4

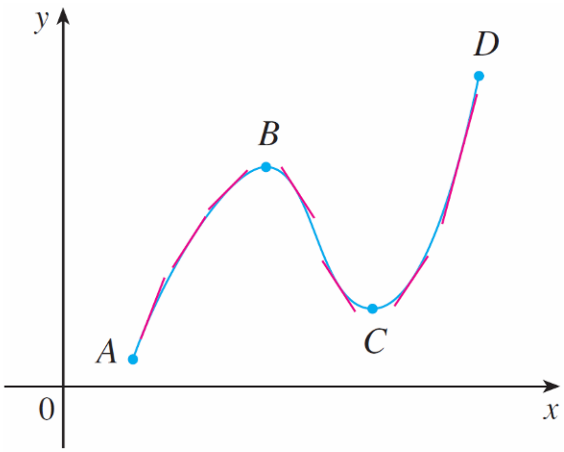
微分的應用

4.3 微分與圖形變化的關係

導數 f’ 對 f 的影響？

導數 f' 對函數 f 圖形的影響

我們可以觀察一個函數大致上的走向：



圖一

可以發現，在 A 到 B 以及 C 到 D 的區段，我們在函數圖形上做切線，其斜率均為正，也就是 $f'(x) > 0$ 。

導數 f' 對函數 f 圖形的影響

而在 B 到 C 之間的區段，其切線斜率均為負，因而有 $f'(x) < 0$ 。

事實上我們有以下這樣的定理：

[定理] 遞增 / 遞減測試

(a) 若在 (a,b) 上 $f'(x) > 0$ ，則 f 在 (a,b) 上為遞增
(b) 若在 (a,b) 上 $f'(x) < 0$ ，則 f 在 (a,b) 上為遞減

這件事情可以從均值定理證明：

$$f(p) - f(q) = f'(r)(p - q),\ r \text{ 在 } (p,q) \text{ 上某一點}$$

此時 $f(p) - f(q)$ 的符號跟 $f'(r)$ 相同。

範例一

判斷函數 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ 分別在哪些地方遞增與遞減。

解:

先微分 $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$ 。

因式分解後， f’(x) 的正負號由這三項 12x, x – 2, x + 1 來決定，於是我們考慮以下不同區間：

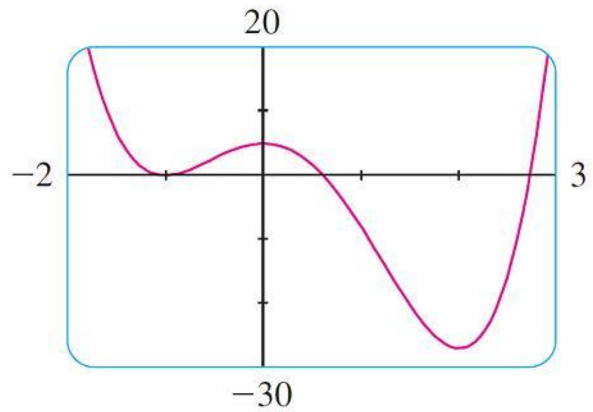
區間	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	在 (-∞,-1) 上遞減
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	在 (-1,0) 上遞增
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	在 (0,2) 上遞減
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	在 (2,∞) 上遞增

範例一 / 解

cont'd

區間	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x<-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	在 (-∞,-1) 上遞減
$-1<x<0$	$-$	$-$	$+$	$+$	在 (-1,0) 上遞增
$0<x<2$	$+$	$-$	$+$	$-$	在 (0,2) 上遞減
$x>2$	$+$	$+$	$+$	$+$	在 (2,∞) 上遞增

可與實際圖形比較：



導數 f’ 對函數 f 圖形的影響

從圖二中可以觀察出 f(0) = 5 是一個局部極大值，同時 f 的值在 (-1,0) 為遞增，在 (0,2) 為遞減。

換句話說，其實我們會發現：當 f’(x) 從正號變為負號的同時，也就是最大值發生的地方。於是我們有下面的推論：

[一次導數檢驗法]

