

# 4

## 微分的應用



## 4.1

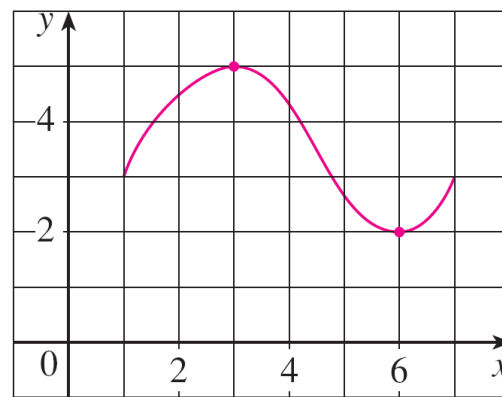
# 最大值與最小值

# 最大值與最小值

微分最大的應用在於極值問題(optimization problems)。如果我們可以將問題參數化，接著就是詢問怎麼要找尋這些參數的函數最大值或者最小值。

函數最大值或最小值最直觀的找法便是觀察函數圖形。例如下圖一是一個函數的圖形。

從圖上可以觀察，最大值發生在  $x=3$  此時  $f(3) = 5$ 。同樣的，最小值為  $f(6) = 2$ 。



圖一

# 最大值與最小值

我們稱  $f(3) = 5$  是  $f$  的最大值 (*absolute maximum*)， $f(6) = 2$  為  $f$  的最小值 (*absolute minimum*)，定義如下

[定義] 假設  $c$  為  $f$  定義域  $D$  中的一點。我們定義

- \*  $f(c)$  為最大值，表示對任意  $D$  中的  $x$ ，有  $f(c) \geq f(x)$ 。
- \*  $f(c)$  為最小值，表示對任意  $D$  中的  $x$ ，有  $f(c) \leq f(x)$ 。

一般來說，最大值跟最小值，我們會特別稱為全域上的最大值 (*global maximum*) 跟全域上的最小值 (*global minimum*)。

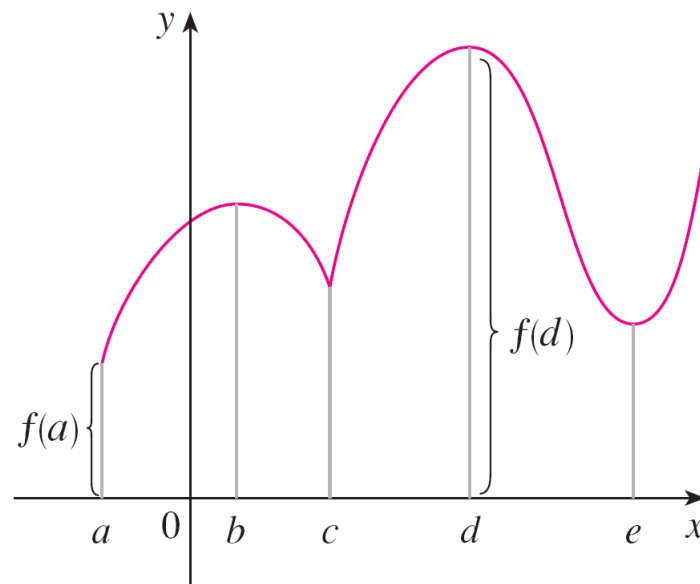
與之相比，若有一些在小區域上的最大值或最小值，但不一定是整個定義域上的最值，則我們稱為極值 (*extreme value*)

# 最大值與最小值

下圖二的函數圖形，顯示了  $f$  在  $a$  有最小值，在  $d$  有最大值。

但同時若我們只考慮  $b$  附近的小區域，可以看到  $f(b)$  是在  $b$  附近的最大值。為了區分，我們把  $f(b)$  稱為  $f$  的局部最大值 / 極大值 (local maximum)。同樣  $f(c)$  也是局部的最小值 / 極小值 (local minimum)

注意到全域的最大值一定是局部的最大值，但反過來並不一定。



Abs min  $f(a)$ , abs max  $f(d)$   
loc min  $f(c), f(e)$ , loc max  $f(b), f(d)$

