

6

積分的應用

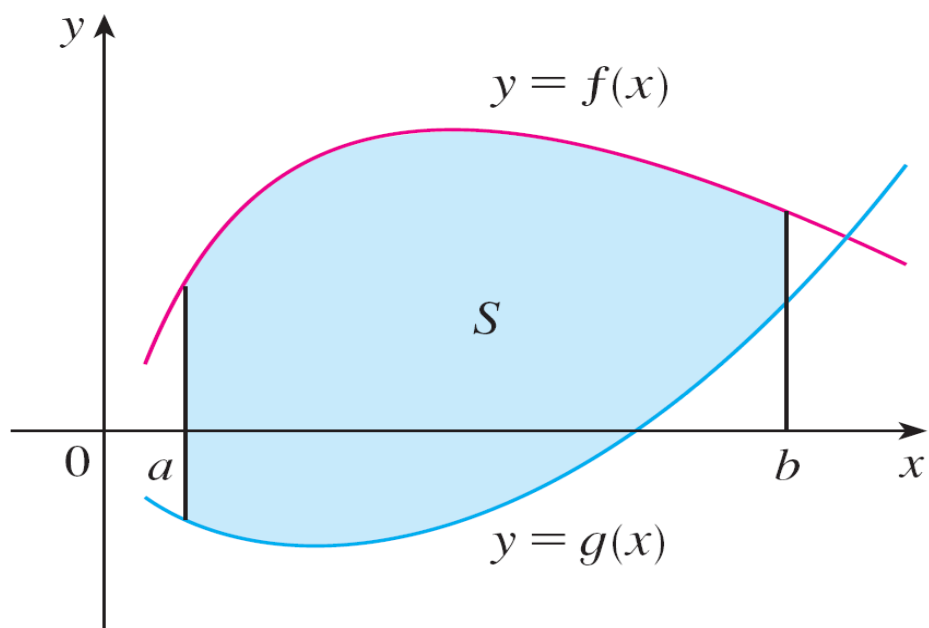


6.1

更多計算面積的方式

曲線之間的面積

如下圖，我們想計算介於 $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$ 之間的面積。

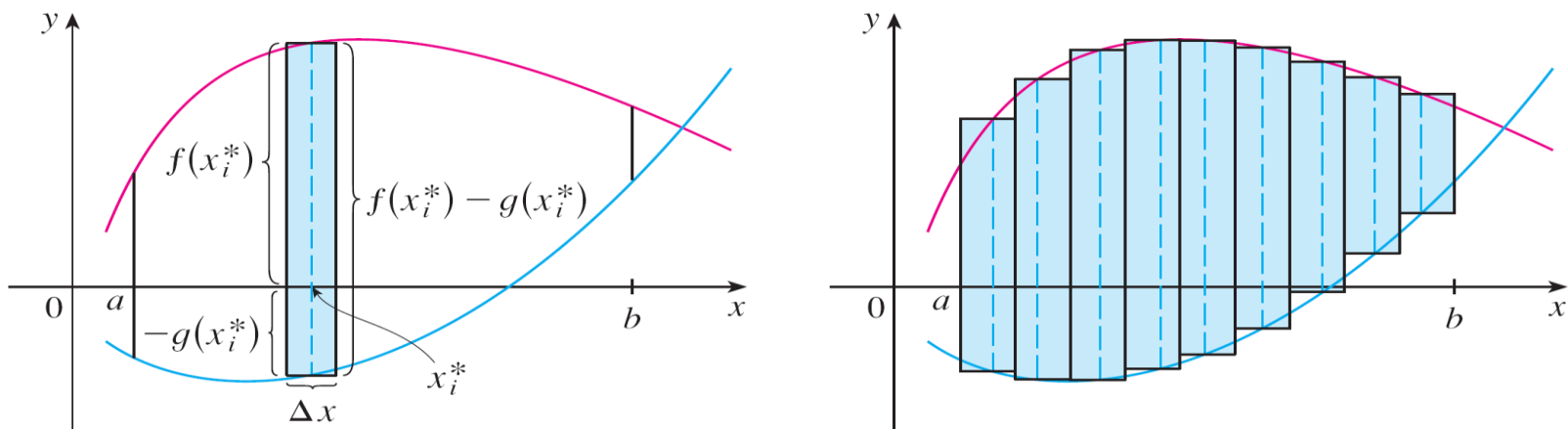


圖一

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

曲線之間的面積

同樣我們可以將這塊區域用長方塊去覆蓋。將 $[a, b]$ 切分成 n 個等長的長條，接著用 $f(x_i^*) - g(x_i^*)$ 做為長方塊的高度。



圖二

曲線之間的面積

在這個分割之下的黎曼和為

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

也就同時是我們想了解區域面積的一個逼近值。

接著，若在每一個點的高度 $f(x) - g(x)$ 為連續函數的話。我們便可以根據黎曼積分的存在性，知道這個逼近值在 $n \rightarrow \infty$ 分割越切越細的同時，長方塊的面積 S 會逼近區域面積 A 。

也就是

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(x_i^*) - g(x_i^*)] \Delta x$$

曲線之間的面積

我們寫成一個定理：

[定理] 給定 f, g 在 $[a, b]$ 上為連續函數，且 $f(x) \geq g(x)$ 。則由 $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ 所圍成的面積為

