5 積分

5.2 定積分

定積分

這樣的極限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

在我們討論 f 函數曲線下的面積，或者討論給定速度的情況下求位移的距離，都會考慮到這樣的極限。

我們還會遇到更多這樣的情況，在更一般的情況下，甚至 f(x) 也不一定是正值的函數，但是我們也是有一樣的概念。

在下一頁我們定義所謂的「定積分」。

定積分

[定義] 給定函數 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 。我們將區間 $[a, b]$ 分割成 n 等份，分割點分別爲 $a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$ ，使各區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 之寬度均分各爲 $\Delta x = (b-a)/n$ 。在每一區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 均挑選一取樣點 $x_i^\star$ 。

我們定義 $f(x)$ 在區間 $[a, b]$ 上的定積分 (definite integral) 爲以下極限:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x.$$

左邊的積分符號 $\int$ 是 Leibniz 使用表示加總 (Sum) 的極限。左邊的積分有意義，若且惟若右邊的極限存在，此時我們稱 f(x) 為可積函數。

積分符號內的 f(x) 稱為被積函數 (integrand) ，a 、 b 分別稱為積分的上、下界 (或上、下限)。

符號 dx 在這裡是配合積分的符號，表示是以 x 為積分函數的變數，單獨看並沒有意義。

定積分

備註 1. 定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 本身是一個數字，不是 x 的函數。事實上這個數值也與積分變數無關，積分變數可以任意代換：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

備註 2. 這個和

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

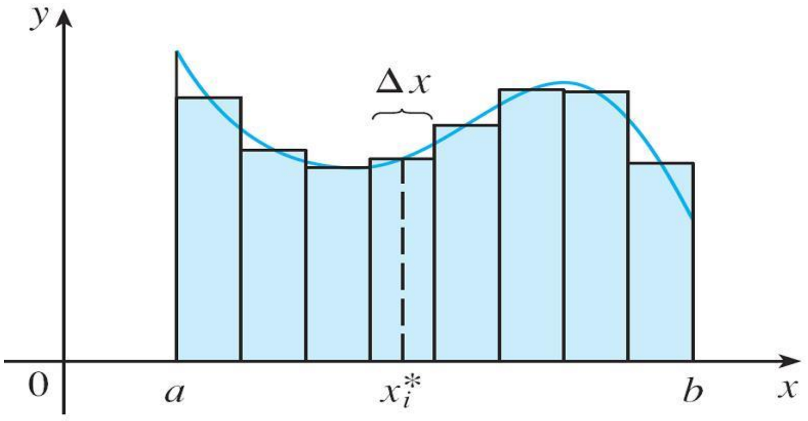
一般稱為黎曼和 (Riemann sum) ，是為了紀念數學家黎曼。這樣定義出來的積分也稱為黎曼積分 (Riemann integral) 。

定積分

因此，定積分的定義也就是說：

任意可積函數 f(x) 的定積分，可以利用黎曼和來逼近。

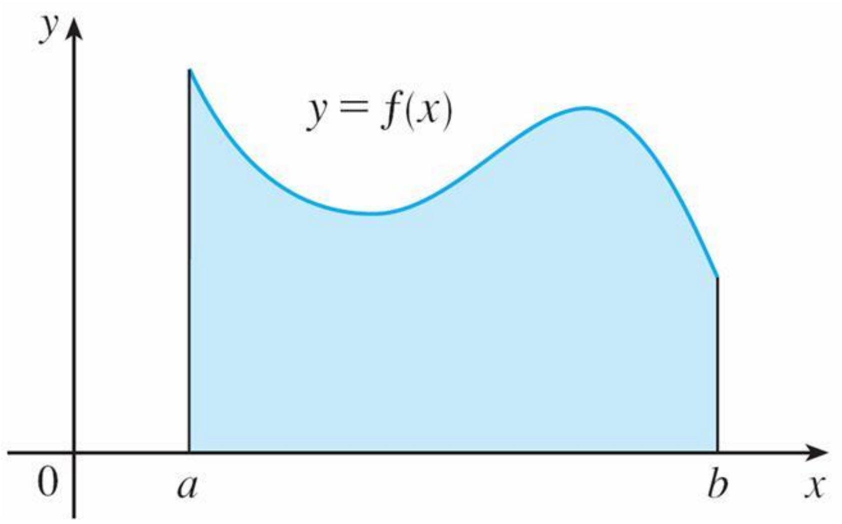
若 f(x) 為正值函數，黎曼和也就是我們前面常用到的長方塊的面積總和，如右圖所示。



