3

微分法則

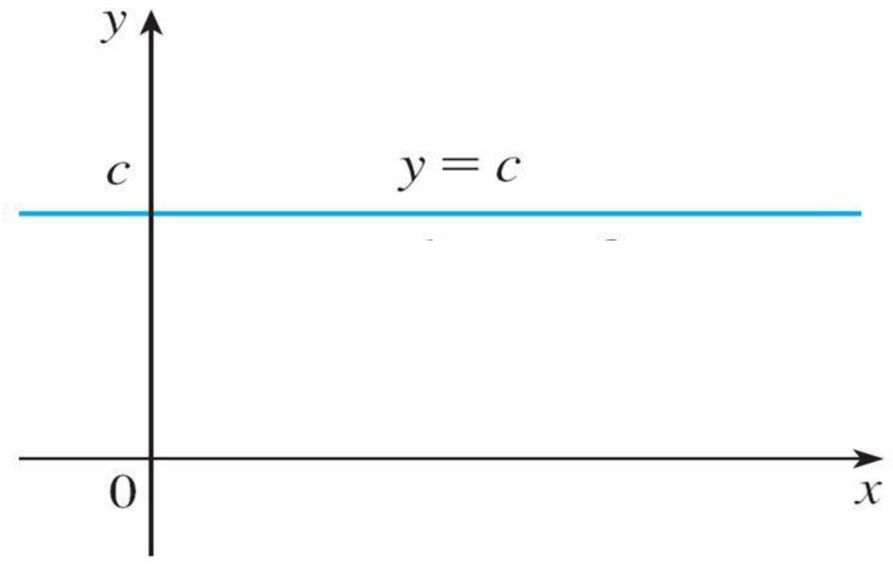
3.1 多項式與指數函數的微分

多項式與指數函數的微分

在這一節我們要計算常數函數、冪函數、多項式以及指數函數的微分。

先從最簡單的常數函數開始，考慮 $f(x) = c$ 。

其函數圖形 y = c 即右圖的水平線，顯然其切線斜率均為 0 ，因此有 $f'(x) = 0$ 。



y = c 的圖形，其斜率處處均為 0

圖一

多項式與指數函數的微分

嚴格的證明我們可以從導數的定義來計算：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

用萊布尼茲的符號寫下：

常數函數的微分

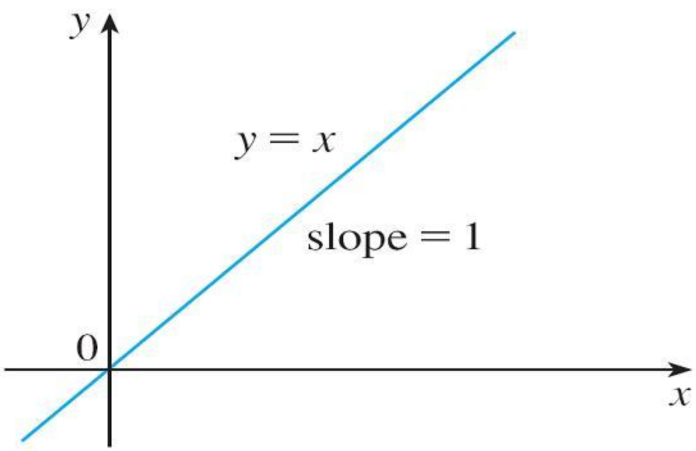
$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

冪函數

冪函數

接著我們看冪函數的導數。假設 $f(x) = x^n$ ，其中 n 為正整數

當 n = 1 時， $f(x) = x$ 的函數圖形就正好是斜率為 1 的直線，如下圖二：



y = x 的圖，是斜率為 1 的直線，因此可以知道 $f'(x) = 1$

圖二

冪函數

因此我們有

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

當然我們從定義也可以得到同樣的結果。

利用定義我們可以簡單計算 x^2 跟 x^3 的結果：

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

冪函數

對更高次的情況， $n = 4$ 時，計算稍為複雜一點：

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) \\
&= 4x^3
\end{aligned}
$$