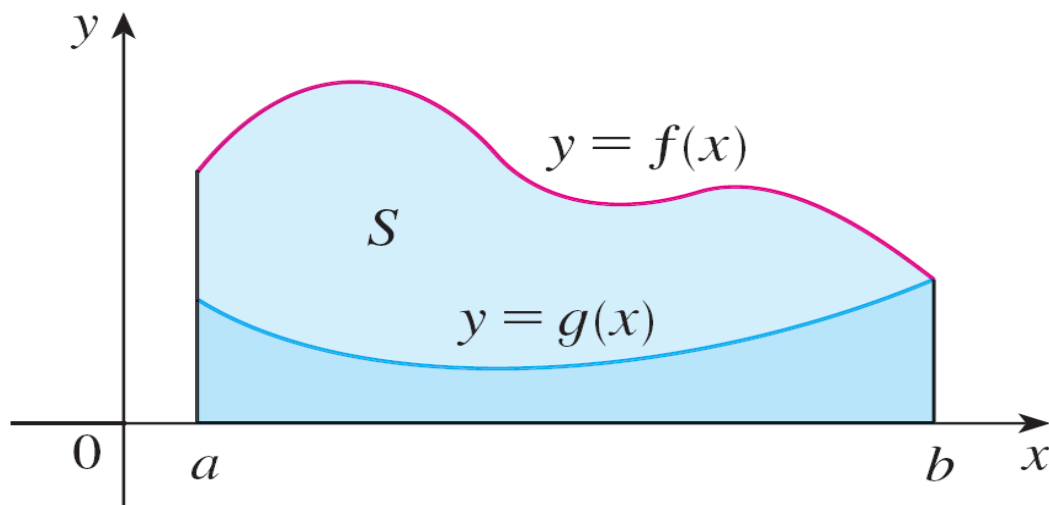
$$A = \int_a^b f(x) - g(x) dx.$$

一個特殊的情況便是 $g(x) = 0$ ，此時 S 便是 $f(x)$ 的曲線下面積。

曲線之間的面積

另一個特殊的情況是，當 f, g 均為正值，此時從下圖可以看出， f 與 g 之間的面積，便是 f 的曲線下面積，減去 g 的曲線下面積。

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



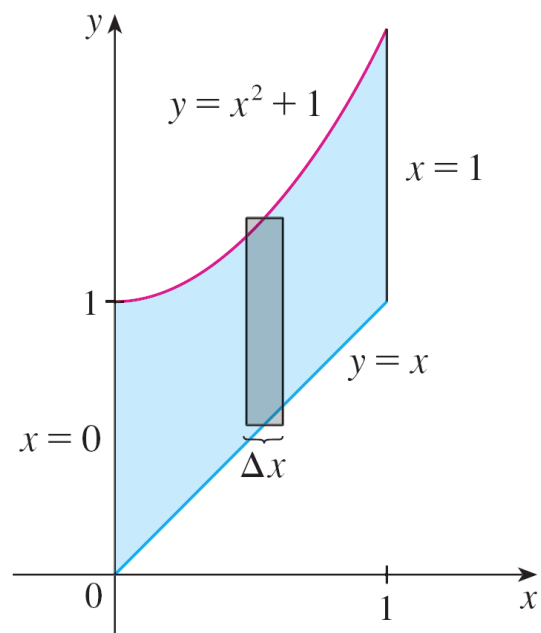
圖三

範例一

計算在 $y = e^x$, $y = x$, 以及 $x = 0$ 與 $x = 1$ 之間所為的區域面積。

解:

如右圖四所示，圖形的上界是 $y = e^x$ ，而下界是 $y = x$ 。



圖四

範例一 / 解

cont'd

利用定理的公式 $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, 計算範圍在 $a = 0$ 以及 $b = 1$ 之間的積分：