圖一

定積分

在上一節提起積分時，我們之所以開始討論積分，一個原因是要處理面積的問題：當 f(x) 為正值函數時，求範圍內的面積，即 $\int_a^b f(x)\,dx$



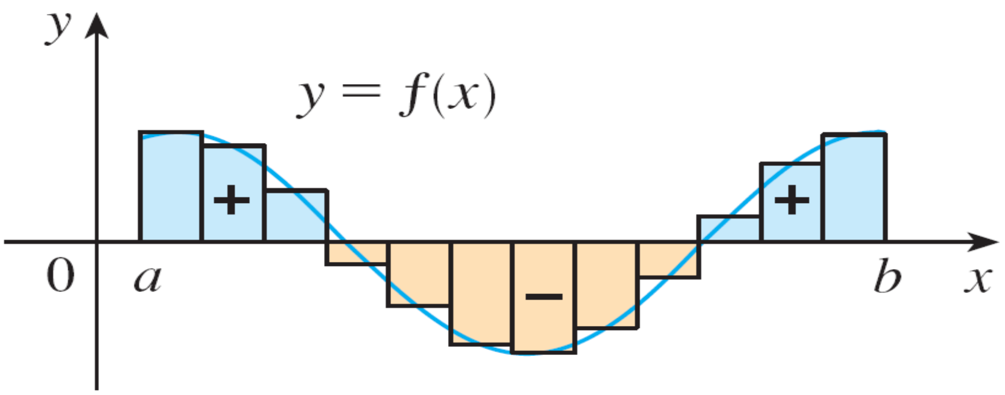
圖二

定積分

但若在積分範圍內， f(x) 同時有正值與負值之時，其積分的黎曼和就會變成：

「屬於正值的長方塊面積」減去「屬於負值的長方塊面積」

如下圖所示：



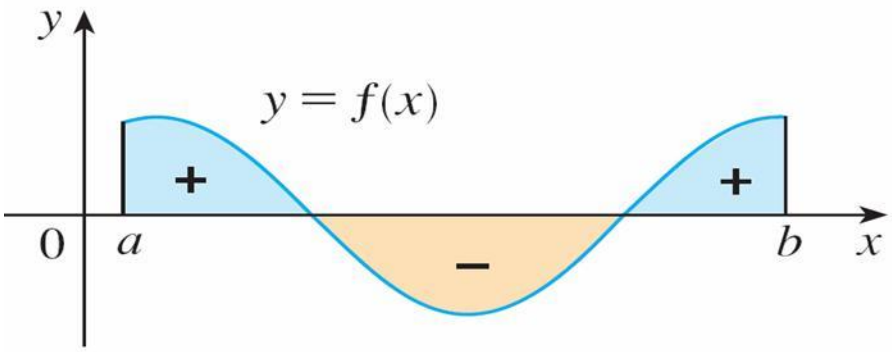
圖三

定積分

接著我們若對黎曼和曲極限，便會得到如下圖四的情況：
定積分也就是圖中的正負面積的淨值 (net area) ，也就是

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

其中 A1 是 f(x) 圖形在 x 軸上方部分的面積， A2 是 f(x) 圖形在 x 軸下方部分的面積。



圖四

定積分

備註 3: 雖然我們一開始定義定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的值是將區間 [a, b] 切分成等長的區段，每一段長 $\Delta x = (b-a)/n$ ，在計算黎曼和之後取極限。

但事實上我們切分的時候可以分割成不同寬度的區間，定義分割點 $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ，區間 $[x_{i-1}, x_i]$ 長度為 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ 。

