4 微分的應用

4.5 函數作圖的要點整理

函數曲線的作圖要點

函數曲線的作圖要點

在了解函數的一階與二階導數對函數圖形的影響以後，我們便可以用來描繪函數圖形，以下是整理函數圖形作圖的要點。

注意到實際上我們可能遇到不同種類的函數，所需要的工具也可能不一樣，也不一定能夠繪製的非常精準，只能描述出大概的走向。

(1) 確認函數的定義域、值域

　　如果函數是由基本函數所組成，至少需要注意：分式函數分母會等於 0 的地方、根式與對數函數在根號對數內不能有負值等等；另一方面函數的值域需要注意：正餘弦函數的值在 (-1,1) 之間，指數函數 e^x 恆為正等等。

函數曲線的作圖要點

(2) 與參考的座標軸交點

有些情況我們需要知道在特定參考時間點的數值。

與 y 軸的交點便是 (0,f(0)) 需要計算 f(0) 。

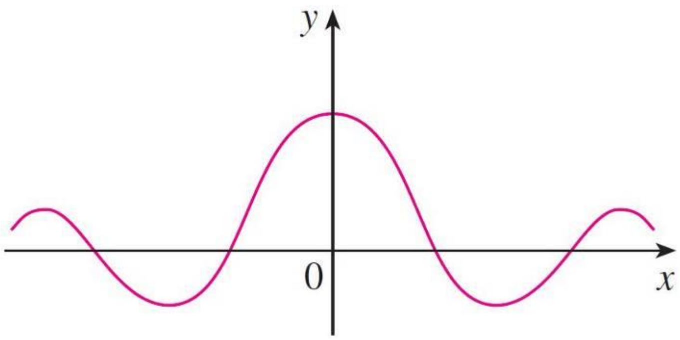
與 x 軸交點便要求解 y = f(x) = 0 的點，但有時候不一定能夠直接解，需要勘根。

(3) 函數的對稱性

(a) 若在定義域中有 $f(-x) = f(x)$ ，則表示 f 是偶函數，其函數圖形會對 y 軸對稱。

函數曲線的作圖要點

在這個情況下我們便只需要知道 x>0 的圖形即可得知整個實數上的函數圖形。



偶函數：對 y 軸左右對稱

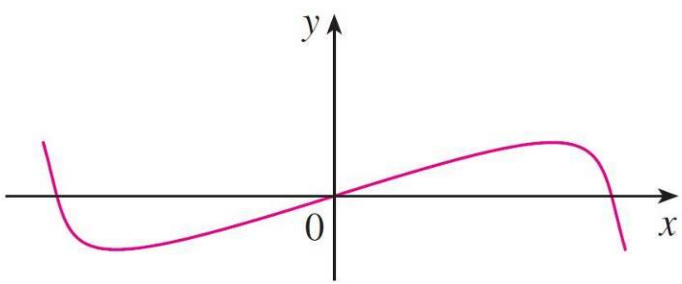
圖三(a)

例如 $y = x^2$, $y = x^4$, $y = |x|$ 以及 $y = \cos x$ ，這些都是偶函數。

函數曲線的作圖要點

(b) 若 $f(-x) = -f(x)$ 則 f(x) 為一奇函數，其函數圖形為對原點對稱。同樣也是只需要知道 x>0 的部分便可以知道在實數上的情形。

[對原點對稱，便是根據原點旋轉 180° 圖形，如下圖所示]



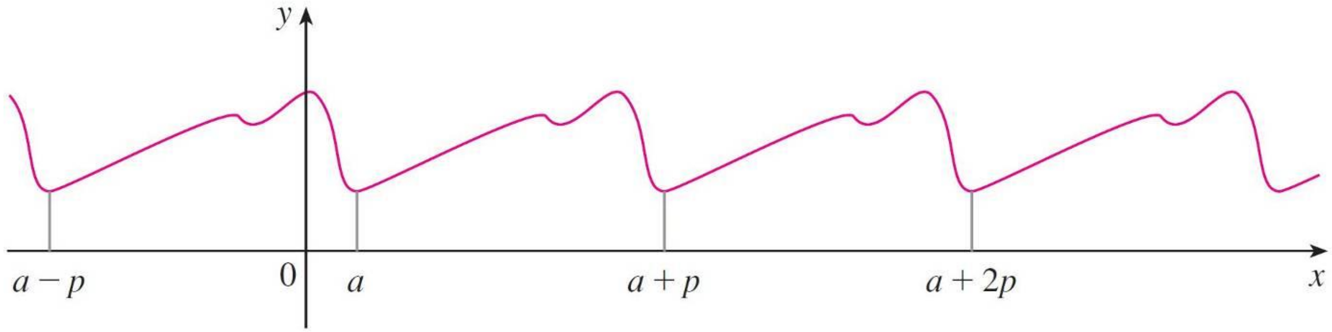
奇函數：對原點對稱

圖三(b)

奇函數的例子例如： $y = x$, $y = x^3$, $y = x^5$ 以及 $y = \sin x$.

