

3

函數的導數



3.3

三角函數的導數

三角函數的導數

在之前定義三角函數時，我們將函數的定義域擴大到整個實數。例如我們假設

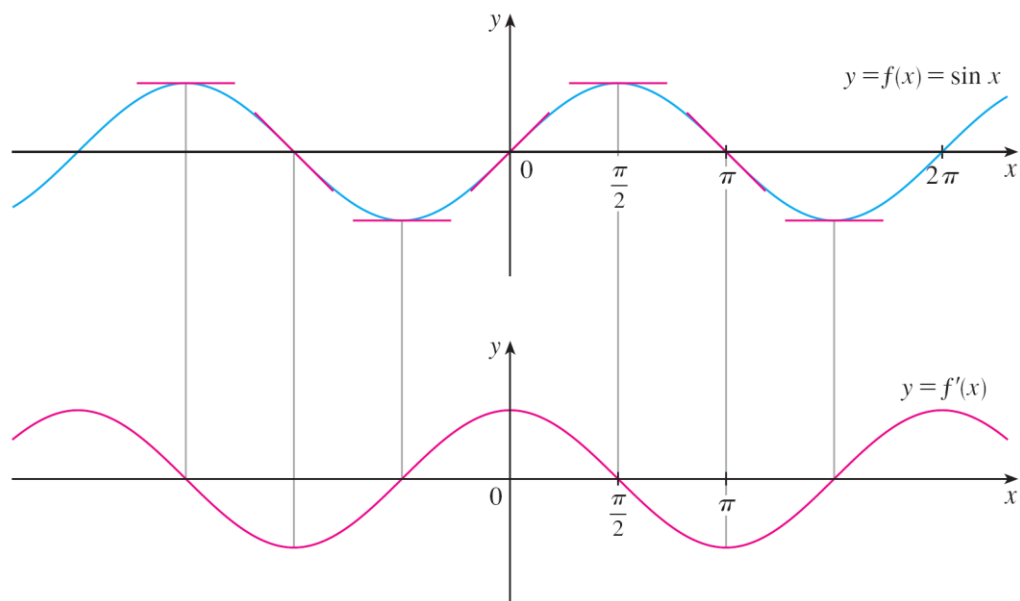
$$f(x) = \sin x$$

此時角度 x 的單位我們是用弧度 (radian) 來度量的。同樣其他的三角函數 $\cos x$, $\tan x$ 等等也是如此。

另外我們前面也證明過，所有的三角函數在其定義域上均為連續。

三角函數的導數

利用電腦繪圖或者描點，我們藉由計算 $f(x) = \sin x$ 各點的切線斜率，可以得到 $f'(x)$ 的大致圖形如下：



圖一

三角函數的導數

看起來 $f'(x)$ 的圖形也會是週期函數，現在讓我們直接來計算這件事情：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x \cos h - \sin x}{h} + \frac{\cos x \sin h}{h} \right] \end{aligned}$$

三角函數的導數

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\sin x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\sin h}{h} \right) \right]$$

$$\boxed{1} \quad = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

以上，我們仍需要驗證每一項各自的極限存在。其中 x 是與 h 獨立的變數，在取 h 的極限過程中視為常數。於是有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin x = \sin x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos x = \cos x$$

三角函數的導數

比較麻煩的是剩下兩個極限。

先看 $\lim_{h \rightarrow 0} (\sin h)/h$ ，這個極限值其實也不是很明顯，但透過代入一些數值計算過後，可以猜：

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

三角函數的導數

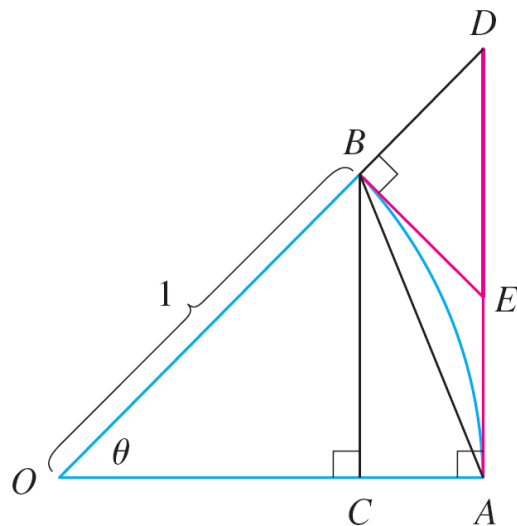
我們利用幾何的方式來推導上述的極限。

不失一般性我們可以先假設 θ 在 0 到 $\pi/2$ 之間。下圖二(a) 為一個以 O 為圓心、半徑為 1 、角度為 θ 的扇形。

做垂線 BC 垂直 OA ，此時其長度

$$|BC| = |OB| \sin \theta = \sin \theta。$$

而 AB 弧長即為弧度 θ



圖二(a)

三角函數的導數

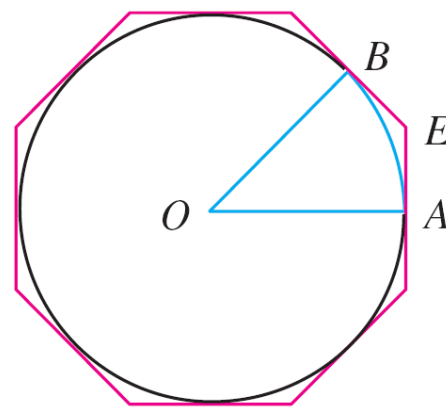
從圖我們可以觀察到以下的關係

$$|BC| < |AB| < \text{AB弧長}$$

因此 $\sin \theta < \theta$ ，從而 $\frac{\sin \theta}{\theta} < 1$

另外我們經過 **A, B** 做圓的切線，如右圖二(b)，可以觀察到以下關係

$$\text{AB弧長} < |AE| + |EB|.$$



圖二(b)