但我們只要能夠保證這些區間長度 Δx_i 都夠小，則長方塊跟實際曲線與 x 軸所夾的面積就能足夠靠近。因此我們在這個情況下，把定積分的定義寫得更一般化：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

定積分

備註 5: 雖然我們定義函數的積分如果存在，則稱為可積函數。但具體上來說，什麼樣的函數會是積分函數？最常見的例子其實就是連續函數，任意的連續函數在閉區間上都是可積分的。我們寫成一個定理，證明會在更深入的課程中解釋。

定理] 給定 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲連續函數，則 $f(x)$ 爲可積函數，意即

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max_i |\Delta x| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x_i$$

極限存在。

另外，若 f(x) 為可積，表示這個積分值，與在取極限過程中，在各個小區間內的取樣點是怎麼取的無關。

因此在計算黎曼和時，可以盡量選擇方便計算的值。

範例一

將此黎曼和的極限

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \sin x_i)\,\Delta x$$

寫成在 [0, π] 的上積分。

解:

我們觀察面積加總是取 $x^3 + x \sin x$ 在一個取樣點 x_i 上的高度 $x_i^3 + x_i \sin x_i$ ，因此這個極限是 $x^3 + x \sin x$ 的積分。

再來，我們取上下界分別為 0 跟 π 。因此有

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \sin x_i)\,\Delta x = \int_0^{\pi} (x^3 + x \sin x)\,dx$$

定積分

現在再回頭過來看 萊布尼茲 挑的積分符號，其實意義就是便是：黎曼積分就是黎曼和的極限，

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\, \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$

萊布尼茲將加總 sum 的符號的 S 拉長成積分符號，而小段區間的寬度 Δx 使用 dx 來示意。

計算定積分值

計算定積分值

接著我們來計算定積分值，在沒有其他定理的輔助下，我們要計算一個函數的定積分，便只有從定義 －－ 黎曼和的極限來著手。

以下三個常見的加總公式可以幫助我們計算簡單的多項式積分：

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

計算定積分值

為了方便我們也整理一些常見的加總公式：包括常數的加總，數列的加總，兩個數列加總的相加，可以先取數列相加再加總。

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

範例二

(a) 計算 $f(x) = x^3 - 6x$ 在 a = 0, b = 3 上的黎曼和，其中將區間分割成 6 段，取樣點皆為各個小區間的右端點。

(b) 計算積分值

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx.$$

解:

(a) 當 $n = 6$ 時，區間長度為

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

此時可計算出分割點： $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$, 以及 $x_6 = 3.0$ 。

範例二 / 解

計算黎曼和：

$$R_6 = \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x$$
$$+ f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9)$$

$$= -3.9375$$

範例二 / 解

(b) 考慮等分割成 n 區間，區間寬度為

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{3}{n}$$

計算分割點 $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, 一般點 $x_i = 3i/n$ 。我們使用右端點計算黎曼和。由於 $x^3 - 6x$ 是連續函數，因此是可積函數。

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

範例二 / 解

cont'd

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n} \right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n} \right) \right]$$ (代入數值)

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i \right]$$ (常數提出)

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{81}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 - \frac{54}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$ (加總公式)

範例二 / 解

cont'd

$$= \lim_{n \to \infty} \left[\frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27$$

$$= -\frac{27}{4}$$

$$= -6.75$$

範例二 / 解

cont'd

下面的圖表，表列了在不同 n 值所計算出來的黎曼和。
也大致上驗證了我們前面的極限。

n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

中點法

中點法

我們在計算黎曼和時為了方便，取樣點大多取在端點。

在利用電腦計算的時候，這樣取點也比較方便。

不過若我們考慮要找到最佳的取樣點，使得在該點的取值剛好貼近在該區間上的平均值，那麼通常取在端點不會是很好的選擇。取而代之的是，取在中點可能比較平均。

中點法

以中點為取樣點的黎曼和估計，我們稱為中點法 (midpoint rule) ：

[中點法 (midpoint rule)]

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x = \Delta x\left[f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + \cdots + f(\overline{x_n})\right]$$

