

6

積分的應用



6.4

功

功

「做功」的功常用來表示完成某些物理運動的效能。

在物理中，功和施作功的力士息息相關的。

在直觀上，我們需要施力去完成一些物理運動，例如將書本從桌上水平移開，或者抵抗重力往上拉開。

功

我們考慮一個物體受力沿著直線運動，其位置的函數為 $s(t)$ ，由牛頓第二運動定律，其物體運動的原因來自於力量施予的加速度：

$$F = m \frac{d^2s}{dt^2}$$

在 SI 制系統中，質量的單位是公斤 (kg)，距離的單位是公尺 (m)，時間的單位是秒 (s)，力量的單位是牛頓 ($N = kg \cdot m/s^2$)

由第二運動定律的公式，可知一牛頓的力作用在一公斤的物體上可以產生 **1** 公尺每秒平方的加速度。

功

考慮施力為常數、加速度也為常數。

此時施力所做的功 (或者說效能)，我們定義為施力乘上運動的距離

$$W = Fd$$

力的單位為牛頓，距離單位為公尺，此時功的單位便是牛頓公尺，也同時是我們常見的能量單位焦耳 (joule)。

範例一

自地板提起 1.2 公斤重的書放至 0.7 公尺高的書桌需要做多少功？利用重力加速度常數 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

解：

注意到拉提的力氣剛好與重力成反作用力，因此提力為

$$\begin{aligned} F &= mg = (1.2)(9.8) \\ &= 11.76 \text{ N} \end{aligned}$$

由定義可知

$$\begin{aligned} W &= Fd = (11.76)(0.7) \\ &\approx 8.2 \text{ J} \end{aligned}$$

功

前述的計算是當施力是常數的情況下，那麼若施力是變動的該怎麼辦呢？

我們考慮物體沿著 x 軸移動，從 $x = a$ 移動至 $x = b$ 的位置。而在 x 點時，所受到的施力為 $f(x)$ 。(假設 f 為連續函數)

考慮物體在運動到每一點位置附近，施力的變化幅度不大，則此時在該點附近施力的功則可以用 $f(x) \Delta x$ 逼近。

而在不同點上我們可以把短暫的位移乘上短暫時間內的平均施力，所得到的功加總起來，大致上便能近似這段過程的功。

功

我們考慮切分 $[a, b]$ 為 n 段，每一小段為 $[x_{i-1}, x_i]$ ，長度等寬皆為 $\Delta x = (b-a)/n$ 。

由於假設在每一小段的施力相差不大，此時每一小段中的功則可近似為

$$W_i \approx f(x_i^*) \Delta x$$

其中 x_i^* 為 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的取樣點。

接著加總每一小段的功，我們便可以得到總功的近似值

$$W \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

功

同樣，我們藉由取 n 越來越多，區間分割越來越細的同時，總功的近似值也就會趨近一定積分：

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

範例二

若物體在距原點 x 公尺處，會受到 $x^2 + 2x$ 牛頓往正 x 軸的推力。則在當此物體從 $x = 1$ 移至 $x = 3$ 時，此力所施作的功為？

解: 直接積分

$$\begin{aligned} W &= \int_1^3 (x^2 + 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{50}{3} \end{aligned}$$

得到功 W 大約為 **16.67** 焦耳。

功

接下來我們從實際的物理問題來觀察。

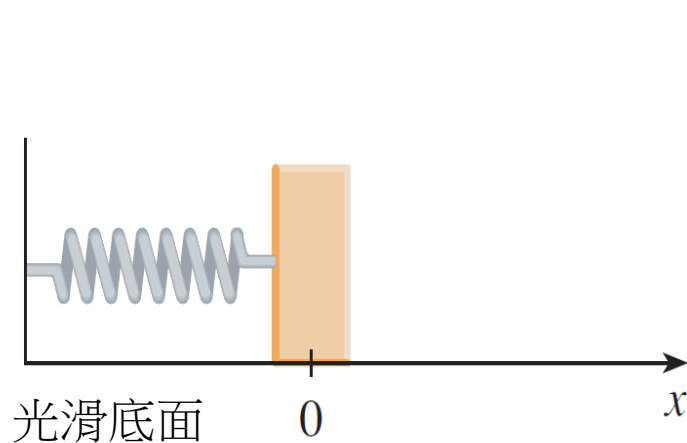
虎克定律表示，維持一個彈簧形變的力等比於彈簧伸長量。
也就是當 x 為彈簧形變變化的長度時，其受力為

$$f(x) = kx$$

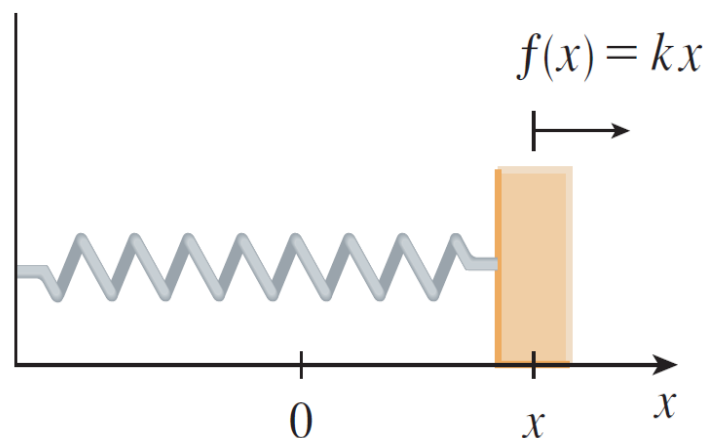
其中 $k > 0$ 為彈簧的彈力係數。

功

下圖可以說明虎克定律的受力：



(a) 自然狀態



(b) 施加力量使其伸長

虎克定律
圖一

範例三

40 牛頓重的力可以使彈簧從自然長度 10 公分伸長至 15 公分。則當施力使彈簧自 15 公分伸長至 18 公分時，需要施力做多少功？

解：

根據虎克定律，我們假設施力與伸長量的關係為

$$f(x) = kx.$$

由於 40 牛頓可以從 10 公分伸長為 15 公分，伸長量也就是 0.05 公尺，代入公式得

$$40 = k (0.05)$$

範例三 / 解

cont'd

因此

$$k = \frac{40}{0.05} = 800$$

於是 $f(x) = 800x$ ，因此當彈簧自 15 公分伸長至 18 公分時，其伸長量自 0.05 公尺變化為 0.08 公尺，其間在每一個位置 x 所受的力為 $f(x) = 800x$ 。

因此在這段期間所受的功為

$$\begin{aligned} W &= \int_{0.05}^{0.08} 800x \, dx = 800 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{0.05}^{0.08} \\ &= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] \\ &= 1.56 \, \text{J} \end{aligned}$$