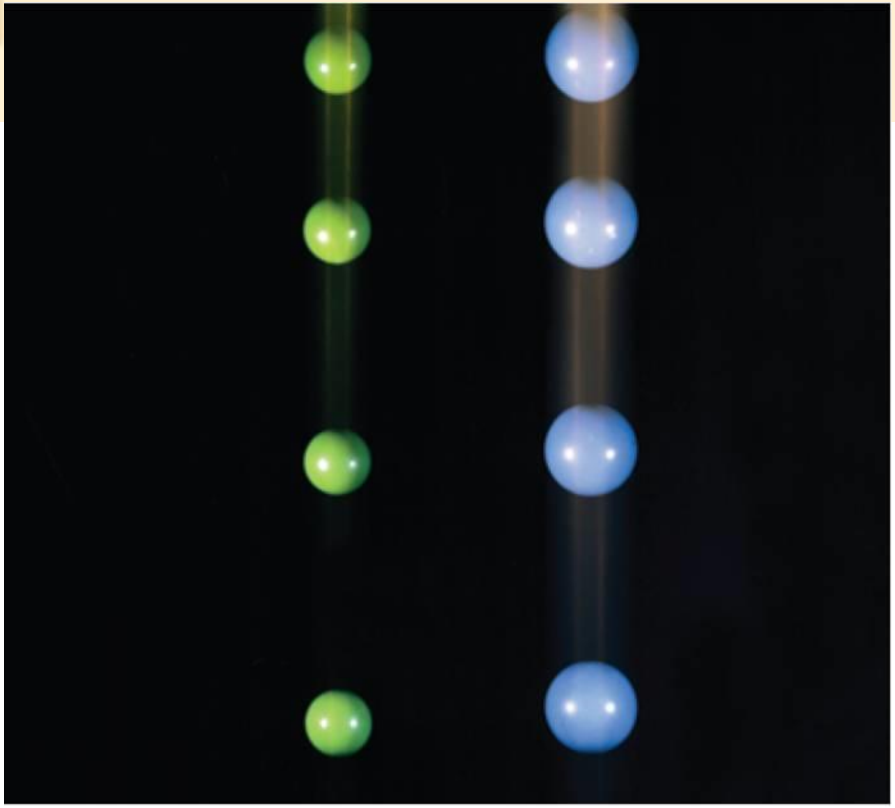
2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.8 導數函數

導數函數

上一節我們介紹了函數 f(x) 在 x = a 時的導數，定義如下

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

現在我們稍作修改，考慮對每個點都求導數，也就是把求導的點

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

導數函數

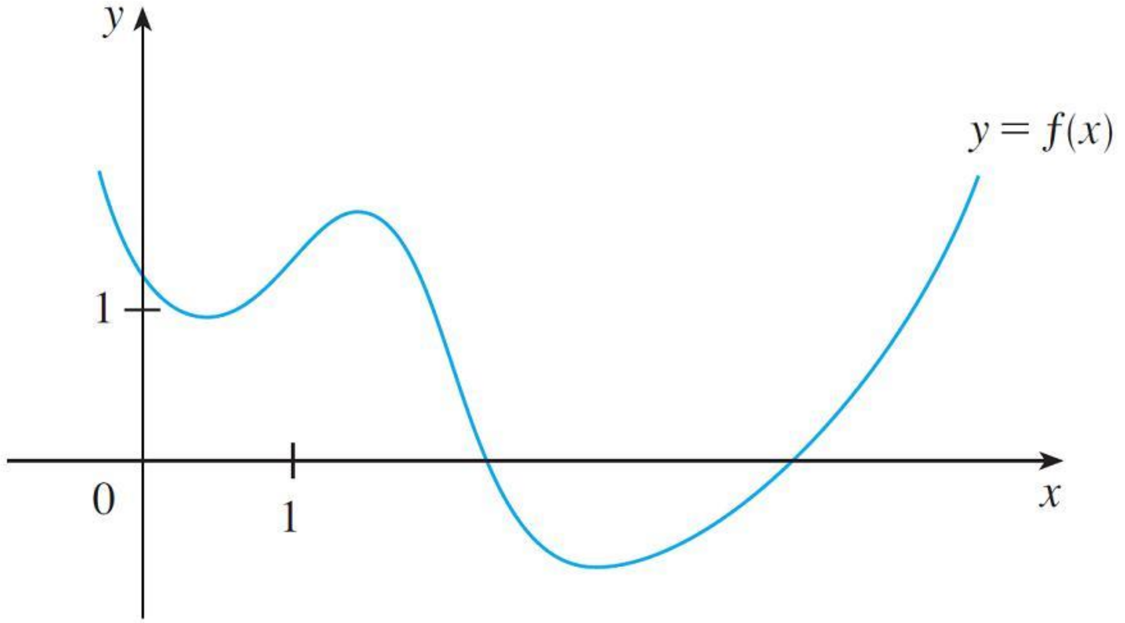
對每個 $f'(x)$ 極限存在的 x ，我們可以定義新的函數，其對應方式即為 x 對應到在 x 的導數值 $f'(x)$ 。其實這也就是將 $f'(x)$ 視為一個 x 的函數，此時我們稱 $f'(x)$ 為 $f(x)$ 的**導數函數**。