其中 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 以及 $\overline{x_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ 。

範例五

利用中點法 n = 5 估計積分 $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx.$

解:

考慮 [1,2] 中分割成五段的分割點為: 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 以及 2.0 ，各自的中點為 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 及 1.9

區間長度為 Δx = (2 – 1)/5 = $\frac{1}{5}$, 利用中點法估計得

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

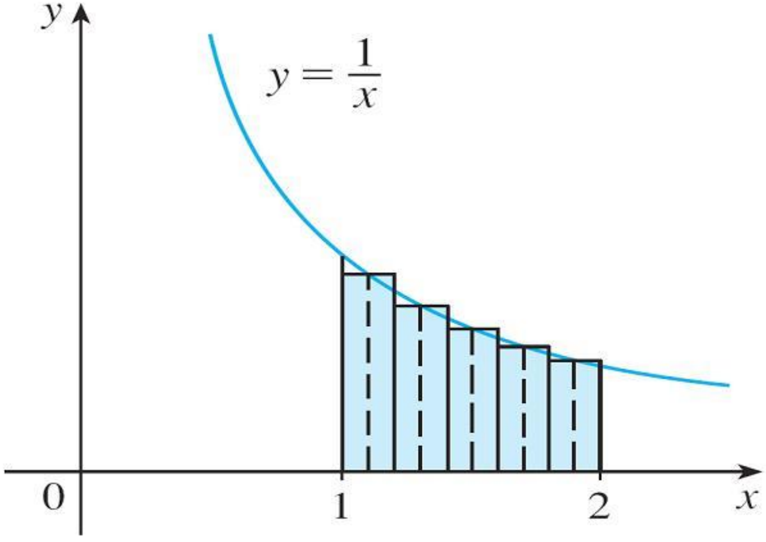
範例五 / 解

cont'd

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$\approx$ 0.691908

中點法計算的黎曼和即右圖的長方塊面積。



圖十一

定積分的性質

定積分的性質

我們定義定積分時，我們預設定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的上、下界 a, b 滿足 a < b 。

但為了讓黎曼和極限的定義適用在 a > b 的情況，我們可以考慮在計算黎曼和時， Δx 從 (b – a)/n 看成是 – (a – b)/n

提出負號後，黎曼和的計算就跟一般的情況一樣，取極限之後便有：

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

定積分的性質

若當 a = b 之時， Δx = 0 ，則有

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

接著我們可以從黎曼和的定義、加總的公式，可以推得下列的積分性質：

積分的性質

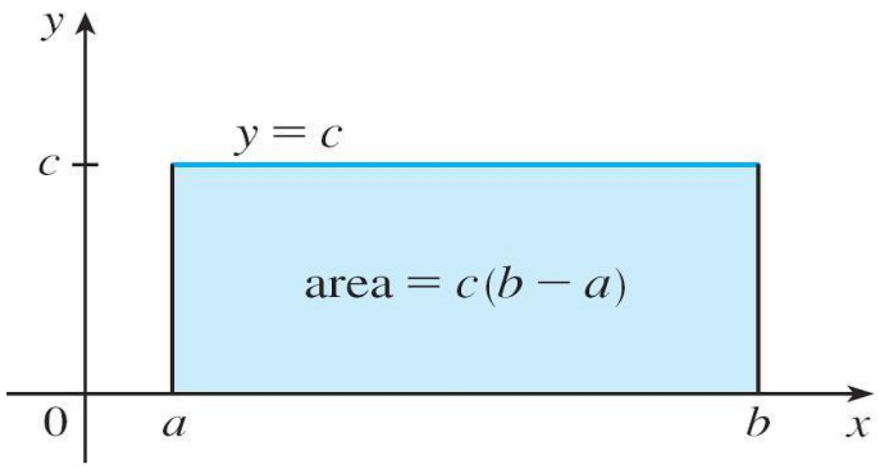
1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, 其中 c 為任意常數
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, 其中 c 為任意常數
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