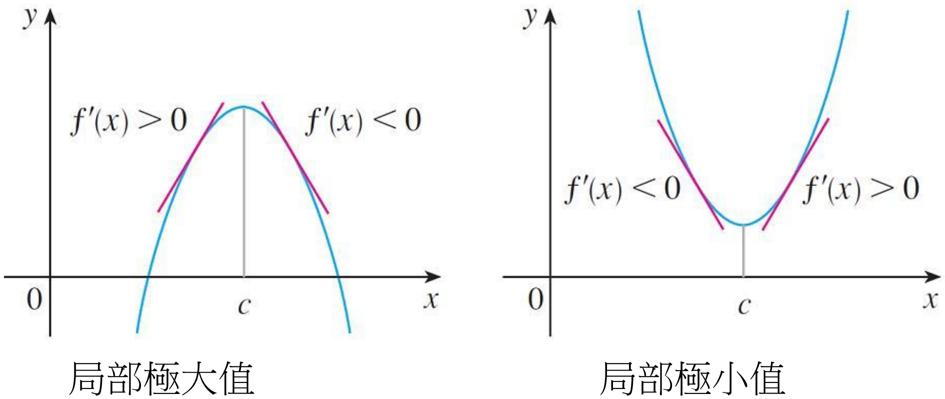
假設 c 為 f 的臨界點。

(a) 若 f’ 在 c 附近左側為正，右側為負，則 f 在 c 有局部極大值。
(b) 若 f’ 在 c 附近左側為負，右側為正，則 f 在 c 有局部極小值。
(c) 若 f’ 在 c 附近並未變號，則 f 在 c 並非極大或極小值。

導數 f‘ 對函數 f 圖形的影響

一次導數檢驗極值是函數「遞增/遞減測試」的一個結果。

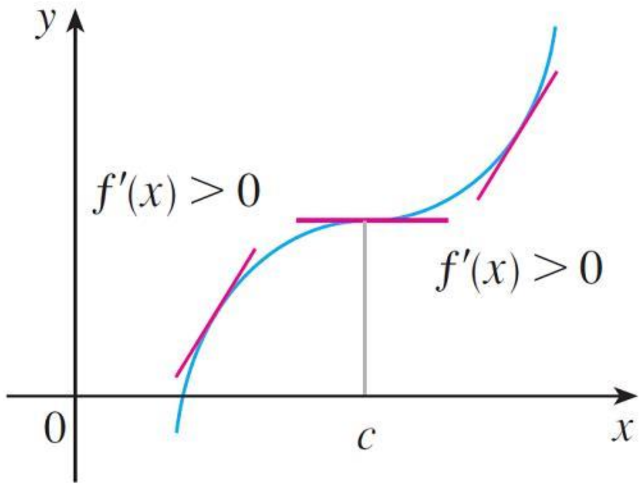
我們可以用下面的圖來幫助記憶一次導數檢驗：



圖三(a) **圖三(b)**

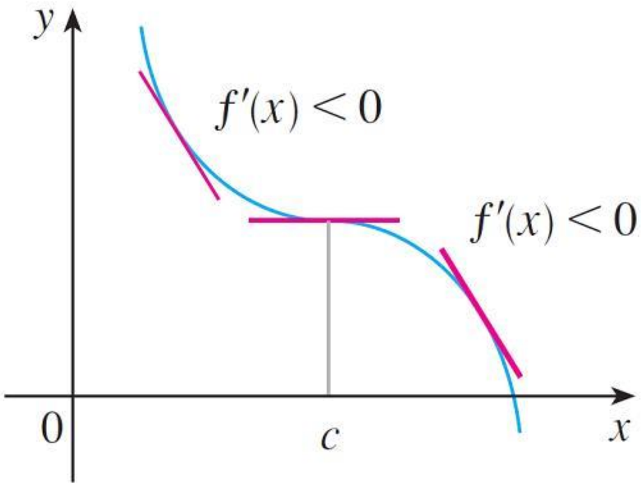
導數 f' 對函數 f 圖形的影響

以下是沒有極值發生的情況：



無極值

圖三(c)



無極值

圖三(d)

範例三

求以下函數在範圍內的極大與極小值

$$g(x) = x + 2\sin x \qquad 0 \le x \le 2\pi$$

解:

先尋找 g 的臨界點，微分可得

$$g'(x) = 1 + 2\cos x$$

計算 $g'(x) = 0$ 的點，即 $\cos(x) = -1/2$ 之時，在區間上滿足的點為 $2\pi/3$ 以及 $4\pi/3$ 。

範例三 / 解

cont'd

討論 g' 的正負，於是可以得到在下列區間遞增遞減的情況：

區間	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	g
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	在 (0,2π/3) 上遞增
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	在 (2π/3, 4π/3) 上遞減
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	在 (4π/3,2 π) 上遞增

