3

微分

3.11 雙曲函數

雙曲函數

指數增長與遞減的函數在應用上很常出現

$$e^x,\ e^{-x}$$

而它們組合出的新函數，意外地類似我們所認識的三角函數關係，三角函數的組合 $a \sin \theta$, $b \cos \theta$ 可以與橢圓上的點做對應，新的函數也有這樣的關係。

雙曲函數

相對應的，由於這些函數可以跟雙曲線上的點做對應，所以稱為雙曲函數，其中主要的奇組合稱為 hyperbolic sine 雙曲正弦函數，偶組合稱為 hyperbolic cosine 雙曲餘弦函數。其於類似的定義如下：

雙曲函數的定義

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

雙曲函數

雙曲函數有非常多類似於三角函數的恆等式，在這裡羅列如下，證明就當作各位的練習。

雙曲函數的恆等式

$$\sinh(-x) = -\sinh x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

範例一

證明 (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ and

(b) $1 - \tanh^2 x = \text{sech}^2 x$.

解:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

$$= \frac{4}{4}$$

$$= 1$$

範例一 / 解

(b) 從前面 (a) 得到的恆等式出發:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

同除以 $\cosh^2 x$ ，有

$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

也就是

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

雙曲函數

雙曲函數的導數很容易從指數函數的微分求得：

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$= \cosh x$$

雙曲函數

其他的微分公式我們列表如下：

雙曲函數的導數

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

範例二

利用連鎖率我們可以處理跟雙曲函數相關的合成函數，下為一例：

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh\sqrt{x}\right) = \sinh\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \frac{\sinh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

反雙曲函數

反雙曲函數

雙曲函數 sinh(x), tanh(x) 為一對一函數，也因此可以定義反函數 $\sinh^{-1}$ 與 $\tanh^{-1}$ 。而 cosh 雖然不是一對一，但若只看 $[0, \infty)$ 上，也會是一對一函數。

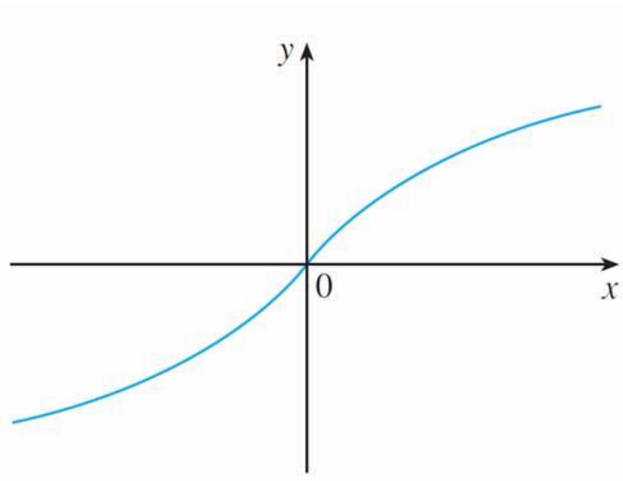
$$y = \sinh^{-1} x \iff \sinh y = x$$

$$y = \cosh^{-1} x \iff \cosh y = x \quad \text{and} \quad y \geqslant 0$$

$$y = \tanh^{-1} x \iff \tanh y = x$$

反雙曲函數

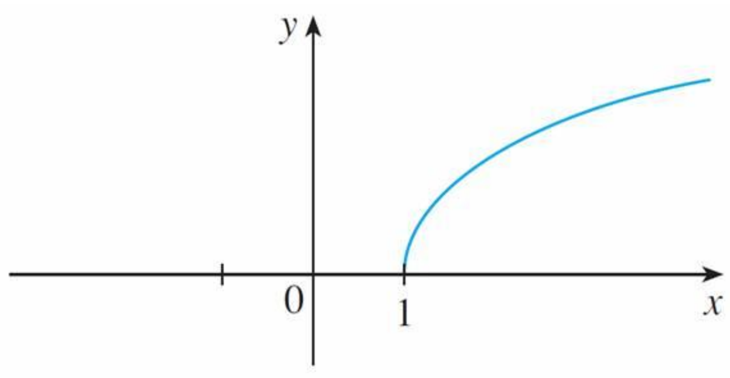
反雙曲函數 $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ 以及 $\tanh^{-1}$ 的圖形如下所示



$y = \sinh^{-1} x$

定義域 = $\mathbb{R}$ 值域 = $\mathbb{R}$

圖八

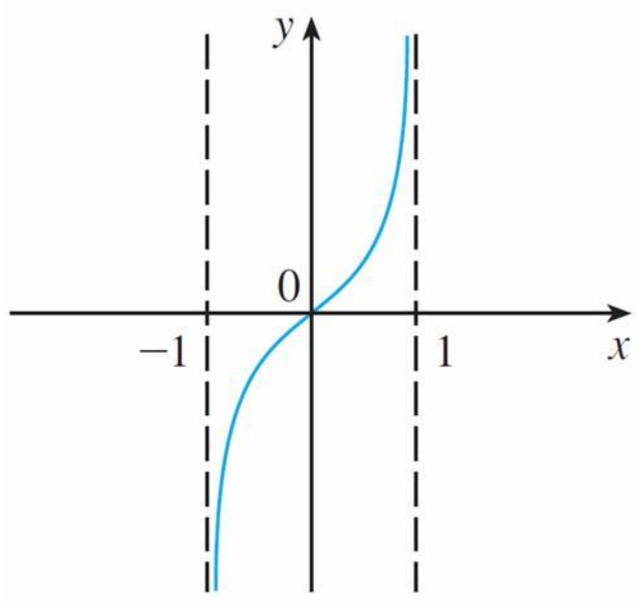


$y = \cosh^{-1} x$

定義域 = $[1, \infty)$ 值域 = $[0, \infty)$

圖九

反雙曲函數



$y = \tanh^{-1} x$

定義域 = (–1, 1)　　值域 = $\mathbb{R}$

圖十

反雙曲函數

由於雙曲函數是由指數函數所定義出來的，因此反雙曲函數也非常恰巧可以從對數函數來表示：

$$\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \qquad x \geqslant 1$$

$$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

推導的方法，我們舉其中一個例子計算如後。

範例三

證明 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

解:

令 $y = \sinh^{-1}x$ 。有

$$x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

因此 $e^y - 2x - e^{-y} = 0$

通乘以 e^y 可得

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

範例三 / 解

這是一個 e^y 的二次方程式，

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

代入二次方程式公式解，可得

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2}$$

$$= x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

注意到 $e^y > 0$ ，而 $x < (x^2+1)^{1/2}$ ，因此取負號為負。

範例三 / 解

cont'd

符號取正，最後有

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

因此

$$y = \ln(e^y)$$

$$= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

反雙曲函數

反雙曲函數的導數

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

利用對數函數的微分，我們也就容易推導反雙曲函數的導數。

但另一方面，我們也可以利用連鎖率跟隱函數微分來求反函數微分。

範例四

證明 $\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

解:

令 $y = \sinh^{-1}x$。則 $\sinh y(x) = x$。

我們對等式兩邊同時取對 x 的導數：

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

範例四 / 解

cont’d

根據雙曲函數的關係 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ ，以及 $\cosh y \geq 0$ ，可知 $\cosh(y) = \sqrt{1 + \sinh^2 y}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$