導數的命名來自於「一個函數的導數是從極限的**推導**而來的。」

導數函數 f' 的定義域很自然的便是 $\{x: f'(x)$ 存在$\}$，會是 f 定義域的一個子集合。

範例一

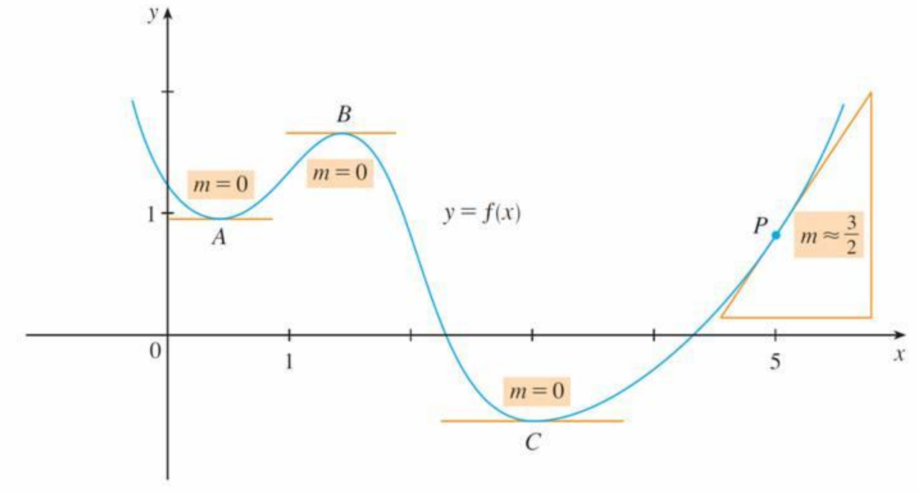
給定一函數其圖形如下所示，試刻劃其導函數圖形



圖一

範例一 / 解

我們可以針對每個點 x ，劃出曲線在該點 (x, f(x)) 的切線，而後藉由切線的斜率來判斷導數的值。如 A, B, C 三點，均為導數 = 0 的地方，而在 x = 5 時，我們目測估計 f’(5) 大約是 3/2 。

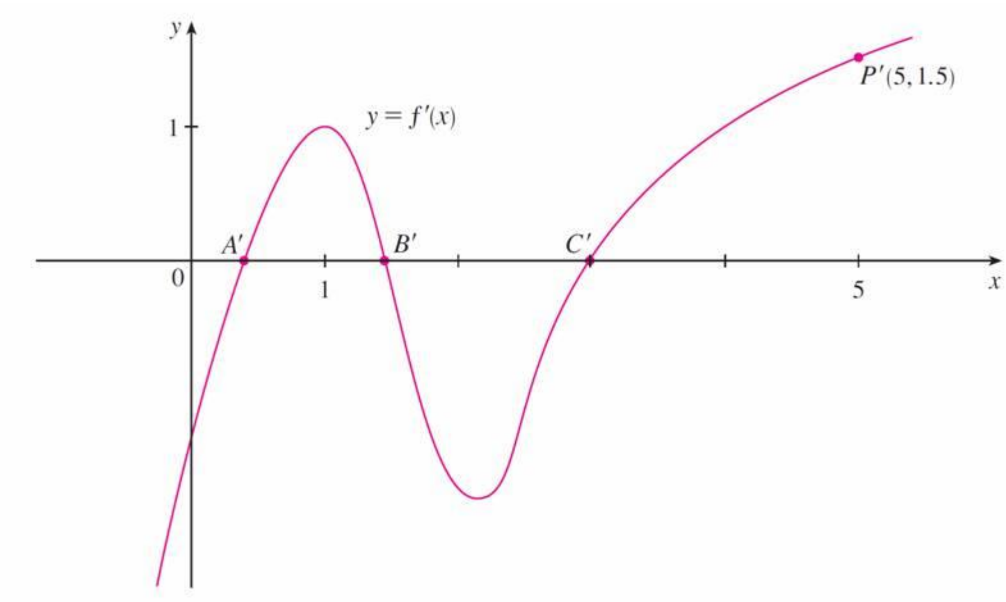


圖二(a)

