5

積分

5.3 微積分基本定理

微積分基本定理

微積分基本定理之所以被稱為基本定理，這個定理的重要性在於它連結了微分學跟積分學，並且給出了微分與積分之間明確的關係。

微積分基本定理分成兩個部分。其中的第一個部分，是處理類似這樣的函數

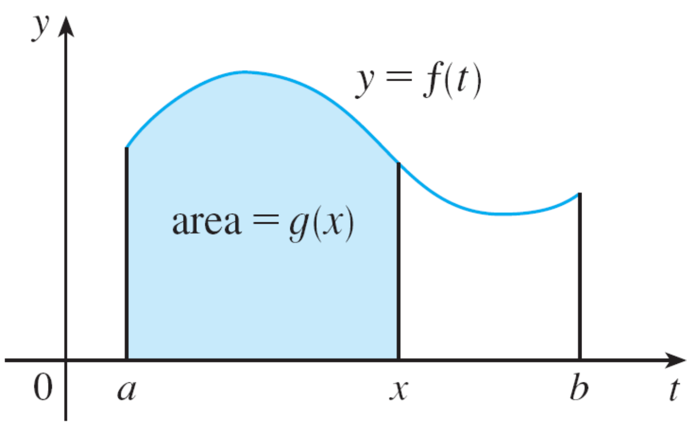
$$g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

其中 f(x) 是定義在 [a, b] 上的連續函數， x 是在 [a, b] 之間的變數。

考慮到給定任意在 [a, b] 之間的數 x ，上述的積分便可以算出一個值指定給 g(x) ，因此這樣的形式的確是一個函數。

微積分基本定理

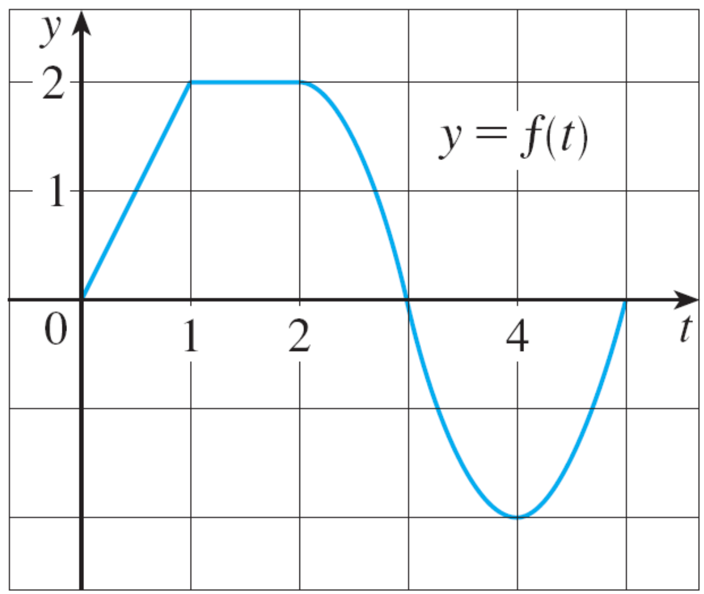
先考慮 f(x) 是正值函數，此時 g(x) 也就代表著 f(x) 圖形底下從 a 到 x 的面積。很自然的可以想像 g(x) 的數值是隨著 x 連續變動的。



圖一

範例一

考慮 f(x) 如圖二，定義 $g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 試求 g(0), g(1), g(2), g(3), g(4), g(5) 的值，接著刻劃 g(x) 的值。



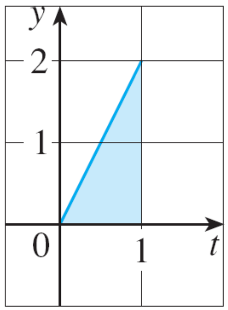
圖二

範例一 / 解

首先由積分性質， $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$.

接著從圖三可以看出， $g(1)$ 是圖中三角形的面積：

$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$



$g(1) = 1$

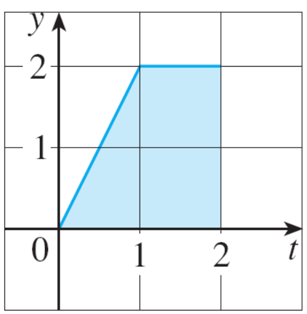
圖三 (a)

再來計算 $g(2)$ ，我們便考慮 $g(1)$ 再加上 x = 1 ~ 2 間矩形的面積

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt$$

$$= 1 + (1 \cdot 2) = 3$$



$g(2) = 3$

圖三 (b)