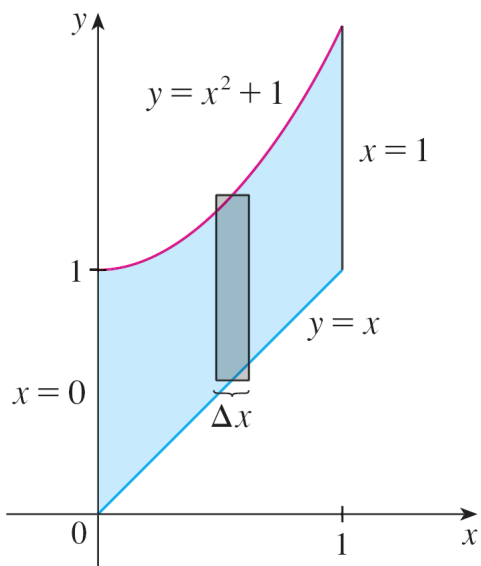
$$A = \int_0^1 (e^x - x) dx = e^x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$

$$= e - \frac{1}{2} - 1$$

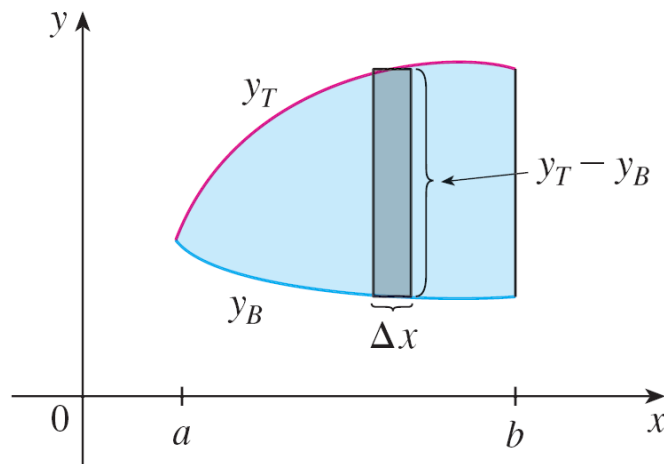
$$= e - 1.5$$

曲線之間的面積

在實際的計算前，我們會先稍微刻劃要計算面積的區域。了解哪一條曲線在上，哪一條曲線在下，接著在每一段長方塊的地方，了解長方塊的高度是哪一段差：



圖四



圖五

曲線之間的面積

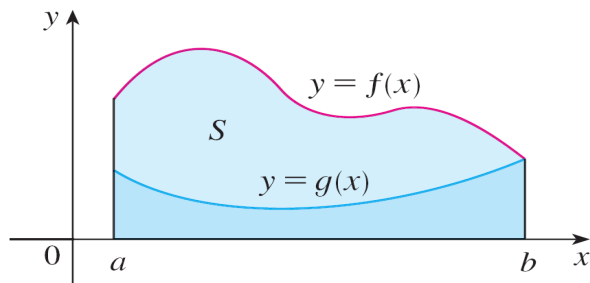
接著計算面積，便是先計算每一段長方條的面積值：

$$(y_T - y_B) \Delta x$$

其中 y_T 為在上方的曲線高度， y_B 為在下方的曲線高度。加總後便得到黎曼和，接著取極限得到積分：

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (y_T - y_B) \Delta x = \int_a^b (y_T - y_B) dx$$