冪函數

因此

$$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

綜合以上的結果，直覺上我們可以猜測，當 n 為正整數時，我們有：

[冪函數的微分公式] 給定 n 為一正整數，則

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

範例一

(a) 給定 $f(x) = x^6$ ，則 $f'(x) = 6x^5$ 。

(b) 若 $y = x^{1000}$ ，則 $y' = 1000x^{999}$ 。

(c) 若 $y = t^4$ ，則 $\dfrac{dy}{dt} = 4t^3$ 。

(d) $\dfrac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

冪函數

[廣義的冪函數微分公式] 給定 n 為任意實數，則

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

更一般的狀況，我們可以推廣到任意實數的版本。有了這些公式以後，我們在求導數時便不用再重新利用定義去計算。

甚至可以反過來利用公式求切線，或者再更進一步求得法線 (normal lines) 。

平面曲線 C 在 P 點的法線是指通過 P 點並與過 P 點的切線互相垂直的直線。

利用已知函數導數求微分

利用已知函數導數求微分

我們一般常見的函數都是由基本函數所組成的，當一個函數可以寫成我們已知函數的相加、減、乘、除時，此時我們便有一些方法來計算新函數的導數。

例如，已知函數乘上常係數，其微分結果就和先微分再乘上常係數結果相同：

[係數積的導數公式] 給定 c 為常數， f(x) 為可微函數，則

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

範例四

(a) $$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4)$$

$$= 3(4x^3)$$

$$= 12x^3$$

(b) $$\frac{d}{dx}(-x) = \frac{d}{dx}[(-1)x]$$

$$= (-1)\frac{d}{dx}(x)$$

$$= -1(1)$$

$$= -1$$

利用已知函數導數求微分

再來我們討論相加的微分公式：

[函數相加的微分公式] 假設 f, g 都是可微函數，則

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}g(x)$$

加法公式可以推廣到任意有限多項，例如說三項相加的微分，可以兩項先拆得到：

$$(f+g+h)' = [(f+g)+h]' = (f+g)' + h' = f' + g' + h'$$

利用已知函數導數求微分

利用加法與係數積的公式，我們可以將函數相減 f – g 寫成 f + (-1)g ，則有下面的減法公式：

[函數相減的微分公式] 假設 f, g 均為可微函數，則

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

再來，由加、減法以及係數積的公式，我們可以組合不同次方的冪函數，得到任意多項式函數的微分公式。

指數函數的微分

指數函數的微分

我們現在從定義來計算指數函數 $f(x) = a^x$ 的微分。

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x (a^h - 1)}{h}$$

由於 a^x 跟 h 無關，可以視為常數提出極限，於是有

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

指數函數的微分

注意到剩下的即現剛好是 f 在 x = 0 的導數：

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

因此我們可知，只要 $f(x) = a^x$ 在 x = 0 可微，則 f(x) 在任意點均可微，且其值為

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

此時我們也知，指數函數的變化率會和函數值成正比。(從圖形上來看，其切線斜率與函數高度成正比。)

指數函數的微分

我們從數值結果來看這個極限，當 h 越小，增量的比值越小，看起來這個極限是存在的，而且可以大略估計：

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

for a = 2, $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$

for a = 3, $\quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$

指數函數的微分

利用數值逼近到小數第六位：

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

從前述的方程式，我們可以得到 2^x 跟 3^x 的微分估計：

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

指數函數的微分

由於我們從圖觀察，指數函數 a^x 隨著底數 a 增加而增加，很自然的我們想定義一個指數函數 f(x) 滿足 f’(0) = 1 。

而 2^x 和 3^x 在 0 的導數分別約為 0.69 跟 1.10 ，因此我們所期望的指數函數 f(x)，其底數會介於 2, 3 之間。

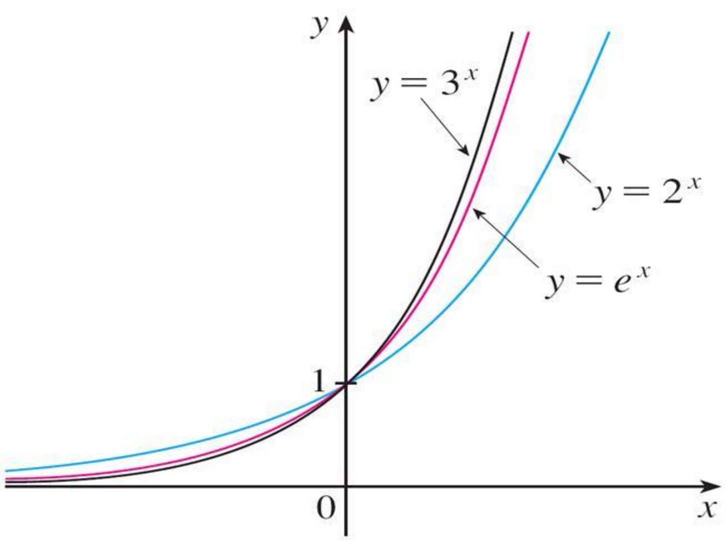
我們定義 e 如下：

[定義]