三角函數的導數

將線段長以三角函數表示：

$$\begin{aligned}\theta = \text{AB弧長} &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta\end{aligned}$$

於是

$$\theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

移項可以得到

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

三角函數的導數

我們已知 $\lim_{\theta \rightarrow 0} 1 = 1$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta = 1$, 利用這兩者的夾擠, 可知

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

由於 $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, 於是對於 $\theta < 0$, 將負號提出後可以得到一樣的結果。因此

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

三角函數的導數

另外我們還剩下一個極限，但這個極限可以透過三角函數的運算簡化如下：

$$\begin{aligned}\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)} \\&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\&= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \\&= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0\end{aligned}$$

三角函數的導數

3

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0$$

將前述的極限合併，我們可以得到 $f'(x)$ 如下：

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \\ &= (\sin x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x \end{aligned}$$

三角函數的導數

因此我們得到第一個三角函數的微分公式：

4

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

範例一

試微分 $y = x^2 \sin x$.

解:

利用 $\sin x$ 的微分以及乘法的微分法則

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x^2 \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \frac{d}{dx} (x^2) \\ &= x^2 \cos x + 2x \sin x\end{aligned}$$

三角函數的導數

與 $\sin x$ 的微分一樣，利用合角公式我們可以推得

5

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

再來利用函數分式的微分，我們可以計算 $\tan x$ 的微分：

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)$$

三角函數的導數

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \end{aligned}$$

三角函數的導數

於是有

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x$$

剩下的三角函數 $\sec x$, $\cot x$, $\csc x$ 則可同樣利用分式微分得到結果。

三角函數的導數

經計算過後，我們得到以下這個三角函數的微分公式表：

三角函數的導數

$$\frac{d}{dx} (\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} (\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx} (\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} (\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} (\cot x) = -\csc^2 x$$

三角函數的導數

三角函數是我們在建模時很常使用的函數，例如弦的震動、波的運動等牽涉到某些變量具有週期性時，我們會利用三角函數來描述。

其中一個例子，便是接下來我們要討論的簡諧運動。

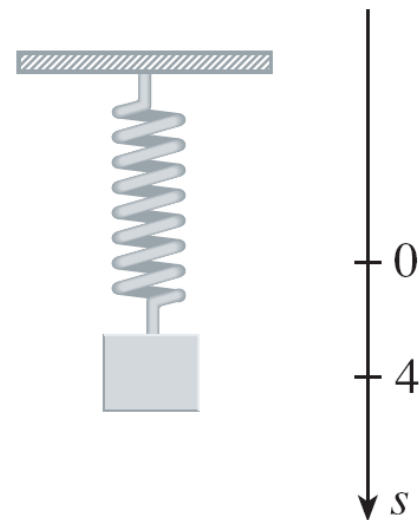
範例三

假設我們在一條垂直方向上的彈簧懸掛物體，拉長彈簧(含物體位置)至 4 公分處，如右圖。

假設我們在時間 $t = 0$ 時放開物體，此時物體的針對時間 t 的位置函數為

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

試求物體運動的速度及加速度，並預測
接下來物體運動的行為。



圖五

範例三 / 解

我們直接微分可以得到速度：

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (4 \cos t) \\ &= 4 \frac{d}{dt} (\cos t) \\ &= -4 \sin t \end{aligned}$$

範例三 / 解

cont'd

再做一次微分得到加速度：

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{d}{dt} (-4 \sin t) \\ &= -4 \frac{d}{dt} (\sin t) \\ &= -4 \cos t \end{aligned}$$

由函數 $\cos t$ 特性，我們可知物體從最低點 ($s = 4 \text{ cm}$) 開始上下震盪至最高點 ($s = -4 \text{ cm}$) 返回，其週期為 2π 。

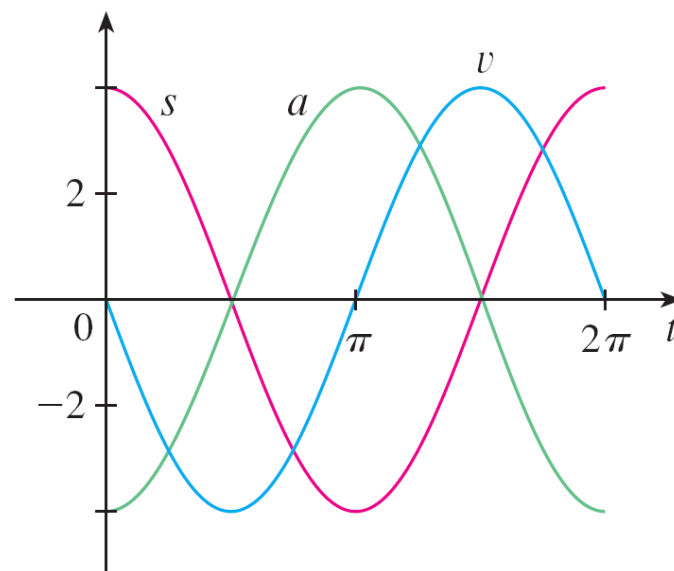
範例三 / 解

cont'd

其運動速率為 $|v| = 4 |\sin t|$ ，最快為當 $|\sin t| = 1$ 之時，也就是當物體位置在 $\cos t = 0$ 之時。也就是說，物體運動速度最快之時在原先懸掛無外力干擾的平衡點 ($s = 0$)。

其速率最低為 0，也就是 $\sin t = 0$ 之時，也剛好即最高、最低點。

加速度為 $a = -4 \cos t$ ，可以發現在原先平衡點 $s = 0$ ，加速度為 0 而在最高與最低點之處，分別有用量值最大的加速度，如圖右。



圖六