函數曲線的作圖要點

(c) 若 $f(x + p) = f(x)$ 對所有 x 以及一正數 p 。則此時 f 為一週期函數，其週期為 p 。此時我們只需要知道在某個特定區間 (a, a+p) 上的圖形，便可以知道在所有實數上的圖形。



週期函數：平移對稱性 (或者說平移不變性)

圖四

常見的週期函數例如 cos(x), sin(x) ，其週期為 2π 。

函數曲線的作圖要點

(4) 漸近線

(a) 水平漸近線

若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ 或者 $\lim_{x\to(-\infty)} f(x) = L$ ，則 $y = L$ 為函數圖形在 x 趨近無窮大或者負無窮大時的漸近線。

但若 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (或 $-\infty$)，則此時這個漸近並不是很有意義，但至少可以幫助我們了解函數在無窮遠處的行為。

函數曲線的作圖要點

(b) 鉛直漸近線

在有下列情況的時候，

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

我們稱 x = a 為 y = f(x) 圖形的一條鉛直漸近線。

常見具有鉛直漸近線的函數，例如：有理函數在分母等於 0 的地方，或者 tan(x) 在 π/2 的整數倍之處。

函數曲線的作圖要點

(c) 斜漸近線

若 $f(x)$ 可以寫成 $ax + b + g(x)$ ，其中 $g(x)$ 在 x 趨近正無窮大時， $g(x)$ 會趨近 0。則此時我們稱 $y = ax + b$ 為 $y = f(x)$ 圖形的一斜漸近線。

這算是一個 f 在無窮遠處趨近正負無窮大的特例，但也可以幫助我們了解 f 的行為。

一個尋找斜漸近線的方法是，若 $f(x)$ 可微分，且 $f'(x)$ 在無窮遠處會趨近 a ，則很可能 $f(x)$ 有斜漸近線 $ax + b$ 。

(5) 遞增與遞減的區間

若函數 $f(x)$ 可微分，我們可以透過 $f'(x)$ 的正負來得知 f 圖形分別在哪些區間遞增、遞減。

函數曲線的作圖要點

(6) 局部極大值或極小值

求得一階導數後，可以解 f(x) 的臨界點，也就是 f’(c) = 0 或者 f’(c) 不存在的點。

計算得臨界點後，利用遞增、遞減區間可以判斷在 x = c 時會是極大或者是極小值。若在 c 前後， f’ 由負轉正，則 f(c) 為極小；反之 f‘ 由正轉負，則 f(c) 為極大。

令一方面我們也可以利用二階導數判別，若 $f''(c) > 0$ 則可知 $f(c)$ 為局部極小；而若 $f''(c) < 0$ 則 $f(c)$ 為局部極大。

函數曲線的作圖要點

(7) 函數圖形的凹向與反區點

若 f'' 二階導數存在，則可以計算 $f''(x)$ 並了解 $f(x)$ 圖形的凹向。若在某一個區間上 $f''(x) \geq 0$ 則有 $f(x)$ 函數圖形為凹向上；反之若 $f''(x) \leq 0$ ，函數圖形為凹向下。

若 $f''(c) = 0$ ，需考慮 $x = c$ 前後凹向是否有改變，若有改變則代表 $x = c$ 為反曲點。

(8) 描繪曲線 利用以上要點，先劃出 xy 平面以及座標軸，標出漸近線、與 x 軸、 y 軸交點、局部極大值與極小值、反曲點等等。接著在考慮遞增遞減區間，便可以將上述已知的點依照走勢與凹向連接起來。同時讓圖形靠近漸近線。

範例一

試刻劃 $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$.

