3

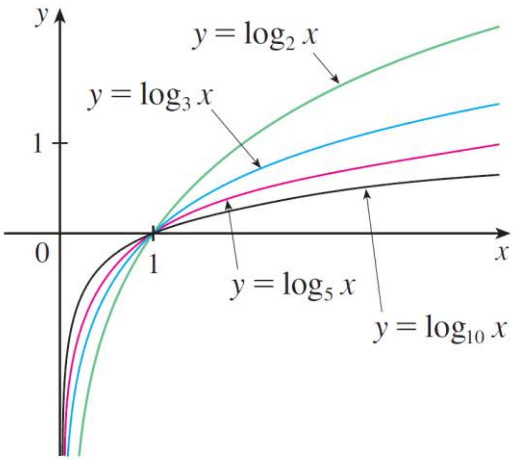
更多的微分公式

3.6 對數函數的導數

對數函數的導數

我們想用隱函數微分法計算更多函數的導數，其中一個例子便是利用對數函數 $y = \log_a x$ ，尤其是自然對數， $y = \ln x$ 。

當然我們可能要先問：對數函數是否可微分？直觀上，對數函數是指數的反函數，其圖形看起來也滿足每一點都可以做切線逼近。於是在實際證明之前，我們先把對數函數當作可微分的，其微分如後所述。



圖十二

對數函數的導數

1

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

利用連鎖率，我們可以推廣這個公式：

3

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

或

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

範例二

試求 $\dfrac{d}{dx}\ln(\sin x)$.

解:

利用連鎖率，我們有

$$\frac{d}{dx}\ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x}\cos x$$

$$= \cot x$$

對數微分法

對數微分法

如果目標函數是由複雜的項相乘除所組成，此時使用微分乘積公式會多出很多項。這個時候我們便可以考慮利用對數將乘積拆開變成加總。

接下來的這個範例我們稱為對數微分法 (logarithmic differentiation) ，是一個可以簡化計算的技巧。

範例十五

微分 $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

解:

我們對等式兩邊同取對數，將乘積化成加總如下

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

接著對 x 微分，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

範例十五 / 解

cont'd

移項解得 *dy/dx* ，

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

最後帶入 y(x) ，寫成 x 的表示式：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{15}{3x + 2}\right)$$

對數微分法

取對數簡化微分的步驟：

1. 對具有複雜乘積的函數表示式，兩邊同取對數，簡化成各項相加。
2. 對等式做隱函數微分
3. 移項解得 y‘

再一個實際的例子是，對數微分法可以幫助我們處理任意實數指數函數的微分：

冪函數微分　給定 n 為任意實數，且 $f(x) = x^n$ ，則

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

以極限計算自然底數 e

以極限計算 e

考慮對數 $f(x) = \ln x$ ，其微分 $f'(x) = 1/x$ ，因此 $f'(1) = 1$ 。我們想利用這個數值來計算自然底數 e 。

根據導數的定義：

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}$$

以極限計算 e

由於 $f'(1) = 1$ ，最後我們可知極限值為

$$\lim_{x \to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = 1$$

利用指數函數是連續的，可知

$$e = e^1 = e^{\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x \to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

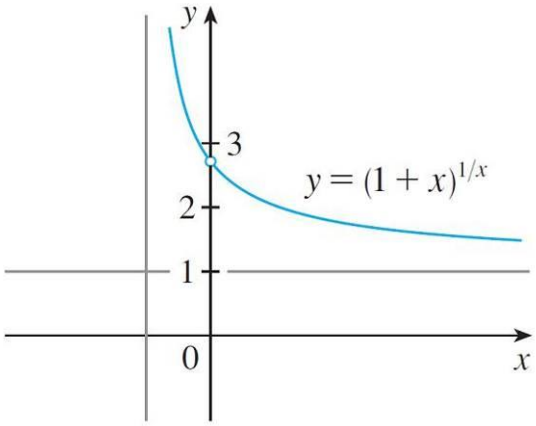
5

$$\boxed{e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}}$$

以極限計算 e

$y = (1 + x)^{1/x}$ 的圖如下，另外我們可利用電腦計算在 x 夠靠近 0 時， y(x) 的數值：

$$e \approx 2.7182818$$



圖四

x	$(1 + x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

以極限計算 e

由於函數的極限存在，因此特別的我們可以挑選 x 逼近 0 的方式是取數列 $x_n = 1/n$ 。

此時我們可以將這個極限寫成離散型的極限如下。

$$\boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$