圖二

# 最大值與最小值

一般來說我們定義如下：

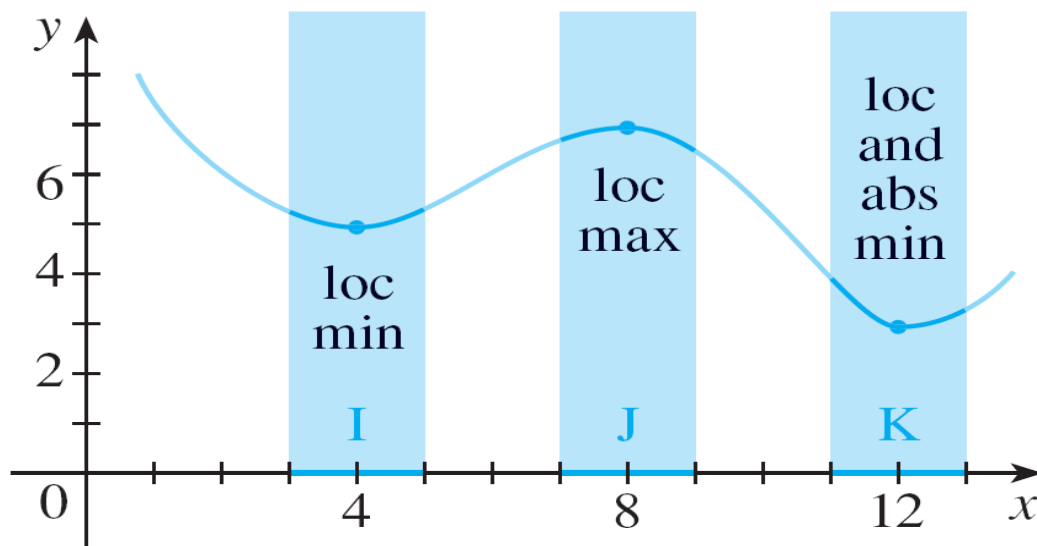
[定義] 給定函數  $f$ ， $c$  為定義域中一點

- \*  $f(c)$  為(局部)極大值，表示  $f(c) \geq f(x)$ ，對任意在  $c$  附近的  $x$
- \*  $f(c)$  為(局部)極小值，表示  $f(c) \leq f(x)$ ，對任意在  $c$  附近的  $x$

在這個定義中，我們說「對任意在  $c$  附近的  $x$ 」是指，對某個包含  $c$  的開區間  $(p,q)$  上的任意點  $x$ 。

# 最大值與最小值

舉例說明，下圖三我們可以看出  $f(4) = 5$  是一個局部極小值，由於  $f(4)$  是在 4 附近的區間上  $I = (3, 5)$  的最小值。



圖三

但  $f(4)$  不是全域的最小值，因為  $f(12) = 3$  的值更小。  
而  $f(12)$  同時是全域的最小值，也是局部的最小值。

# 範例一

試求  $f(x) = \cos x$  的最大與最小值。

解：

函數  $f(x) = \cos x$  有無窮多個點會碰到最大值  $1$ ，因為對任一整數  $n$ ， $\cos 2n\pi = 1$ ，而且  $-1 \leq \cos x \leq 1$ 。

同樣的到李  $\cos(2n + 1)\pi = -1$  是最小值，對任意整數  $n$ 。

# 最大值與最小值

下面這個定理保證函數一定可以取到極值。

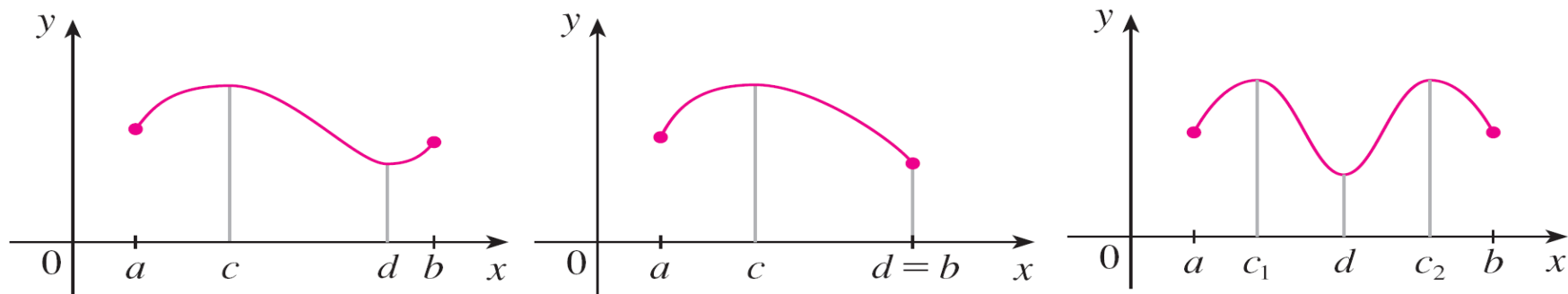
[極值定理]