於是可得

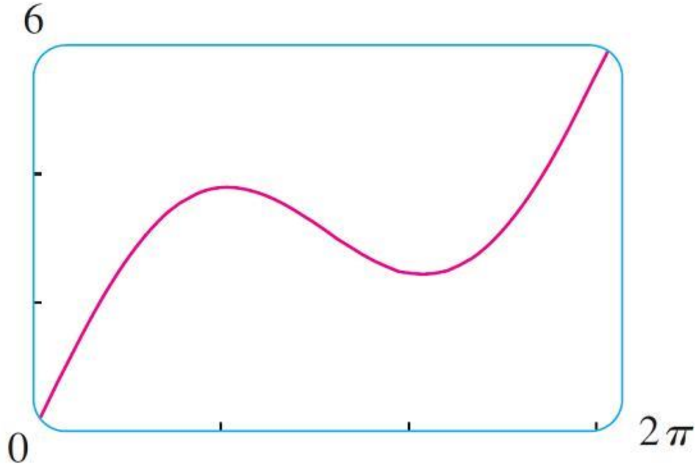
$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2\sin\frac{2\pi}{3} \approx 3.83$$ 為局部極大值

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\frac{4\pi}{3} \approx 2.46$$ 為局部極小值

範例三 / 解

cont'd

下圖為 g(x) 的實際圖形，同時可以驗正剛剛的計算：



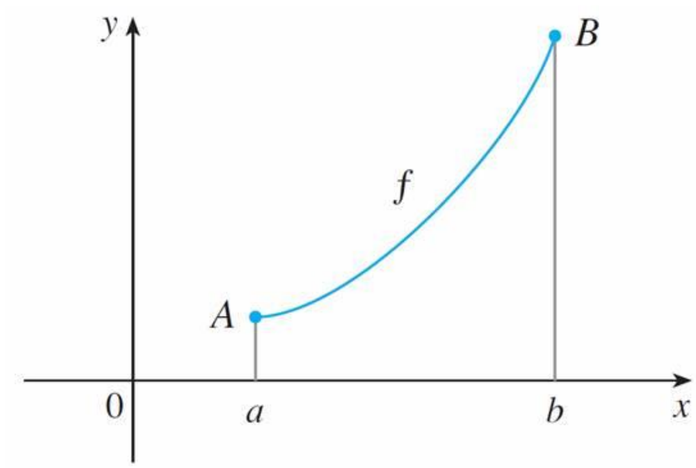
$g(x) = x + 2 \sin x$

圖四

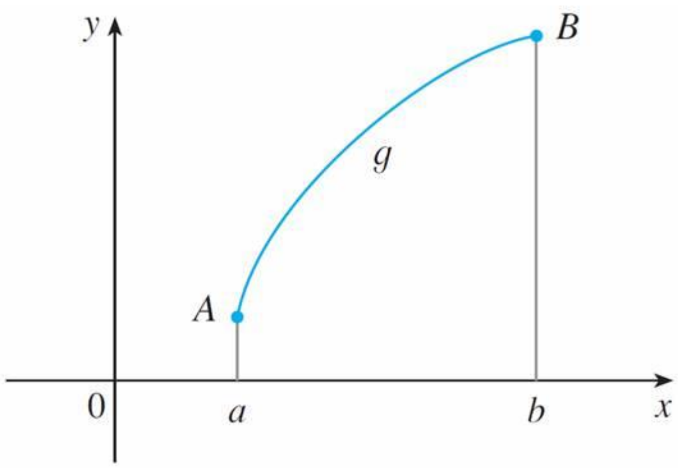
二次導數 f‘’ 對函數 f 的影響

二次導數 f'' 對函數 f 的影響

下圖五表示了定義在 (a,b) 上兩種不同的遞增函數，同樣連結 A, B 兩點。



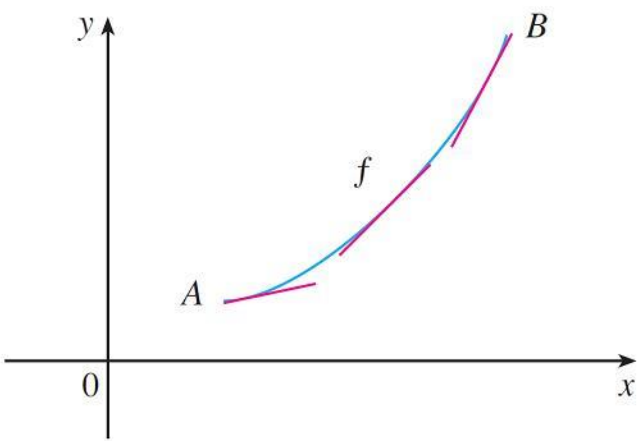