定積分的性質

我們簡短說明一下這四個性質。

第一個性質，我們可以用下圖直接解釋：

若 $c > 0$, $a < b$ 的時候，
對 c 的定積分便是圖中的
矩形面積 $c(b-a)$



$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

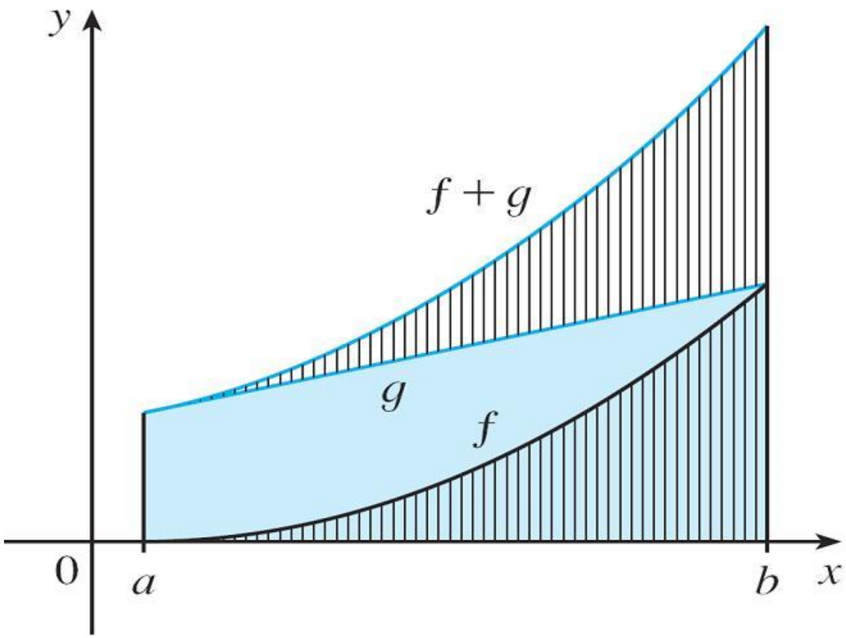
圖十三

定積分的性質

性質二則表示兩個函數的積分相加可以先相加再積分。

若 f, g 均為正值如右圖所示，則 f 的面積加上 g 的面積，也就是淺色加上直線的總面積。

而 f + g 的高度，就剛好是圖中高度最高的地方，因此 f + g 的面積也同樣是淺色加上直線的總面積。



$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

圖十四

定積分的性質

對一般的可積函數 f(x), g(x) ，利用加總的公式，我們可以證明如下：

$$
\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\
&= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

定積分的性質

幾乎一樣的方法我們可以證明性質三與性質四：

$$\int_a^b cf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} cf(x_i^\star)\Delta x = c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

$$= c\int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)-g(x_i^\star)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g(x_i^\star)\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

範例六

利用積分的性質，計算 $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx.$

解:

由性質二，可得到

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

從性質一，可計算得

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0)$$

範例六 / 解

cont'd

同時，在前面章節中我們已經先計算得

$$\int_0^1 x^2\,dx = \tfrac{1}{3}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} \\ &= 5\end{aligned}$$

定積分的性質

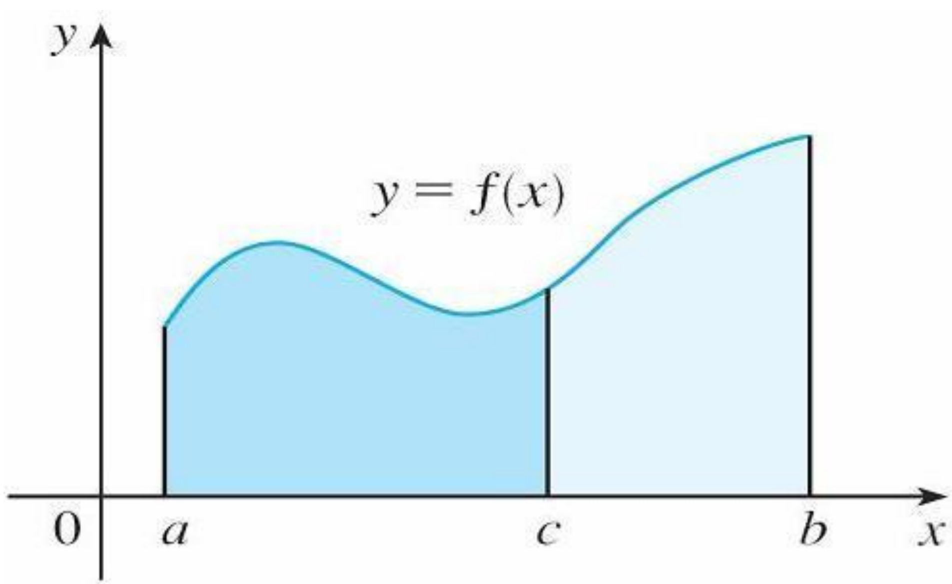
接下來的這個性質，是針對同一個函數 f(x) 的積分，我們可以分開積分區域分別積分：