範例一 / 解

cont'd

因此我們可以藉由描點大致上刻劃出 f' 的圖形，包括剛剛所估計得到的 P'(5,3/2) 。大略刻劃出圖形以後，約略把圖形連結起來後，就可以得到逼近的圖形。下圖為電腦繪圖：



圖二(b)

範例一 / 解

cont’d

注意到在原先 f 圖上 A, B, C 點的切線是水平線，因此導數在這三個點上為 0 ，也因此會在 f’ 圖上的 A’, B’, C’ 點與 x 軸相交。

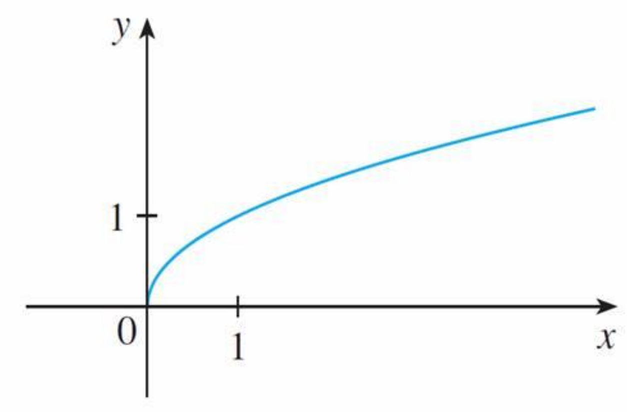
而在 A, B 之間，任一點作切線其斜率均為正，因此 f’ 在這一個區段均為正，而在 B, C 之間，其任一點作切線斜率均為負，也因此在這一區間 f’ 均為負。

導數函數

我們舉另一個例子 f(x) = $\sqrt{x}$ 。

依照定義計算 f'(x) 如下，當 h 趨近 0 時，有

$$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x}}$$



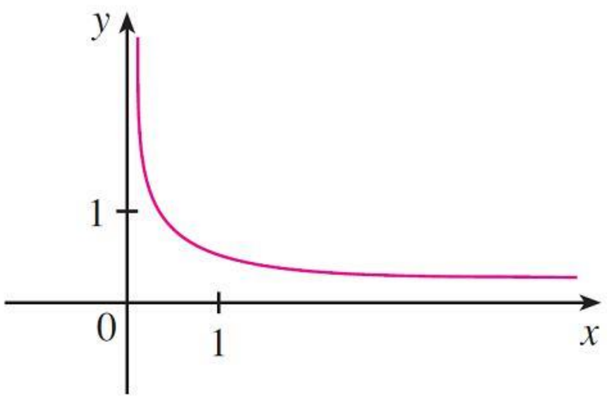
(a) $f(x)=\sqrt{x}$

圖四

導數函數

因此可知 $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ 。

我們可以觀察到，當 x 趨近 0 時， f’(x) 會趨近無窮大，而當 x 變大趨近無窮遠處時， f’(x) 會趨於平緩。



(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

導數的另一個記號

導數的另一個記號

給定獨立變量 x 與應變量 y 的函數關係 y = f(x) ，此時除了 f’(x) 之外，我們有其他一些常用的記號來表示 y 對 x 的瞬間變化率：

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

以上符號均代表 y 對 x 的瞬間變化率，也就是導數。
我們把 ‘ (prime 記號) 、 D 、 d/dx 看成是一種對 f 的作用，稱作**微分算子 (differentiation operator)** 。

並以對 f **微分 (differentiation)** 表示對函數 f(x) 取導數。

導數的另一個記號

我們在這裡作一個定義：

[定義]

我們說 f(x) 在 a 點可微分 (differentiable) ，表示導數 f’(a) 存在。而 f(x) 在區間 (a, b) 上可微分（a, b 可以分別是負、正無窮大），表示 f(x) 在區間 (a,b) 內任一點可微分。

導數的另一個記號

dy/dx 這個記號最早是由萊布尼茲 (Leibniz) 所使用，雖然是寫成分式的形式，但這個符號的意義就跟 f'(x) 意思一樣，是無窮小量比值的極限

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

然而使用這個符號的好處，在於我們作運算時，會知道導數是指 y 增量與 x 增量比值的極限，也就是 y 對 x 的變化率。

導數的另一個記號

若我們想指出 dy/dx 是在哪一個點取導數，則會用下面的符號表示：

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{或} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

表示在 a 點取 y 對 x 的導數，與 y = f(x) 時的 f’(a) 是相同的意思。

範例五

函數 $f(x) = |x|$ 在哪些點可微分？

解:

當 $x > 0$ 時， $|x| = x$ ，在極限之定義中我們需要讓 h 趨近 0，因此我們可以只考慮夠小的 h 滿足 x + h > 0 ，此時依定義計算極限：