圖五(a)



圖五(b)

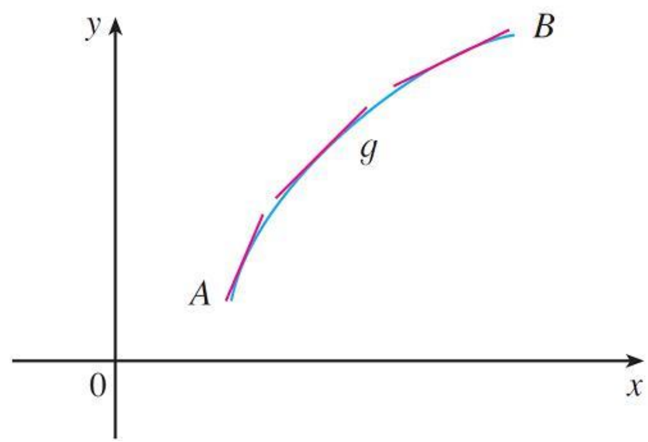
二次導數 f'' 對函數 f 的影響

下圖六劃出了前面兩個曲線上的幾條切線。可以觀察到：
左圖，向上彎曲，函數圖形的切線都在圖形的下方；
右圖，向下彎曲，函數圖形的切線都在圖形的上方。



凹口向上

圖六(a)



凹口向下

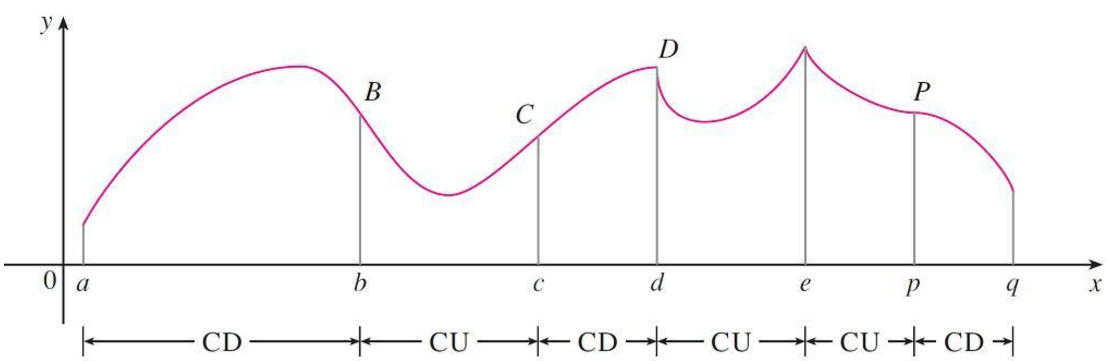
圖六(b)

二次導數 f’’ 對函數 f 的影響

我們做以下的定義：

[定義] 在區間 [a,b] 上，
(1)若 f 的圖形均在切線上方，則稱 f 在 [a,b] 上凹口向上 (concave upward)。
(2)若 f 的圖形在 f 的切線下方，稱 f 在 [a,b] 上凹口向下 (concave down)。

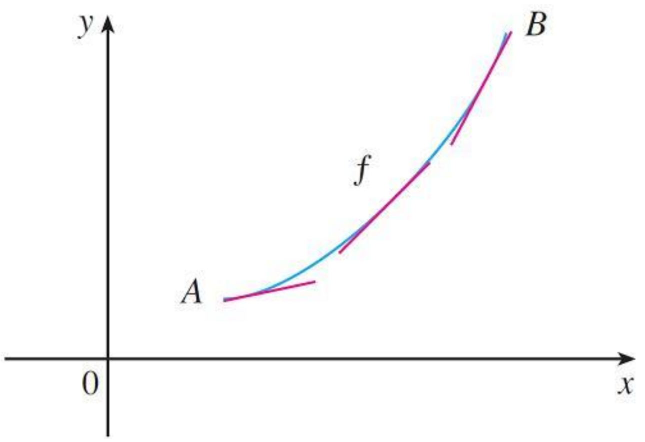
下圖的 CD 表示凹口向下 concave down 的區段， CU 表示凹口向上 concave upward 的區段。