(1). 函數的定義域為

$$\{x \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \mid x \neq \pm 1\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$$

(2). 顯然函數與兩軸的交點為 (0,0) 。

(3). 由於 $f(-x) = f(x)$ ，函數為偶函數，對 y 軸左右對稱。

範例一

cont'd

(4). 計算極限 $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 1/x^2} = 2$

可知 $y = 2$ 為在正負無窮遠處的漸近線。

注意到在 $x = \pm 1$ 時，分母為 0 ，因此有：

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty \qquad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty$$

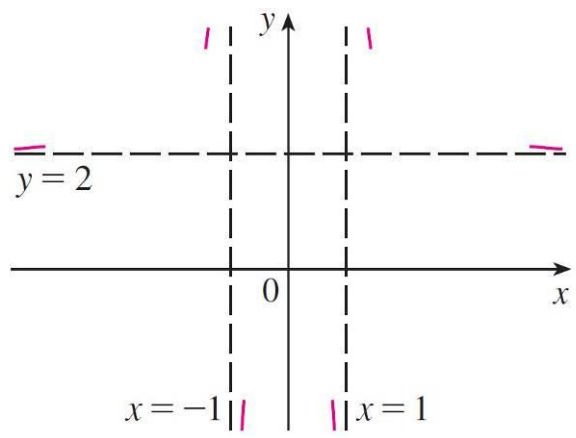
$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = \infty$$

範例一

cont'd

於是 $x = 1$ 以及 $x = -1$ 為鉛直漸近線

於是我們便可以先準備好做圖時可參考用的座標系與漸近線如下：



預先參考用的底圖

圖五

範例一

5. 計算一階導數

$$f'(x) = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

由於分母恆正，因此 f'(x) > 0 當 x < 0 ($x \neq -1$) ，而 $f'(x) < 0$ 當 $x > 0$ ($x \neq 1$) 時，可知 f 在 $(-\infty, -1)$ 以及 $(-1, 0)$ 上遞增，在 (0, 1) 以及 $(1, \infty)$ 上遞減。

6. 臨界點 $x = 0$ (f' = 0) 1 以及 -1 (f' 不存在)

不過 f 在 1, -1 的值為正負無窮大，所以我們需要考慮 x = 0 是否為極值。考慮到 f' 在 x = 0 附近由正轉負 0 ，因此 $f(0) = 0$ 是一個局部極大值。

範例一

7. 計算二階導數

$$f''(x) = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

由於 $12x^2 + 4 > 0$ ，我們便有

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x| > 1$$

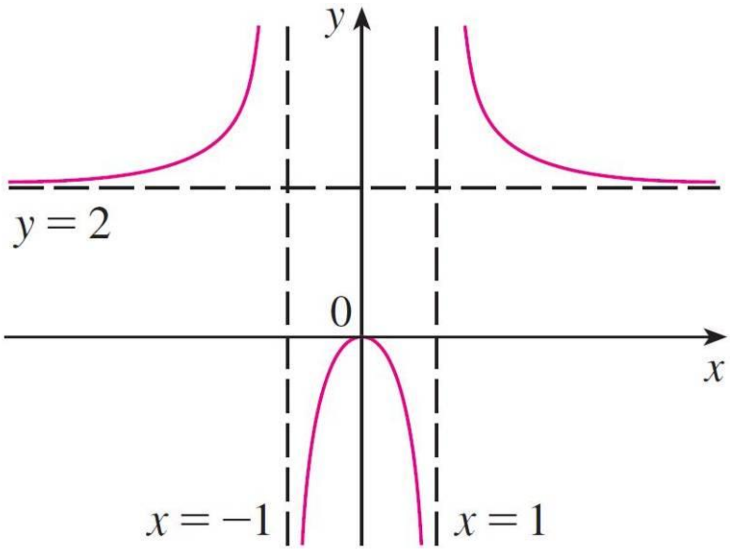
同時有 $f''(x) < 0 \Leftrightarrow |x| < 1$. 因此，函數在 $(-\infty, -1)$ 以及 $(1, \infty)$ 凹向上，在 (-1,1) 為凹向下。

但由於 f 在 -1, 1 沒有定義，此函數圖形沒有反曲點。

範例一

cont'd

8. 利用極值資訊，在底圖上刻劃出函數圖形



刻劃出函數 $y = \dfrac{2x^2}{x^2 - 1}$

圖六

斜漸近線

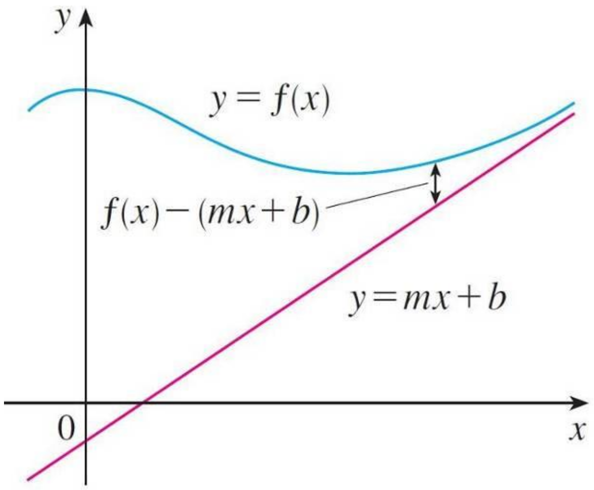
斜漸近線

如前所述，有些曲線的漸進線並非水平或者鉛直線，考慮在 x 趨近無窮大 (或者負無窮大時)，若有

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

則我們稱直線 $y = mx + b$ 為 y = f(x) 圖形的斜漸近線，也就是 y = mx+b 與 $y = f(x)$ 的差距在 x 趨近無窮大 (或者負無窮大) 時，會逐漸縮小至 0 。

