4

微分的應用

4.9 反導函數

反導函數

討論物理問題時，了解物體全程速度的同時，可能會反回去關心物體的位置。

討論工程問題時，則可能想在了解水池放水的全程流速時，同時也了解水池剩下的水量。

生物學問題也是一樣，若我們了解一個細菌族群生長的速度（假設正比於族群大小），則我們想反過來了解整體的族群大小在某個時間點會有多大。

反導函數

在這些問題當中有一個共同的點：我們想找一個函數 F ，其導函數為某個已知函數 f 。

若這樣的 F 存在，我們稱 F 為 f 的一個反導函數 (anti-derivative) 。

我們這裡做一個定義：

[定義] 給定函數 $f(x)$ ，對任意 F 若滿足

$$F'(x) = f(x)$$

則稱 F(x) 為 f(x) 的反導函數。

反導函數

例如 $f(x) = x^2$ ，求 f(x) 的反導函數。

事實上這個並不難，因為 f(x) 是多項式，可以利用多項式的微分公式反推回去：考慮 $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ 則有 $F'(x) = x^2$ 。

但同時，我們也發現 $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ 同時也滿足 $G'(x) = x^2$ 。

因此， F, G 都是 f 的反導函數。

更進一步來說，任何函數 $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$ 其中 C 為任一常數，這樣的 H 都是 f 的反導函數。

反導函數

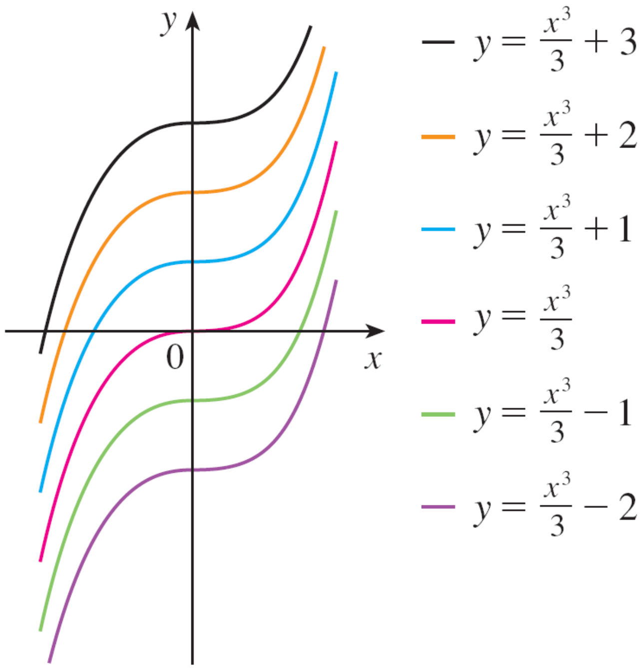
我們在學了為積分基本定理之後可以證明：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的反導函數，那任意的反導函數 $G(x)$ ，會跟 $F(x)$ 相差一個常數。

也因此，在前面的例子中 $f(x)$ 的反導函數是 $x^3/3$ ，更進一步我們還可以知道，任意一個 $f(x)$ 的反導函數，可以表示成 $x^3/3 + C$ 的形式，其中 C 為一常數。

反導函數

在給定不同常數 C 的情況下，得到的各個反導函數如下圖。

可以發現函數圖形在相同 x 點的切線斜率完全一樣。



圖一

範例一

試求下列函數的所有反導函數

(a) $f(x) = \sin x$ **(b)** $f(x) = 1/x$ **(c)** $f(x) = x^n,\ n \neq -1$

解:

(a) 從微分攻勢 $F(x) = -\cos x \Rightarrow F'(x) = \sin x$ ，可知 sin(x) 的其中一個反導函數為 $-\cos x$ 。

因此一般的反導函數形式為 $G(x) = -\cos x + C$

範例一 / 解

cont'd

(b) 考慮

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

因此在 x 範圍為正時 (0, ∞) ，1/x 的反導函數為 ln *x* + C

同時更一般的情況下，對於 x 為負的時候，有

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

因此 1/*x* 的反導函數為 ln |*x*| + *C* ，唯一只有在 x = 0 時不存在。換句話說：

若是分別在 (−∞, 0) 以及 (0, ∞) 上時， 1/x 的反導函數為 ln |x| + C 。

範例一 / 解

cont'd

我們寫成分段定義的形式，因為兩邊取的常數可能不一樣

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{if } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

為 1/x 所有可能的反導函數。

(c) 我們利用多項式的微分反推， *n* **>** –1 時，有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

因此 x^n 的反導函數為 $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

範例一 / 解

cont’d

若考慮 $n < -1$ 的情況，反推微分公式得到的結果也算大致上正確。但由於 $n < -1$ 為負， xn+1 在 $x = 0$ 上並無定義，因此這個反導函數也只在任意不包含 0 的區間上成立。

反導函數

從各種微分公式，我們可以反推現有一些常見函數的反導函數，如下：

函數	反導函數	函數	反導函數
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sec^2 x$	$\tan x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$\sec x \tan x$	$\sec x$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
e^x	e^x	$\cosh x$	$\sinh x$
$\cos x$	$\sin x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\sin x$	$-\cos x$		

反導函數

特別的，表列出的第一項與第二項公式表示：

(1) f 的反導函數成上 c 的係數積是 cf 的反導函數。

(2) 兩個函數 f, g 的反導函數加法，是 f + g 的反導函數。

這也就是說，若函數可以分成好幾項相加，則我們可以分別先求各項的反導函數，在相加總得到整個的反導函數。