圖七

二次導數 f‘’ 對函數 f 的影響

在凹口向上的圖形中，我們會發現切線的斜率也逐漸遞增。
在此例中，我們發現 f’ 也是遞增。
若 f’ 可微，則 f’’ 為正 (非負)。



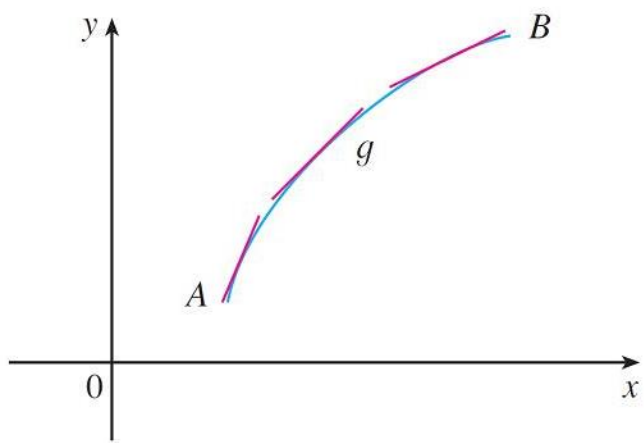
凹口向上的圖形

圖六(a)

二次導數 f'' 對函數 f 的影響

同樣，在下圖這個例子中，切線斜率遞減。

因此 f' 為遞減。若 f' 可微，則 f'' 為負 (非正)。



凹口向下

圖六(b)

二次導數 f‘’ 對函數 f 的影響

我們有以下的凹向檢驗法 (concavity test)：

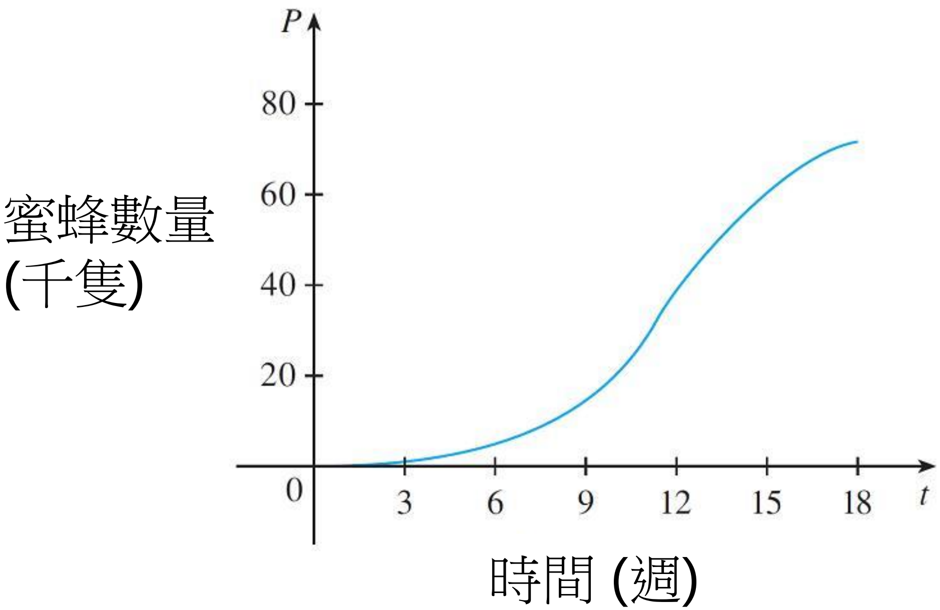
[函數凹向檢驗法]

(1)若在區間 [a,b] 上， $f''(x) > 0$ ，則在 [a,b] 上 f 為凹口向上。
(2)若在區間 [a,b] 上， $f''(x) < 0$ ，則在 [a,b] 上 f 為凹口向下。

