3

微分法則

3.2 函數相乘與分式的微分

函數相乘的微分

函數相乘的微分

從加法與減法的經驗，或許我們會猜：函數相乘的微分等於函數微分後再相乘。

不過這件事情是錯的，我們可以檢查一個簡單的例子：

令 $f(x) = x$ 及 $g(x) = x^2$ ，直接計算得 $f'(x) = 1$、 $g'(x) = 2x$

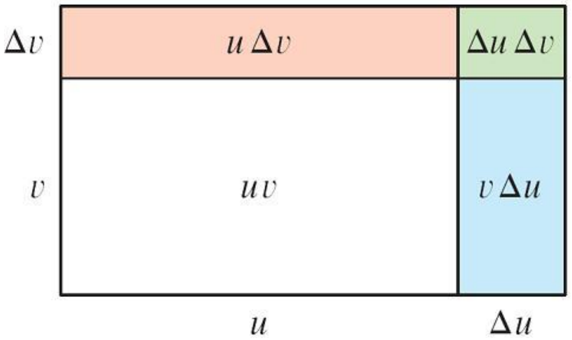
但是 $(fg)(x) = x^3$ ，微分得到 $(fg)'(x) = 3x^2$ 。
因此 $(fg)' \neq f'g'$ 。

函數相乘的微分

正確的公式是由萊布尼茲所提出，一般稱為萊布尼茲法則 (Leibniz's rule) 或乘法的微分法則 (product rule) 。

在實際介紹前，我們來看一下此法則直觀的意義：

假設 $u = f(x)$ 與 $v = g(x)$ 均為正可微函數。此時我們可以將 uv 視為一個矩形的面積，如下圖：



函數加上增量，相乘的示意圖

圖一

函數相乘的微分

假設 x 變化的增量為 Δx ，則應變量 u, v 的變化分別為

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

相乘函數的值便是 $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$ ，在其值為正時，我們剛好可以用前面圖一的矩形面積來表示。

此時矩形面積的變化即為：

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$\boxed{1}$

= 分別為前述三塊塗色的區域面積

函數相乘的微分

除以 Δx ，有

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

令 $\Delta x \to 0$ ，依定義我們可以得到微分 $(uv)'$：

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\
&= u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\
&= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

函數相乘的微分

我們得到下式：

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(注意到由於 f 為連續，因此增量 $\Delta u \to 0$ 當 $\Delta x \to 0$。)

另外雖然我們是從矩形面積開始考慮，但不管 u, v 或者他們的增量符號為何，這個代數運算都是正確的。

函數相乘的微分

於是對任意可微的函數 f, g ，我們有對 fg 的乘法微分法則：

乘法微分法則　給定 f, g 可微函數，則

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

對兩個函數 fg 相乘微分，即先對 f 微分乘上 g 加上 f 乘上 g 的微分。

範例一

(a) 給定 $f(x) = xe^x$ ，求 $f'(x)$.

(b) 求 n 階導數 $f^{(n)}(x)$.

解:

(a) 利用微分法則，我們可以直接計算：

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x)$$

$$= x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x$$

範例一 / 解

cont'd

(b) 先算二階導數，再利用一次乘法微分法則：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[(x+1)e^x]$$

$$= (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)$$

$$= (x+1)e^x + e^x \cdot 1$$

$$= (x+2)e^x$$

範例一 / 解

cont’d

繼續算下去....

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

看起來我們似乎可以推得某種規律，也就是每次微分會多出一個 e^x ，因此

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

函數分式的微分

分式的微分

與函數乘積的微分相同，我們可以推導函數分式的微分法則如下：定義應變數 u,v 分別代表可微函數 $u = f(x)$ 以及 $v = g(x)$ 。

假設 x, u, v 的變化增量分別為 Δx, Δu 以及 Δv ，則此時分式 u/v 所對應的變化為

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)}$$

$$= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

分式的微分

因此

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

當 $\Delta x \to 0$ ，因為 g 為連續函數，有 $\Delta v \to 0$ ，分別分開取極限，由於個別極限均存在，因此有

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0}(v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

分式的微分

最後我們寫成一個定理，分式 f/g 的微分即為，f 微分乘上 g 減去 f 乘上 g 的微分，在共同除去 g 的平方：

分式微分法則　給定 f, g 為可微函數，則

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

範例四

假設 $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. 則我們可以計算 y 的微分：

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$

基本的微分法則

微分公式表

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$(cf)' = cf' \qquad (f+g)' = f' + g' \qquad (f-g)' = f' - g'$$

$$(fg)' = fg' + gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

以上是目前為止我們所推得的微分公式表。