# 4 微分的應用

# 4.4 羅必達法則

# 羅必達法則

假設我們想了解以下函數的行為

$$F(x) = \frac{\ln x}{x - 1}$$

當然 F(x) 並未在 x = 1 有定義，但我們想知道其在 x = 1 附近的行為，在極小範圍內的行為，也就是這個極限

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

# 羅必達法則

不幸的是，由於分母的極限為 0 ，因此無法利用極限的四則運算。而且分子、分母同時趨近到 0 ，也暫時看不出要如何比較。

更一般的情況，我們有這樣的極限形式：

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

其中 $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ 當 $x \to a$ 。

這種不確定是否存在的極限形式，我們稱為 0/0 不定型式的極限。

# 羅必達法則

當遇到有理函數時，不定型式可能可以透過約分消除：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

也或者在討論 sin(x) 微分時，我們利用幾何圖形觀察夾擠得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

# 羅必達法則

但上述的方法並不一定對一般的不定型式極限都可以使用。

另外一種不定型式是例如下者：考慮 x 趨近無窮大，想看此函數在無窮遠處時的漸近線

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x - 1}$$

我們發現分子跟分母都會跟著 x 趨近無窮大。於是直覺上，此極限便是觀察分子或者分母誰「跑得比較快」。若是分子趨近無窮大的速度快很多，則極限為無窮大 ，若是分母快很多，則極限便是 0 。若是分子分母趨近無窮大的速度等級差不多，那麼極限應該會是一個正數。

# 羅必達法則

更一般來說，在這個例子裡面我們處理的是這樣的極限：

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

其中 $f(x) \to \infty$(或 $-\infty$) ，以及 $g(x) \to \infty$ (或 $-\infty$) 。這個極限也是無法從分子、分母函數各自的極限得知比值極限的不定型式。

這個同時趨近無窮大的極限我們稱為， $\infty / \infty$ 不定型式的極限。

# 羅必達法則

在這一節中我們要介紹一個比較有系統的辦法，專門處理不定型式極限的方法，稱為羅必達法則 (L'Hospital's Rule) 。

[定理] (羅必達法則) 假設 f, g 均為可微函數，且 g'(x) 在 a 附近不為 0 。假設若

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

或者

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

則

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

其中若右式的極限存在，則保證左式的極限存在。

# 羅必達法則

**注意事項：**

(1) 羅必達法則只有運用在不定型式的極限，確認滿足條件非常重要，而且只有在導數的比值極限存在的情況下，才能保證原極限存在且其值相同。

(2) 羅必達法則也適用於單邊極限跟趨近正負無窮大值的極限，但也僅限於不定型式。

(3) 導函數並不一定是連續的，因此

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ 與 } \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

是兩回事，即使右式存在，左式極限也不一定存在。

# 羅必達法則

對於 0/0 不定型式極限，羅必達法則的證明比較簡單。
考慮 f, g 在 a 附近為連續可微，其值 $f(a) = g(a) = 0$ 且 $g'(a) \neq 0$ 。由導數的定義可知

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \lim_{x \to a} \frac{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

# 範例一

求 $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}.$

解:

檢查條件

$\lim_{x \to 1} \ln x = \ln 1 = 0$ 以及 $\lim_{x \to 1} (x - 1) = 0$

# 範例一 / 解

cont'd

知道極限為 0/0 不定型，利用羅必達法則：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{d}{dx}(\ln x)}{\dfrac{d}{dx}(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1}$$

注意到：後式的極限存在，才能保證原極限存在。

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x}$$

$$=1$$

# 其他不定形式極限

# 不定形式乘積的極限

假設若

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad 及 \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty \quad (或 -\infty)$$

此時 $\lim_{x\to a} [f(x)\, g(x)]$ 的值也無法確定。

想像上，若 f 收斂到 0 的速度較快，則極限值為 0 ，而若 g 增長的速度較快，則極限值似乎傾向於 $\infty$ 或者 $-\infty$

但是也有可能收斂到非是 0 或者無窮大值。

這樣形式的極限，我們稱為 **0**$\cdot\ \infty$ 的不定形式極限。

# 不定形式乘積的極限

我們可以把乘積 *fg* 改寫成分數形式：

$$fg = \frac{f}{1/g} \qquad\qquad fg = \frac{g}{1/f}$$

於是極限的形式便轉換成原先我們知道的 $\frac{0}{0}$ 或 ∞/ ∞ 的形式，此時我們便可以使用羅必達法則。

# 範例六

計算 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

解:

當 $x \to 0^+$ 時，顯然 $x$ 趨近 0 而 ln(x) 趨近 $-\infty$ ，但我們可以將 x 改寫成 1/ (1/x) ，則此時

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (-x)$$

$$= 0$$

# 不定形式乘積的極限

**備註:**
雖然我們也可以將範例六的極限寫成 0/0 的形式

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

但在這個例子當中，若我們使用羅必達法則，只會讓原本的極限變得更複雜：分母的微分得到 $-1/x(\ln(x))^2$ 的次數只會增加更多。

一般來說，我們並不一定知道轉換成什麼形式會比較好，只能多加以觀察、嘗試。

不定形式差的極限

# 不定形式差的極限

給定 $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ ， $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$，考慮這個極限

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)]$$

同樣，我們也無法預先知道這個極限值會是什麼情況，這種類型的極限稱為 $\infty - \infty$ 不定形式的極限。

為了比較 f 跟 g 函數增長的速度到底是誰比較快，很多情況我們會利用分子有理化、通分、提出公因式等等技巧，將原先的極限轉化成 $\frac{0}{0}$ 或者 $\infty / \infty$ 不定形式的極限。

# 範例七

計算 $\displaystyle\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x)$.

解:

注意到極限中的函數 $\sec x \to \infty$，且 $\tan x \to \infty$，因此這是一個無窮大相減的不定形式極限。

這裡我們將三角函數換成正餘弦，提出公因式：再來就可以使用羅必達法則了

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-}(\sec x - \tan x) = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

## 不定形式的指數極限

# 不定形式指數的極限

指數型式的不定極限有以下幾種：

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$ 稱為 $0^0$ 不定形

2. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a} g(x) = 0$ 稱為 $\infty^0$ 不定形

3. $\lim_{x \to a} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ 稱為 $1^\infty$ 不定形

# 不定形式指數的極限

不管是哪一種，如果遇到指數型的極限，我們可以考慮取自然對數：

令 $y = [f(x)]^{g(x)}$ ，則 $\ln y = g(x) \ln f(x)$

或者將原函數寫在指數上：

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

此時這三種不定極限，便可以轉換成 $0 \cdot \infty$ 的形式。

# 範例八

計算 $\lim_{x \to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$.

解:

先考慮當 $x \to 0^+$ 時，有 $1 + \sin 4x \to 1$ ，以及 $\cot x \to \infty$

因此這是一個指數不定形的極限。

先令

$$y = (1 + \sin 4x)^{\cot x}$$

我們考慮取對數轉換形式

$$\ln y = \ln[(1 + \sin 4x)^{\cot x}] = \cot x \ln(1 + \sin 4x)$$

# 範例八 / 解



根據羅必達法則，

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1 + \sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{4 \cos 4x}{1 + \sin 4x}}{\sec^2 x} = 4$$

接著我們要從 ln *y* 的值還原 y 的值：

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x \to 0^+} y = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$