範例四

下圖八是一個地區內養蜂房中的蜜蜂數量族群數。

試觀察： (a) 族群變化率的增減，以及 (b) 何時有最高的變化率。試求 (c) 在哪些區間上族群數量的圖形凹口為向上及向下。



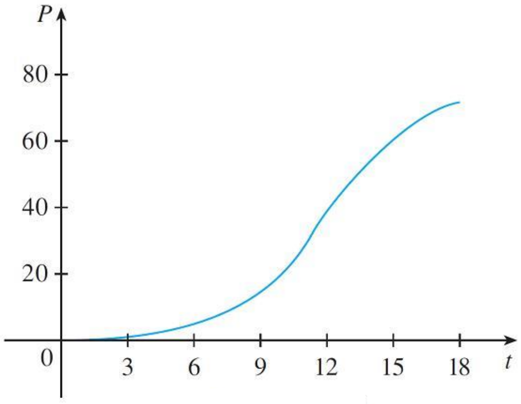
圖八

範例四 / 解

觀察當 t 增加時曲線斜率的變化，可以知道：一開始增加的速率較為緩慢，爾後斜率漸漸增強。至第十二週時，達到最大的速率。而在此後增加速率便逐漸遞減。

最後當族群數量大概到 75000 左右時，速率漸漸減少至 0 。

在第十二週是一個臨界點，十二週前圖形為凹口向上，之後則為凹口向下。



二次導數 f’’ 對函數 f 的影響

我們可以針對前述範例中，第十二週這個轉變，定義凹口轉向的臨界點：

[定義] 函數圖形 $y = f(x)$ 上一點 P 被稱為反曲點 (inflection point) ，表示 f 在 P 點附近為連續，且 f 的函數圖形在此點前後有凹口轉向的變化。

另外，回顧前面的極值判別法：如果可以保證凹口沒有變化，則處在凹口向上區段的臨界點，為極小值；凹口向下區段的臨界點，為極大值。

[二次導數判別法] 若 f'' 在 c 附近連續，則
(1)若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) > 0$ ，則 f 在 c 有局部極小值。
(2)若 $f'(c) = 0$ 且 $f''(c) < 0$ ，則 f 在 c 有局部極大值。

範例六

討論曲線 $y = x^4 - 4x^3$ 的趨勢，凹向，以及局部的極大、極小值，並利用此資訊刻劃出此函數圖形。

解:

考慮函數 $f(x) = x^4 - 4x^3$ ，計算微分：

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$$

其導數為 0 的臨界點為 x = 0 以及 x = 3 ，當 x > 3 時函數為遞增，當 x < 3 時函數為遞減。

範例六 / 解

cont'd

我們利用二次導數判別法，代入 $x = 0$ 及 $x = 3$ ：

$$f''(0) = 0 \qquad\qquad f''(3) = 36 > 0$$

於是 $f'(3) = 0$ 且 $f''(3) > 0$ ，可以推得 $f(3) = -27$ 是一個局部極小值。

但另一方面 $f''(0) = 0$ ，二次導數判別沒有辦法使用。（可能是極大值、極小值或者都不是）。

範例六 / 解

cont'd

但由一次導數檢定， f 只在 $x = 3$ 前後斜率有變號，而在 $x = 0$ 前後斜率均為負數，因此可知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 並非極大值或極小值。

另一方面，可能的反曲點： $f''(x) = 0$ 在 $x = 0$ 或 $x = 2$ 時，我們可以判斷在這些點之間的符號：

區間	$f''(x) = 12x(x-2)$	凹向
$(-\infty, 0)$	$+$	凹向上
$(0, 2)$	$-$	凹向下
$(2, \infty)$	$+$	凹向上