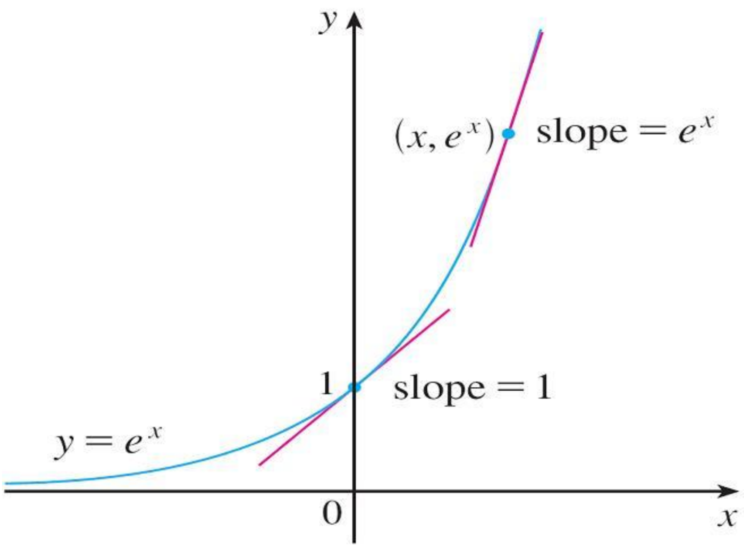
我們定義自然底數 e 為恰好滿足後式的數： $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

指數函數的微分

從幾何圖形上來看，所有指數函數，在 (0,1) 的切線斜率恰好為一的函數也只有惟一一個，因此 e 的定義是合理的。



圖六



圖七

指數函數的微分

定義完 e 以後，從前述的公式我們可以得到 $f(x) = e^x$ 的微分便是以下這個重要的結果：

[自然指數函數的微分]

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

這個的意思便是 e^x 的變化率會與其函數值相等，也就是函數圖形的切線斜率等於其 y 座標值。

範例八

給定 $f(x) = e^x - x$，求 f' 及 f''。比較 f 與 f' 之函數圖形。

解:

利用函數相減的微分公式，可得到：

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x)$$

$$= \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x)$$

$$= e^x - 1$$

範例八 / 解

cont'd

接著再微分一次：

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1)$$

$$= \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1)$$

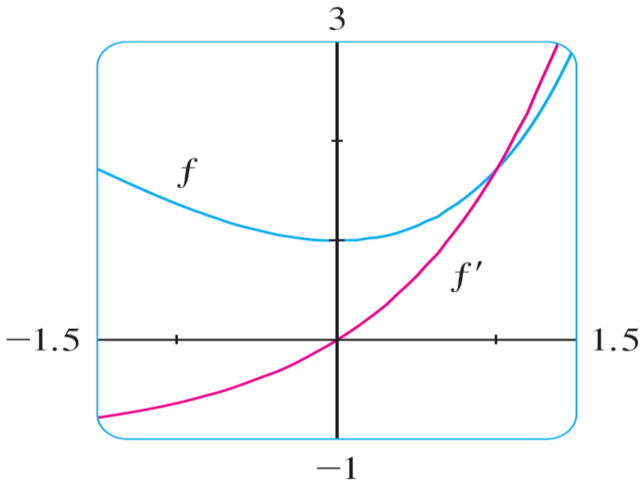
$$= e^x$$

範例八 / 解

cont'd

f 跟 f‘ 的函數圖形如右圖所示

注意到 f 在 x = 0 時有水平切線，這也代表 f‘(0) = 0 ，而剛好 x = 0 也是 f’ 正負號的分界，在 x > 0 時 f 為遞增，而 x < 0 時， f 為遞減。



圖八