6

積分的應用

6.2 體積

體積

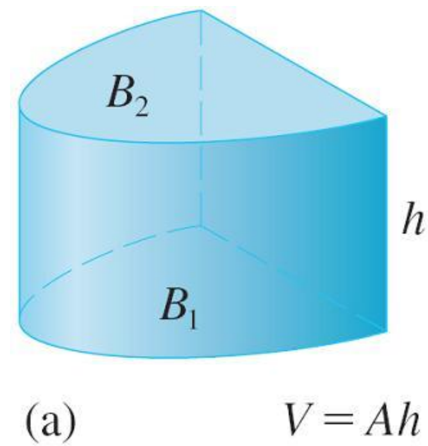
跟求面積一樣，我們可能想知道一個物體的體積。

我們雖然知道體積的概念是什麼，但如果要利用微積分計算一個物體的體積，我們便需要有明確的數學上的定義。

體積

我們從討論柱體的體積開始。

如右圖所刻畫，一個柱體是由底面 B_1 以及與其全等、平行的圖形 B_2 作為頂面所夾成的區塊。



圖一(a)

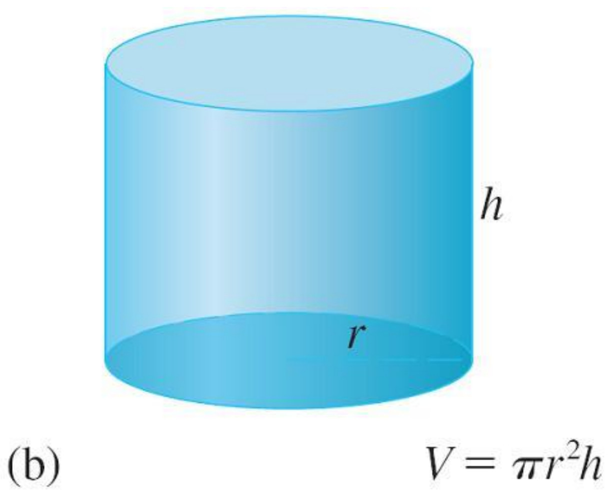
這些區塊便由 B_1 至 B_2 間的垂直線段所組成。

當底面的面積為 A ，柱體的高度 (B_1 與 B_2 的垂直距離) 為 h ，則體積為 $V = Ah$ 。

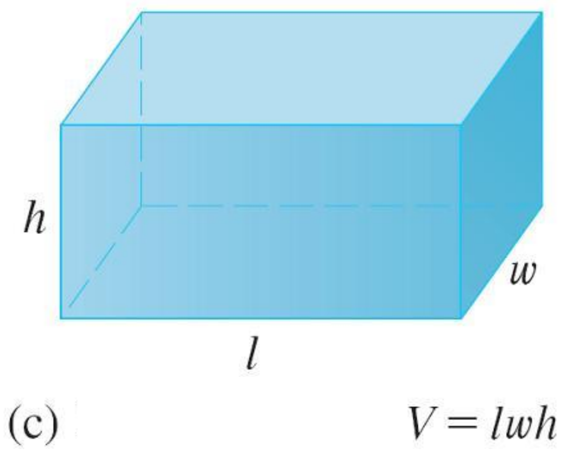
體積

特別地當底面為半徑為 r 的圓，則圓柱的體積為$V = \pi r^2 h$ 。

若底面為長寬各為 L 跟 W 的長方形，則此柱體即為一長方體，體積為 V = LWh 。



圖一(b)



圖一(c)