另一點可以稍微注意的是，下圖左端點兩個函數並沒有重合，卻在右端點重合於一點，但是這並不影響結果。



圖三

曲線之間的面積

若我們考慮這樣的情況，在某些區間上 $f(x) \geq g(x)$ ，但在另外的區間上則是 $g(x) \geq f(x)$ 。

於是我們可以将區域分成幾塊

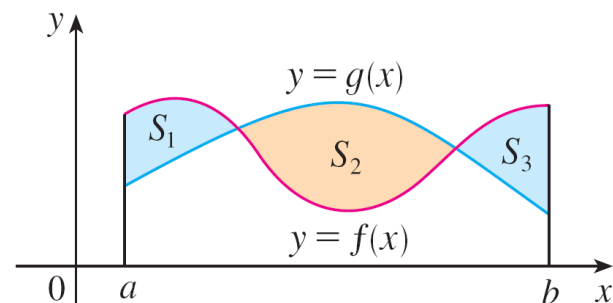
$S_1, S_2, \dots$ ，其中面積分別為 $A_1, A_2, \dots$ 如上圖九所示。

此時面積便可以分開計算

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + \dots$$

我們可以觀察出在每一段取值的高度為：

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{若 } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{若 } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$



圖九

曲線之間的面積

當我們單純是要計算總面積的和時，面積的正負便沒有意義。

於是在利用長方塊逼近區塊面積時，在每一段長方塊所取值的高度必定是取正值的 $|f(x) - g(x)|$ ，於是我們可以改寫面積的計算公式：

[定理] 給定 f, g 在 $[a, b]$ 上為連續函數。則由 $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$ 所圍成的面積為

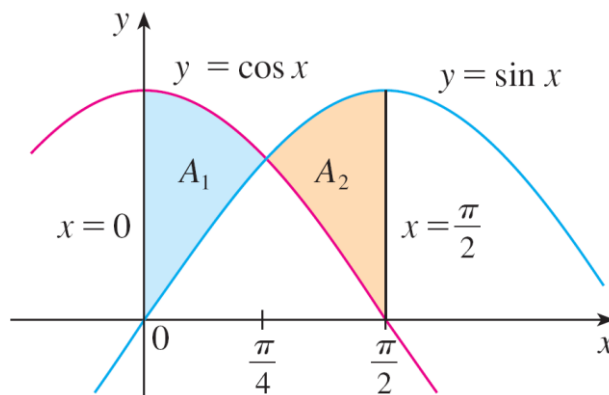
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

範例五

計算在 $x = 0$ 與 $x = \pi/2$ 之間，由 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 所圍成的面積。

解：我們先大致上刻劃兩條曲線的圖形。計算交點發生在 $\sin x = \cos x$ ，也就是 $x = \pi/4$ (在 $0 \leq x \leq \pi/2$ 之間的範圍)。

依此為分界線，在左邊當 $0 \leq x \leq \pi/4$ 時是 $\cos x \geq \sin x$ 。而在右邊當 $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$ 之時是 $\sin x \geq \cos x$ 。如下圖所示



圖十

範例五 / 解

cont'd

藉由這個觀察我們將面積分成兩部分積分：

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} |\cos x - \sin x| dx = A_1 + A_2 \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx \\ &= [\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1 \right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 2\sqrt{2} - 2 \end{aligned}$$

