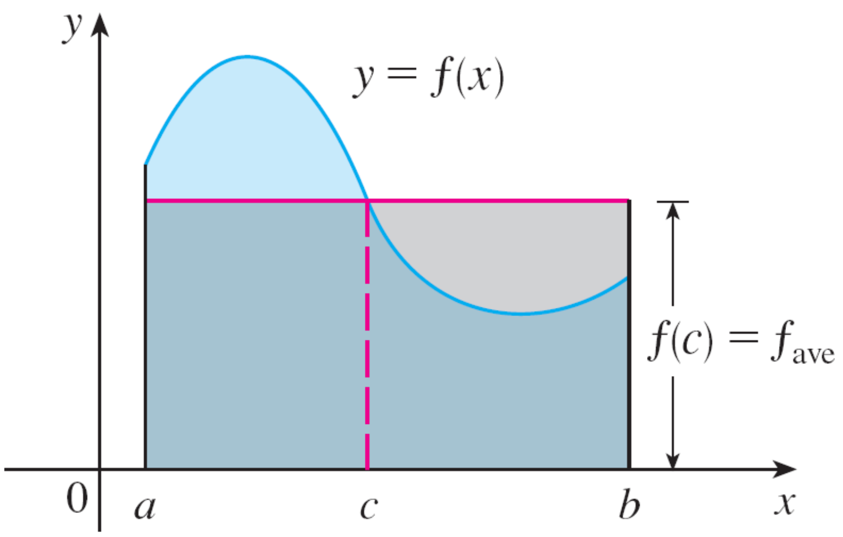
也就是

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$$

積分均值定理的證明，可以利用一般均值定理再配合微積分基本定理得到。

函數的平均值

幾何觀點可以幫助我們了解這個定理，考慮 f(x) 為正值函數，則此時 f(x) 在 [a,b] 上的積分，可以看成是從 x = a 至 x = b 累積同一個平均數值所得：



圖二