5

積分

5.4 不定積分與淨變化定理

不定積分

不定積分

微積分基本定理的兩個部分，都建立了導數與定積分之間的關係。

第一定理說明了 若 f(x) 連續，則 $\int_a^x f(t)$ 是 f(x) 的一個反導函數。第二定理說明了 $\int_a^b f(x)\,dx$ = F(b) – F(a) ，其中 F 為一

為了方便，我們需要一個符號來表示反導函數，而由微積分基本定理我們發現反導函數與積分關係非常的密切。因此，我們定義 f(x) 的不定積分 (indefinite integral)

$$\int f(x)\,dx$$

用來表示 f(x) 的反導函數。

反導函數

反導函數的意思便是微分之後會得到原函數：

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)}$$

舉例來說

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

於是不定積分其實也就是一群函數，反導函數加上一個常數。

不定積分

在這裡特別需要注意的是定積分與不定積分的差別。

定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 是函數 f(x) 在一個確切區間 [a, b] 上的積分值，是一個數值。

而不定積分 $\int f(x)\,dx$ 則是指函數 f(x) 的反導函數，是一個函數 (甚至是一群函數) 。

不過定積分與不定積分的關係，也就是由微積分基本定理的第二定理給出：若 f(x) 在 [a, b] 上連續，則

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big]_a^b$$

其中右邊的符號：表示在上界 b 取值 – 在下界 a 取值，也就是前面所提過的形式 F(b) – F(a) 。

不定積分

我們可以利用微分來檢驗任意的不定積分公式，

例如

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C \qquad \text{由於} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

於是我們可以從微分公式，來反推得不定積分公式，我們列在下頁。

不定積分

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad \int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C$$

不定積分

注意到我們在前一章反導函數提過的例子，

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

同一個常數 C ，只適用在 $(-\infty, 0)$ 或者 $(0,\infty)$ 上。

於是前面所提到的不定積分公式，同一個常數所給出來的不定積分，只適用於這個不定積分函數它存在且連續的一個區間上。

甚至可以分開定義：

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{if } x < 0 \\[2ex] -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

範例二

計算 $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$.

解:

雖然這個函數的不定積分並沒有在前面的積分公式中，不過我們可以利用三角函數公式改寫：

$$\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)d\theta$$

$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta$$

$$= -\csc\theta + C$$

範例五

計算 $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt.$

解:

首先我們簡化形式，得到單純 t 的冪函數：

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$

$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Bigg]_1^9$$

$$= 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Bigg]_1^9$$

範例五 / 解

cont’d

$$= \left(2 \cdot 9 + \tfrac{2}{3} \cdot 9^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right) - \left(2 \cdot 1 + \tfrac{2}{3} \cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$

$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1$$

$$= 32\tfrac{4}{9}$$

應用

應用

微積分基本定理的第二定理告訴我們：若 f(x) 在 [a, b] 上連續，則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

只要 F 是 f 的任意反導函數即可。

因此作為一個特例，當 F’ 連續時，有

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

F’ 即 y = F(x) 的變化率，於是從上式可以看出這樣的直觀：

當 x 從 a 變化至 b ，將 y 的變化率收集起來，便會得到 y 的總變化值，或者稱為淨變化值 (net change) 。

應用

於是就這個觀點，我們可以將之代換到許多情況：

- 若 V(t) 為在時間 t 時，蓄水池中所儲存水的體積。則 V’(t) 則表示水流入池中的變化率 (單位時間流量) 。此時則有

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

表示將自 t_1 至 t_2 的每單位時間流量分別加總，便是這段時間體積的總增加量。

- 若 [C](t) 表示某個化學反應單一產物的濃度，則 d[C]/dt 便可以看成是反應速率。此時有

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}\,dt = [\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)$$

將單位時間反應量加總，就可以得到化合物的淨增加值。

應用

- 假設某生物族群個體的自然增加率為 *dn/dt* ，則有

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\, dt = n(t_2) - n(t_1)$$

表示在這段時間內的淨增加族群個數。

在這裡的自然增加率即生育率扣去死亡率的數值。

應用

- 若 $C(x)$ 為生產 x 單位某商品的成本，則生產 x 單位時的邊際成本為 $C'(x)$ ，此時有

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

為自 x_1 單位至 x_2 單位時生產的成本。

應用

•若一物體沿著直線運動的位置為一函數 $s(t)$ ，則其速度為 $v(t) = s'(t)$ 。則此積分

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

表示位置的淨變化率，也就是位移。

應用

- 在前一例中，若我們只想單純計算移動距離呢？

位移也就是計算位置的淨變化，因此當速度為負的時候，短時間的位移反而會縮小，但另一方面移動距離卻是無時無刻不再增加。

因此若我們只想考慮移動距離，則我們想計算的速度便不應該有正負相消，應該在 $v(t) > 0$ 的區間上作積分得到正向移動的位移，而在 $v(t) < 0$ 的區間上積分，得到負向移動的距離，兩者距離再加總。事實上這也剛好就是 $|v(t)|$ 的積分：

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt = \text{ 自 } t_1 \text{ 至 } t_2 \text{ 的總移動距離}$$

為了區別，在物體上我們把 $v(t)$ 稱為速度， $|v(t)|$ 稱為速率。

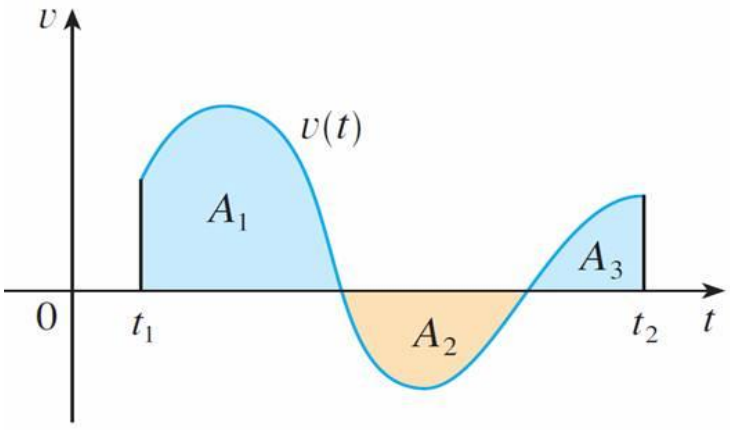
應用

下圖三顯示了

位移 = 正向移動距離 – 負向移動距離 = $A_1 + A_3 - A_2$

而

總移動距離 = $A_1 + A_2 + A_3$



圖三

應用

- 同樣一個直線運動物體，其加速度 $a(t) = v'(t)$ ，於是

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

也就是自 t_1 至 t_2 時的速度淨變化。

範例六

一直線運動物體，其速度函數為 $v(t) = t^2 – t – 6$ 公尺每秒。

(a) 求其在時間 $1 \le t \le 4$ 之間的位移距離。

(b) 求其在同樣時間內的總移動距離。

範例六 / 解

(a) 直接使用淨變化原理 (net change theorem)

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4$$

$$= -\frac{9}{2}$$

因此可知物體在這段時間內往左移了 4.5 公尺。

範例六 / 解

cont'd

(b) 考慮 $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ 。因此在 [1, 3] 上 $v(t) \le 0$ ，而在 [3, 4] 上 $v(t) \ge 0$ 。

因此我們計算「速率」 |v(t)| 的積分：

$$\int_1^4 |v(t)|\,dt = \int_1^3 [-v(t)]\,dt + \int_3^4 v(t)\,dt$$

$$= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\,dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4$$

$$= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}$$