如右圖所示。



圖十二

斜漸近線

通常斜漸近線會出現在有理函數，其分子次數恰好較分母多一次時。

在這個時候我們可以做長除法，將線性的部分分開，如下頁範例。

範例六

試刻劃 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$.

1. 函數之定義域 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

2. 函數與 x 軸 y 軸之交點均為 (0,0)

3. 由於 $f(-x) = -f(x)$ ， f 為奇函數，對原點對稱。

4. $x^2 + 1$ 恆正 0 ，此例並沒有鉛直漸近線。

由於 $f(x) \to \infty$ 當 $x \to \infty$，且$f(x) \to -\infty$ 當 $x \to -\infty$ ，
此例同樣也沒有水平漸近線。

範例六

cont'd

觀察到此函數為有理函數，分子次數較高，我們使用長除法

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

$$= -\frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 0 \qquad \text{as} \quad x \rightarrow \pm\infty$$

由於 y = f(x) 跟 y = x 差距漸小，因此 y = x 為一斜漸近線。

範例六

cont’d

5. 計算一階導數

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

因此 $f'(x)$ 恆非負， f(x) 在全域上為遞增。

6. 臨界點只有 $f'(0) = 0$ ，但 f' 在 x = 0 附近並沒有變號，因此 f(0) 並非是局部極大或者極小值。

範例六

cont'd

7. $f''(x) = \dfrac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-(x^4+3x^2)\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}$

有 $f''(x) = 0$ 當 $x = 0$ 或 $x = \pm\sqrt{3}$, ，此時我們分區間討論：

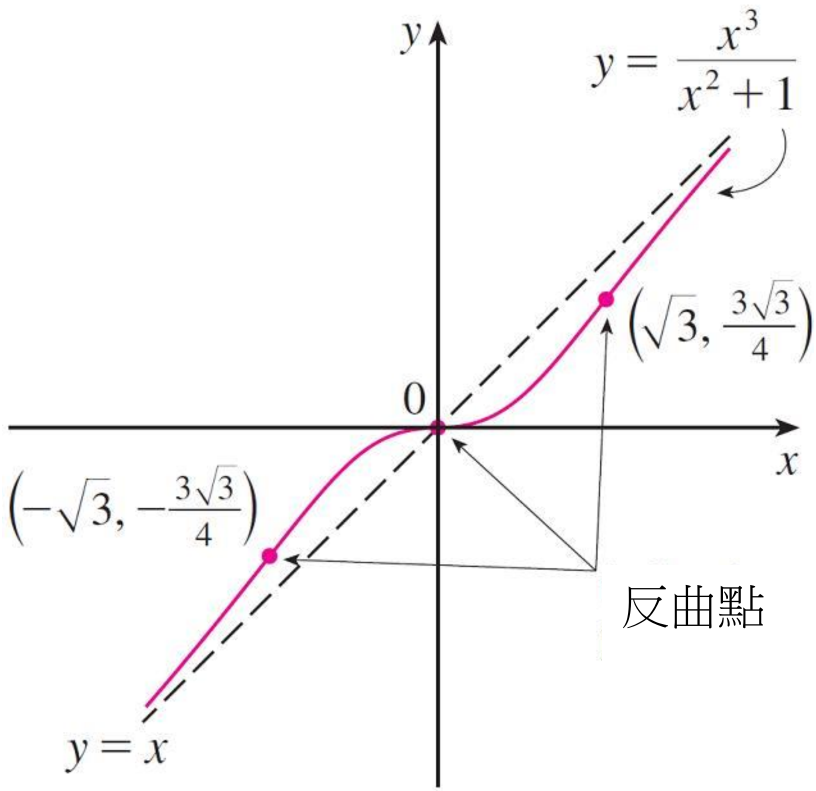
區間	x	$3-x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	凹向上
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	凹向下
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	凹向上
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	凹向下

觀察凹向改變，反曲點有 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$, (0, 0) 以及 $\left(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$.

範例六

cont'd

8. 劃出背景的斜漸近線後，依照函數走向與凹向刻劃出圖形



圖十三