範例六 / 解

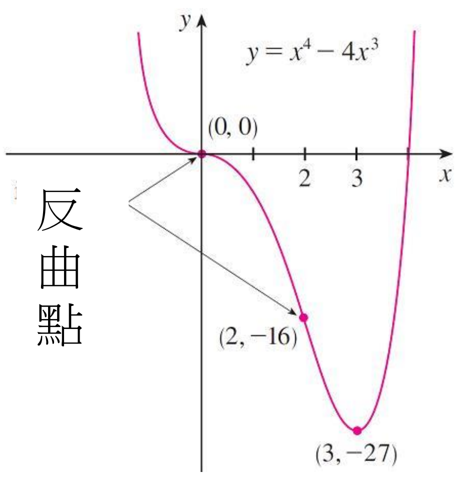
cont’d

由上表可以知道，在 x = 0 與 x = 2 都有凹向的改變。

於是圖形上點 (0, 0) 是反曲點，函數圖形在這點從凹向上轉變為凹向下。

而 (2, –16) 也是反曲點，函數圖形在此點從凹向下轉變成凹向上。

在與 x = 3 處為局部極小值一起考慮，我們可以大概描繪出右圖的函數圖形。



圖十一

二次導數 f’’ 對函數 f 的影響

備註：

(1) 再次提醒二次導數判別法不能用在 f’’(c) = 0 的地方，這裡可能出現極大或極小或者反曲點。

(2) 有些一次導數的臨界點上，二次導數可能不存在，於是如果要判別極值，還是只能從切線斜率的變化來判斷。有些情況甚至計算二次導數比較困難，使用一次導數判別較為簡單。

範例七

描繪出函數 $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$ 的圖形。

解:

首先計算出此函數的一次導數與二次導數：

$$f'(x) = \frac{4 - x}{x^{1/3}(6 - x)^{2/3}} \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6 - x)^{5/3}}$$

判別一次導數的臨界點：$f'(x) = 0$ 的點有 $x = 4$ ，而 $f'(x)$ 不存在的點有 $x = 0$ 以及 $x = 6$ 。

區間	$4 - x$	$x^{1/3}$	$(6 - x)^{2/3}$	$f'(x)$	f
$x < 0$	$+$	$-$	$+$	$-$	在 $(-\infty,0)$ 為遞減
$0 < x < 4$	$+$	$+$	$+$	$+$	在 $(0,4)$ 為遞增
$4 < x < 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	在 $(4,6)$ 為遞減
$x > 6$	$-$	$+$	$+$	$-$	在 $(6,\infty)$ 為遞減

範例七 / 解

cont'd

從上圖表我們可以看出，一次導數在 $x = 0$, $x = 4$ 有變號。

在 $x = 0$ 時由負轉正，因此 $f(0) = 0$ 是局部極小值。

在 $x= 4$ 時由正轉負，因此 $f(4) = 2^{5/3}$ 是局部極大值。

但在 $x = 6$ 附近的一次導數沒有符號的改變，因此 $f(6)$ 並非極大或極小。

範例七 / 解

觀察二次導數的表示式，注意到 $x^{4/3} \geq 0$ 其實是恆正，因此決定正負號的項跟 $(6 - x)$ 有關，因此當 $x < 0$ 時， $f''(x) < 0$ ；而當 $x > 6$ 時， $f''(x) > 0$ 。

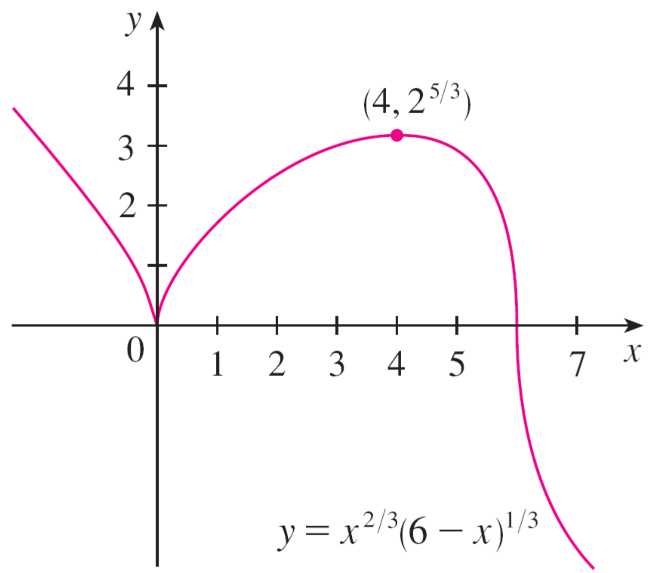
因此 $f(x)$ 在區間 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, 6)$ 為凹口向下，而在區間 $(6, \infty)$ ，為凹口向下。

實際有改變凹向的反曲點在 $x = 6$ ，為 $(6, 0)$ 。

範例七 / 解

cont'd

大致上的圖形繪製如下：



圖十二

注意到在點 (0,0) 與 (6,0) 時，一次導數並不存在，其切線實際上是鉛質切線。