若  $f$  為閉區間  $[a,b]$  上的連續函數，則  $f$  存在最大值以及最小值，即：

存在  $c, d$  使得  $f(c)$  為最大值， $f(d)$  為最小值。

# 最大值與最小值

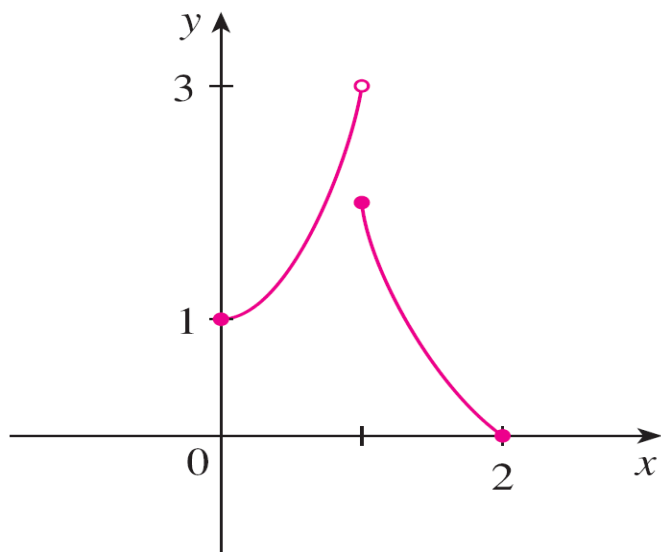
要求函數連續是必要的條件。注意到最大、最小值可能不只一個。



圖七

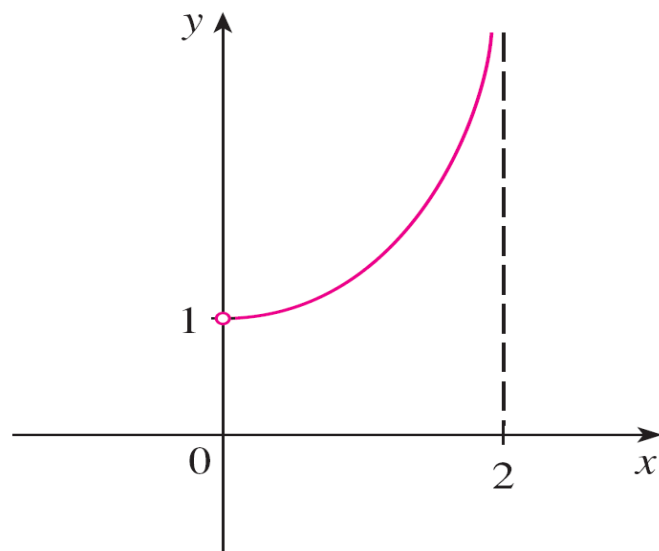
# 最大值與最小值

以下分別是函數不連續，以及定義域不是閉區間，因此可能不存在最大、最小值的情況。



$f(2)$  是最小值，但沒有最大值。

圖八



$g(x)$  在靠近 2 的時候趨近無窮大，沒有最大值。

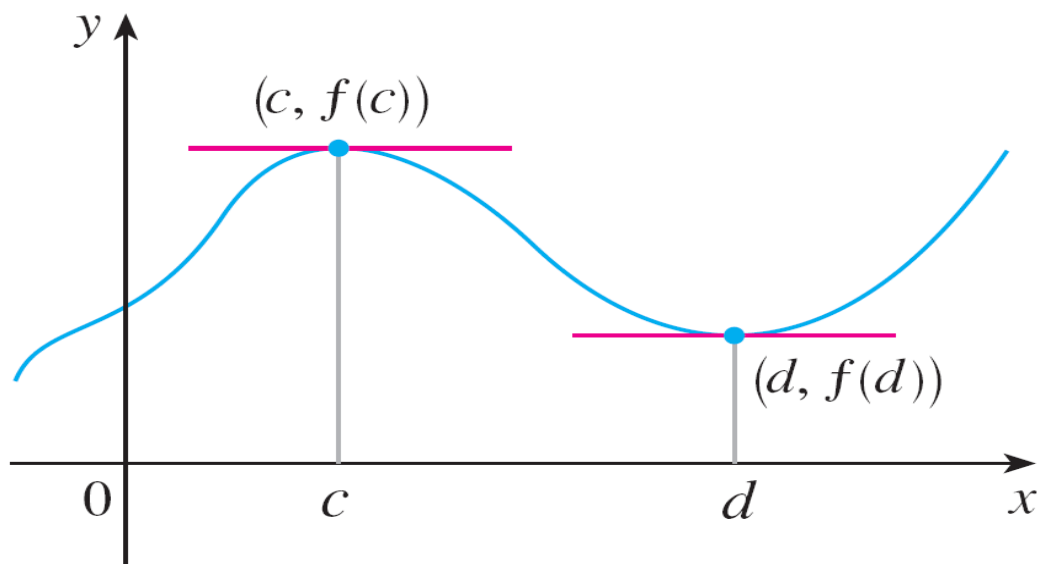
圖九

# 最大值與最小值

極值定理雖然保證連續函數在閉區間上一定會有極值，但這並未說明函數在哪裡取得極值。

右圖十，標出了函數在  $c$  有極大值，在  $d$  有極小值。

可以觀察到，在極值點上的切線，似乎都是水平線。



圖十

# 最大值與最小值

下面這個定理說明剛剛觀察到的這個事實

[費馬定理]