範例一 / 解

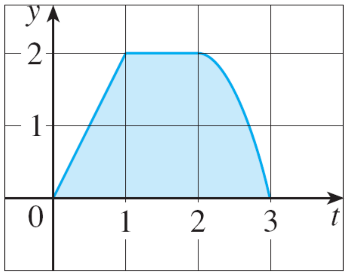
cont'd

接著 x = 2 ~ 3 的面積我們只能用估算的，

若以 1.3 來估計，則

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\, dt$$

$$\approx 3 + 1.3 = 4.3$$



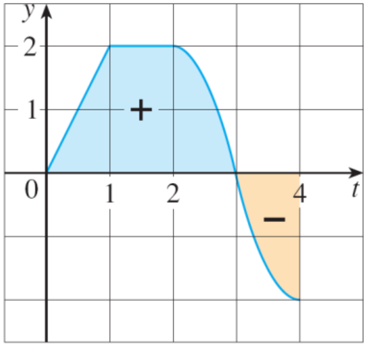
$g(3) \approx 4.3$

圖三 (c)

對於 *x* > 3, *f*(*x*) 為負，因此計算積分我們需要倒扣在 x 軸底下的面積：

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\, dt$$

$$\approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$



$g(4) \approx 3$

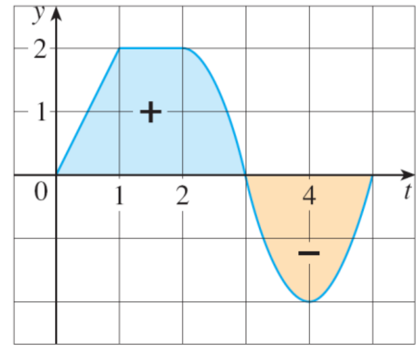
圖三 (d)

範例一 / 解

cont'd

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt$$

$$\approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

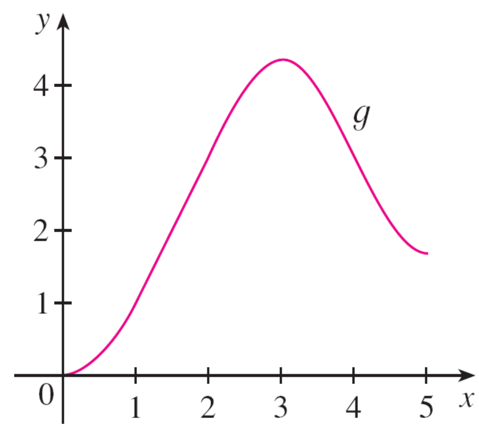


$g(5) \approx 1.7$

圖三 e

因此我們連接這些點，大概可以刻劃出 g(x) 的圖形。

另外注意到，由於在 x ≤ 3 的時候，f(x) 為正值，因此 g(x) 在 x ≤ 3 的地方均為遞增。而在 x > 3 之後，f(x) 轉負，則 g(x) 在 x > 3 為遞減。



$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

圖四

微積分基本定理

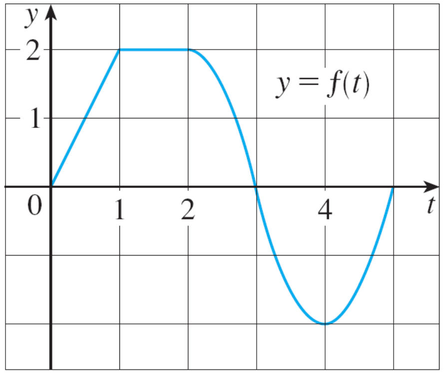
我們再多做一些觀察。

考慮 f(t) = t ， a = 0 。我們計算積分可知 $g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$

反過來對積分的結果微分可得到 $g'(x) = x$ ，可以發現 $g' = f$ 。

換句話說，我們以積分 f(t) 的形式定義 g(x) ，最後得知 g(x) 是 f(t) 的一個反導函數。

若我們考慮前一個範例一之中估計得到的 g(x) ，微分之後也大致上可以得到原來 f(x) 的圖形。



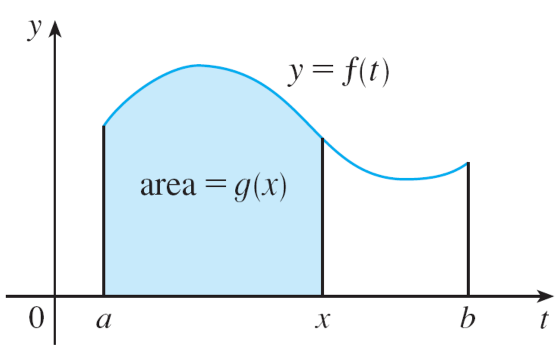
圖二

微積分基本定理

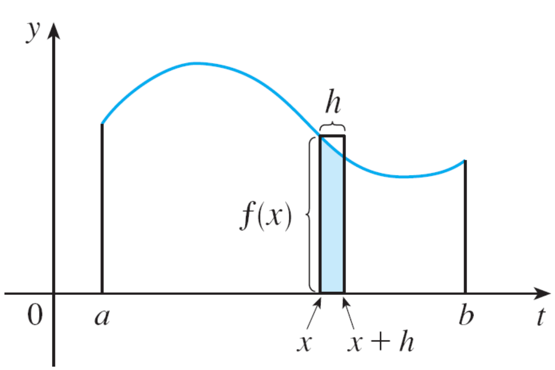
於是我們或許可以猜測，積分後得到的 g(x) ，是否跟 f(x) 的反導函數有關係？