範例五 / 解

cont'd

剛好這是一個特殊的例子，由於 $\sin(x) - \cos(x)$ 剛好是對 $x = \pi/4$ 這條軸線是點對稱。也就是取了絕對值之後，函數 $|\sin(x) - \cos(x)|$ 對 $x = \pi/4$ 是左右對稱。

此時從 $x = 0$ 至 $x = \pi/2$ 的面積便剛好是從 $x = 0$ 至 $x = \pi/4$ 的兩倍：

$$A = 2A_1 = 2 \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x) dx$$

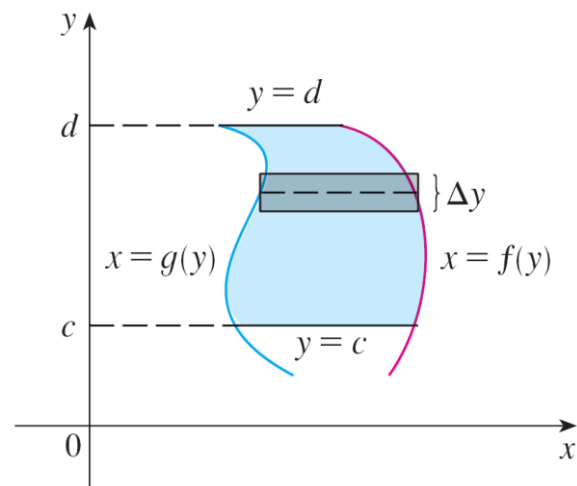
曲線之間的面積

另一方面，有些圖形的界線可能並不好用 x 的函數來表達，反而是利用 x 是 y 的函數可以描述圖形區塊的左右邊界。

如下圖所示，圖中淺色的區塊是由 $y = d$, $y = c$, $x = f(y)$ 以及 $x = g(y)$ 所圍成的。其中 $f(y) \geq g(y)$ 在 $c \leq y \leq d$ 上。

此時的面積便可以用橫條的方塊所覆蓋，當分割越切越細時，便可以寫成如下的積分：

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$



圖十一

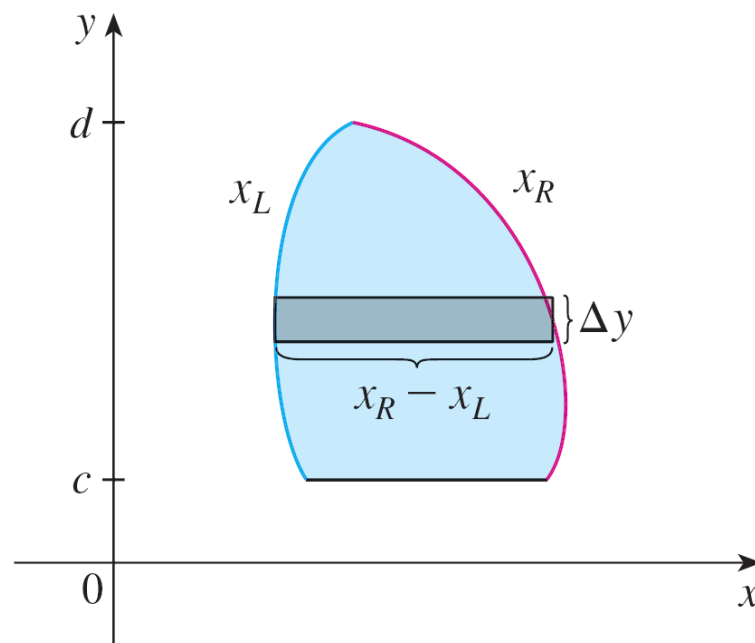
曲線之間的面積

在我們刻畫好圖形之後，了解哪一條曲線在左、哪一條在右，於是面積便可以寫成：

$$A = \int_c^d (x_R - x_L) dy$$

最後，更一般的狀況，若 $f(y)$ 與 $g(y)$ 不斷交叉時，我們跟前面一樣，可以在積分內加上絕對值，來表示面積。

但最後計算時，仍是要計算 f, g 的交點，分段計算面積。



圖十二