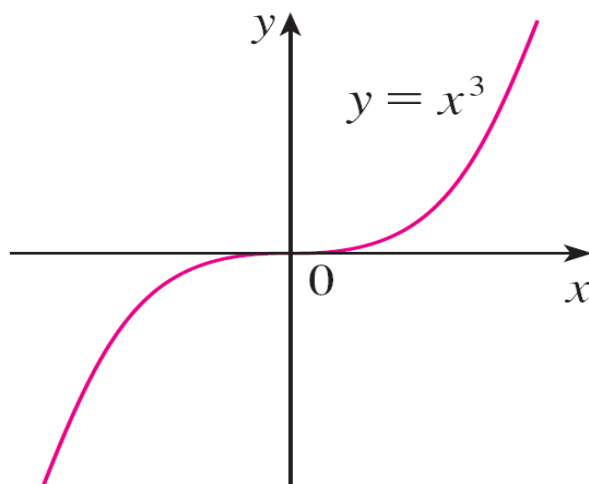
若  $f(x)$  在  $c$  有 (局部) 極大值或極小值，且  $f'(c)$  存在，則  $f'(c) = 0$ 。

## 範例五

但反過來並不一定是這麼回事，考慮這個例子：

$$f(x) = x^3 \text{ 則 } f'(x) = 3x^2, \text{ 因此 } f'(0) = 0。$$

但從圖中顯示， $f(x)$  並沒有局部的極值。

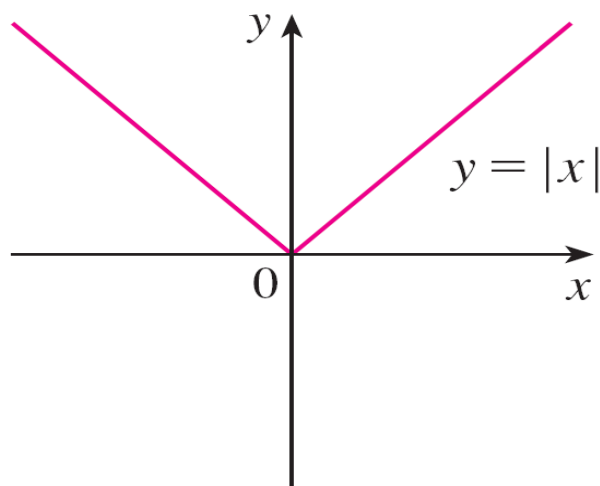


圖十一

# 範例六

另一個例子是絕對值函數  $f(x) = |x|$ ，如下圖。

雖然可以看出來在  $x = 0$  時有最小值，但  $f(x)$  在  $x = 0$  並不可微，在該點也沒有切線。



圖十二

# 最大值與最小值

前述的範例五正好說明了費馬(Fermat)定理的逆敘述不成立，以及範例六說明了  $f$  在極值點可微分的必要性，也提供了其實極值點就算存在也不一定可微的例子。

所以接下來我們反過來利用費馬定理，以及範例六這個極值點微分也不一定存在的這個想法，反過來推斷可能有極值的極值點。

# 最大值與最小值

我們利用這個想法定義所謂的臨界點 (critical point) 。

[定義]

$f$  的定義域中一點  $c$  被稱為  $f$  的臨界點，表示  $f'(c) = 0$  或者  $f'(c)$  不存在。

利用臨界點這個定義我們改寫費馬定理：

[定理]

若  $f$  在  $c$  有局部極大或極小值，則  $c$  為  $f$  的一臨界點。

# 最大值與最小值

由於極值定理保證了連續函數在閉區間上一定有最大或最小值的存在，根據費馬定理，這些點若不是臨界點（包含不可微分的點），那就是閉區間的端點。於是我們可以寫下挑選極值點的流程如下：

1. 考慮在  $(a,b)$  上  $f$  的臨界點，即:  $f$  可微分，其導數為  $0$  的點以及不可微分的點。
2. 考慮  $f$  在端點  $a, b$  的值。
3. 整理出前面兩個步驟的點，計算  $f$  分別在這些點的值。最後，值最大者便是  $f$  的全域最大值，而值最小者便是全域最小值。