我們先考慮 $f(x) \geq 0$ 的情況，同樣定義 $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 來試著解釋這個現象。

為了計算 $g'(x)$ ，我們先從微分的定義來觀察：給定 $h > 0$ ，$g(x + h) - g(x)$ 也就是從 x 到 x + h 之間的面積，如下右圖。



圖一



圖五

微積分基本定理

對於足夠小的 h ，我們可以觀察到 g(x+h) – g(x) 這一塊小區域大概接近高度是 $f(x)$ ，寬度為 h 的長方塊。於是有

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

因此

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \approx f(x)$$

所以直覺上，我們會有這樣的事情

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f(x)$$

微積分基本定理

從圖形上的直覺，我們大概對積分與反導函數之間的關係有了一些感覺。事實上這件事情對任意連續的 f(x) 均成立，便是所謂的微積分基本定理：

[微積分基本定理] (第一定理) 給定 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 則 f 的上界積分

$$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt,\quad a\le t\le b$$

是在 $[a,b]$ 上的連續函數，在 (a,b) 上可微，且 $g'(x)=f(x)$ 。

用萊布尼茲的符號，這個基本定理可以改寫為：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

微積分基本定理

粗略的來說，微積分基本定理的第一定理表示，一個函數的積分是原函數的反導函數。

也就是「積分」與「微分」為反運算。

範例二

求 $g(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt.$ 對 x 的導數。

解:

由於 $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ 是連續函數，由微積分基本定理的第一定理，可知道

$$g'(x) = \sqrt{1+x^2}$$

範例三

我們再來看一個例子，雖然 $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ 這樣形式的函數似乎比較奇怪，但這種函數常在物理或者化學中常出現。

例如菲涅爾函數 **(Fresnel function)** ：

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\,dt$$

是以法國物理學家 Augustin Fresnel 命名的。

這個函數第一次出現在菲涅爾在光波的散射理論之中，在現代也能應用在最佳化路線設計當中。

範例三

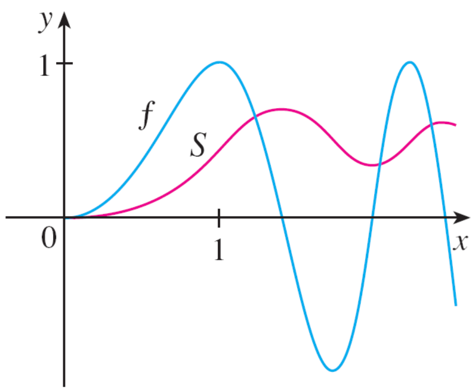
cont'd

微積分基本定理的第一定理告訴我們菲涅爾函數的導數為

$$S'(x) = \sin(\pi x^2/2)$$

這表示我們可以利用微分學中一次導數、二次導數檢驗來分析 S(x) 的行為。

圖七的 f(x) 是 $\sin(\pi x^2/2)$ 的圖形，計算 f(x) 的積分，便可以大致上刻劃 S 的圖形。



$f(x) = \sin(\pi x^2/2)$

$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\, dt$

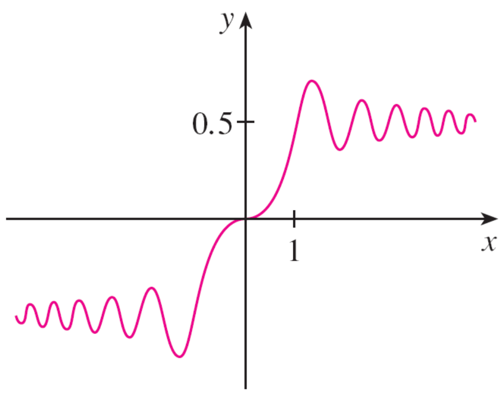
圖七

範例三

cont'd

我們利用電腦可以計算非常多個 x 值的面積值，用來刻劃更詳細的 S 的圖形。

圖八是更大範圍的 S(x) 的函數圖形。



$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi t^2/2)\, dt$$

圖八

微積分基本定理

在重複一次，微積分基本定理第一部分，是知道「積分是微分的反運算」。

接著微積分基本定理的第二部分，主要是反過來利用已知的反導函數，來估算一個函數的定積分值。我們先介紹定理的敘述：

[微積分基本定理] (第二定理) 給定 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 為連續函數，則

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a)$$

其中 $F(x)$ 為任意 f 的反導函數，即 $F'(x) = f(x)$ 。

微分與積分互為反運算

微分與積分互為反運算

若已知 $F'(x) = f(x)$ ，由微積分基本定理的第二定理可知

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

這個表示若我們已知一個函數 F(x) ，微分後再積分則可以得到接近原本 F(x) 的函數，但是形式是 F(b) – F(a) ，積分上界減去積分下界的形式。

雖然形式有點差別，不過大致上即是：積分與微分互為反運算。

第一定理：積分便是原本函數的反導函數；

第二定理：微分後再積分會得到接近原本函數的函數。