體積

因此，對於一個固體區塊 S ，若 S 並非柱體，我們可以將 S 切割成一片一片 高度極短的柱體，接著加總這些個別的小柱體體積來近似 S 體積。

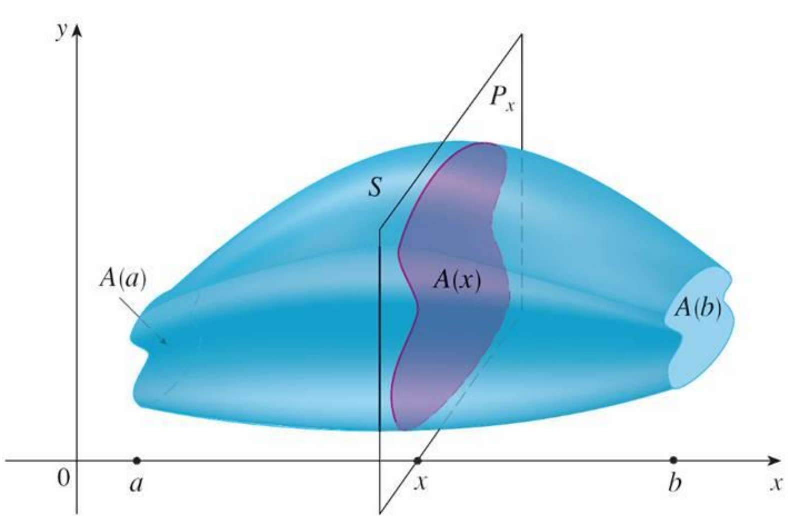
最後再借由取極限，將這些近似值逼近真的體積值。

我們首先考慮怎麼樣切割：考慮一個軸，利用跟軸垂直的平面切出跟 S 相交的截面 (cross-section) 。

體積

假設 A(x) 為 S 被平面 P_x 所截的截面面積，如下圖。其中，P_x 為經過 x 點且垂直 x 軸的平面。

當 P_x 隨著 x 移動，其截面的面積也隨之移動，因此可以將 A(x) 視為 x 的函數。

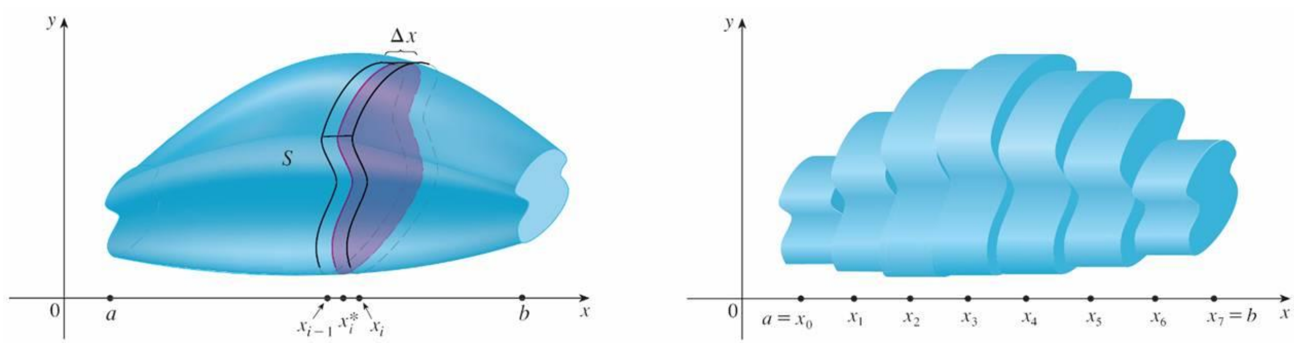


圖二

體積

我們將 S 切割成一塊一塊等寬的平板，其寬為 Δx 。

我們取 $[x_{i-1}, x_i]$ 中的樣本點 x_i* ，於是在平面 P_{xi-1} 及 Px_i 之間的平板，便可以利用底面積為 $A(x_i*)$ 高為 Δx 的柱體來逼近。



圖三

體積

於是第 i 塊平板 S_i 的體積便可以用

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\, \Delta x$$

來近似。

接著我們加總所有的平板體積近似值，可得

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\, \Delta x$$

體積

於是當分割數 n 越來越大的同時，細平板的體積也會越來越靠近整個物體的體積。

因此我們可以利用黎曼積分來定義所謂的體積：

[定理] 給定 S 爲一位置介於 $x=a$ 與 $x=b$ 之間的物體，假設其在 $x=x_0$ 與 x 軸垂直的平面相交的截面面積爲 $A(x_0)$ ，若 A 爲連續函數，則 S 的體積爲

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A(x_i^\star)\Delta x=\int_a^b A(x)\,dx.$$

注意到，若當 A(x) = A 為常數的話，則體積的積分為 A(b-a) 也就與原本我們所認識的柱體體積公式相符。

範例一

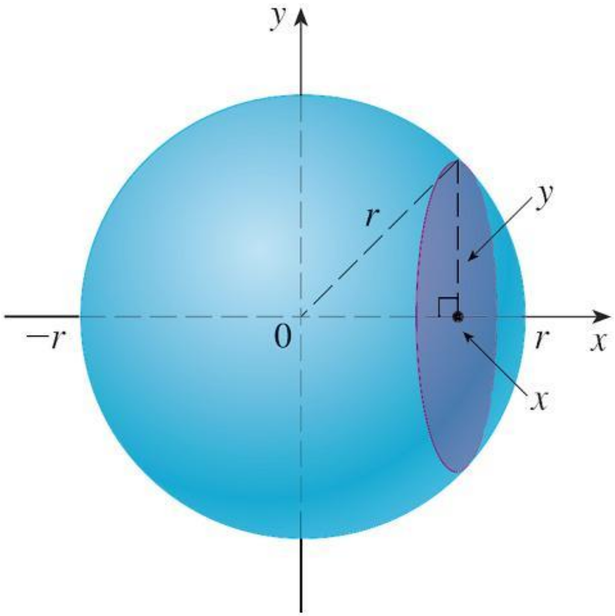
證明半徑為 r 的球體，其內部體積為 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。

解:

我們將球心放在圓點，如右圖想計算在 x 點的截面積，也就是要計算截面上的圓的面積。

利用畢氏定理我們可以求得截面圓的半徑為

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$



圖四

因此截面圓的面積為

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

範例一 / 解

cont’d

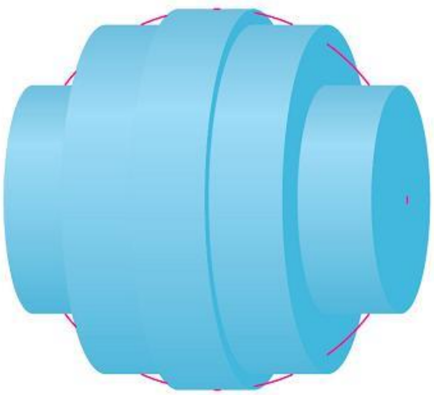
積分的上下界分別是 *a* = –*r* 以及 *b* = *r* ，待入積分式

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx \\
&= \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(被積函數為偶函數)} \\
&= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r \\
&= 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) \\
&= \tfrac{4}{3}\pi r^3
\end{aligned}
$$

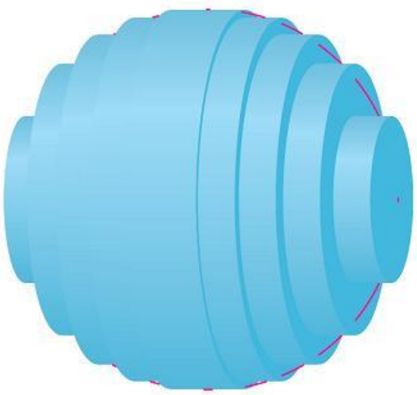
範例一

我們再回過頭來看利用平板 (或者說短柱體) 來逼近球體體積的過程：下圖是分割成不同個數時，所得到的逼近值。

此時我們可以發現，球體是對 x 軸對稱 (繞著 x 軸旋轉任意角度形狀不變) ，也因此每一個逼近的柱體都是高度極短的圓柱，或者是看成圓盤。



(a) Using 5 disks, $V \approx 4.2726$



(b) Using 10 disks, $V \approx 4.2097$

(c) Using 20 disks, $V \approx 4.1940$

圖五

體積

因此計算體積的黎曼和便是加總這些圓盤的體積：

$$\sum_{i=1}^{n} A(\overline{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \overline{x}_i^2)\,\Delta x$$

在這裡我們的取樣點 $\overline{x}_i$. 取在每個 $[x_{i-1}, x_i]$ 的中點。

現在若是任意的對 x 軸對稱的凸物體，則其在任意垂直 x 軸平面上的截面必定為圓，而截面積則可寫為

$$A = \pi(\text{半徑})^2$$

其中半徑為 x 的函數。

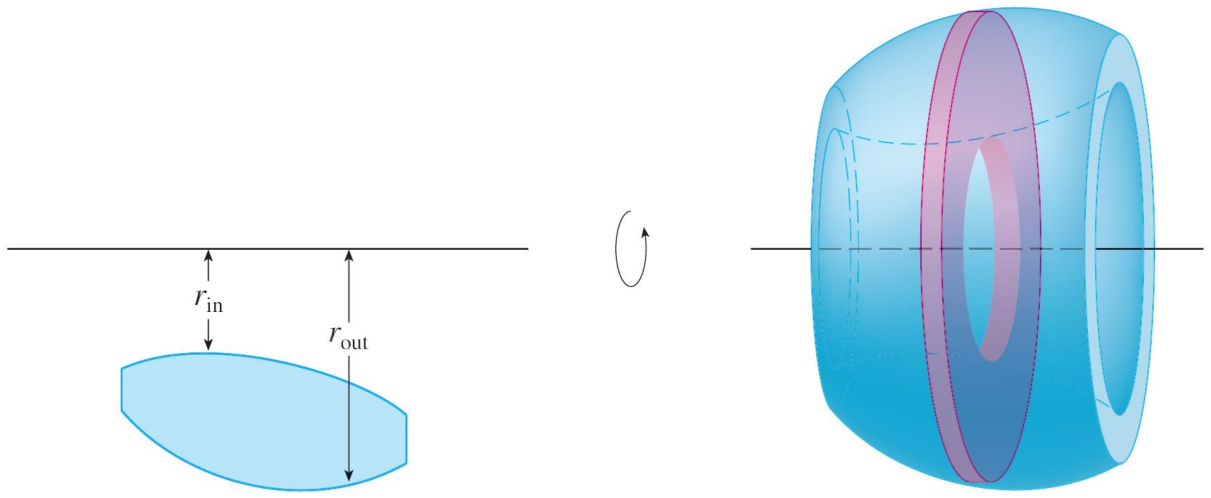
體積

這種類型的物體被稱為旋轉體 (solid of revolution) 。

另一種情形，物體仍然對 x 軸對稱，但是並非是凸物體，此時他的截面並非是圓，而是圓環。

而其面積則為外圈的圓減去內圈的圓面積。

$$A = \pi(r_{out})^2 - \pi(r_{in})^2$$



圖十