$$\boxed{\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx}$$

定積分的性質

我們可以先從圖看出這件事是對的，如下圖：

「 a ~ c 的面積」加上「 c ~ b 」的面積，也就等於「 a ~ b 的面積」。



圖十五

定積分的性質

前面的性質 1 ~ 5 ，不管是 a < b, a = b, a > b 均會成立。

接下來的性質，主要是利用函數的大小比較積分，因此只有考慮 $a \leq b$ 的一般情形。

6. 若 $f(x) \geq 0$ ，則 $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ 。
7. 若在 $x \in [a, b]$ 都有 $f(x) \geq g(x)$ 則 $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$
8. 若在 $x \in [a, b]$ 都有 $m \leq f(x) \leq M$ 則有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

定積分的性質

關於性質六，若 $f(x) \geq 0$，則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 也就是幾何上的在 $f(x)$ 圖形底下的面積，面積必定非負。

性質七，因為有 $f(x) \geq g(x)$ ，則有 $f(x) - g(x) \geq 0$ ，由性質六可以得到

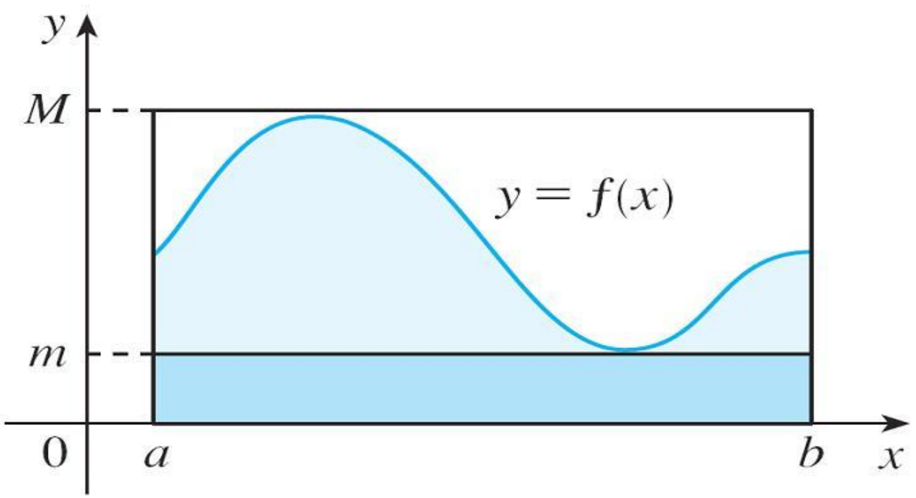
$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) - g(x)dx \ \geq 0$$

移項便可得到性質七。

定積分的性質

性質八則可利用下圖圖解說明，先考慮 $f(x) \geq 0$ ，則我們可以直接看出 f(x) 圖形底下的面積，介於 m(b – a) 以及 M(b – a) 之間。

一般來說，當 f 為連續函數的時候，我們想要粗略估計 f(x) 的積分大概範圍時，便可以取到 f 的最大值 M 以及最小值 m 來估計積分。



圖十六

若我們想估計中點法的誤差，也可以利用小區間上的最大值跟最小值來估計誤差。