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

因此 f 在任意 x > 0 可微。

範例五 / 解

同樣，對於 x < 0 ， |x| = – x ，此時我們也同樣取 h 足夠小使得 x + h < 0 ，此時由極限之定義有：

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

因此對任意 x < 0 ， f 亦可微。

範例五 / 解

cont'd

剩下最後一個點 x = 0 ，我們計算導數的極限：

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(if it exists)}$$

由於取絕對值在 h > 0 與 h < 0 結果不同，分左右極限：

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

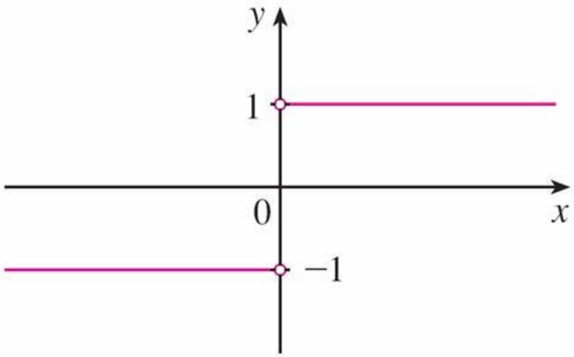
範例五 / 解

cont'd

由於左右極限值並不相同，因此 f'(0) 並不存在，是故 f 只在所有不為 0 的點可微。

我們可以寫下這樣的導函數表示式：

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > 0 \\ -1 & \text{if } x < 0 \end{cases}$$



$y = f'(x)$

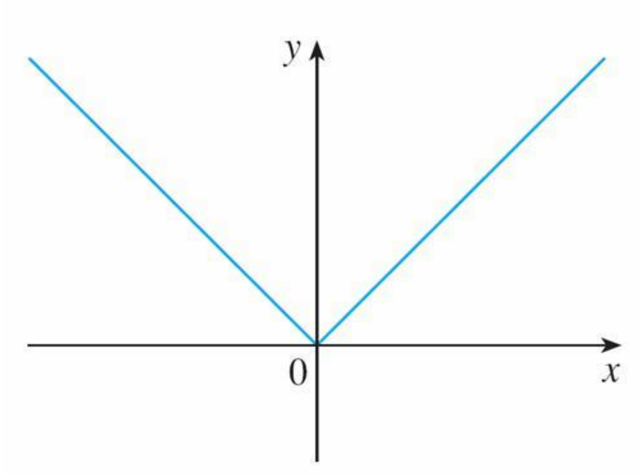
圖五(b)

注意到定義域只在 {x: x≠0} ，其函數圖形如右圖所示。

範例五 / 解

cont'd

f'(0) 不存在也反映了這個函數圖形的特性，也就是 y = |x| 在原點 (0,0) 並沒有切線，見下圖：



$y = f(x) = |x|$

圖五(a)

導數的另一個記號

函數的連續性與可微分性都是好的性質，下面的定理介紹了可微分性與函數連續性的關係：

[定理]
若 $f(x)$ 在 a 點可微分，則 $f(x)$ 在 a 點連續。

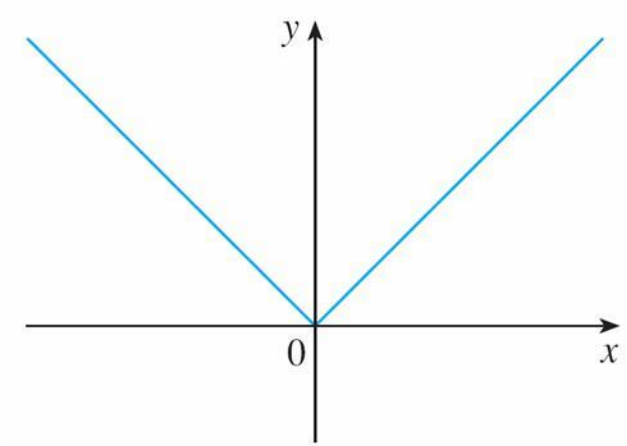
注意：這個定理的逆敘述不一定是對的，也就是說存在連續但不可微的函數。例如前面的 $y = |x|$ ，就是在 $x= 0$ 連續但不可微的一個反例。

函數有哪些不可微的情形？

函數有哪些不可微的情形？

在前面的例子中，我們已看過 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 不可微，從圖形看也就是 $y = |x|$ 在 $x = 0$ 時突然改變方向，因此圖形在此點不存在切線。

一般來說，任何函數 $f(x)$ 其函數圖形若有轉角或者尖點，則在這些點無法決定一條切線，也因此 $f(x)$ 在這些點不可微分。
主要的原因便是變化率比值的左右極限值不同。



$y = f(x) = |x|$

圖五(a)

函數有哪些不可微的情形？

除了從圖形觀察以外，前一個定理也告訴我們一種不可微分的情形，也就是函數若在 a 不連續，則必定在 a 也不可微。

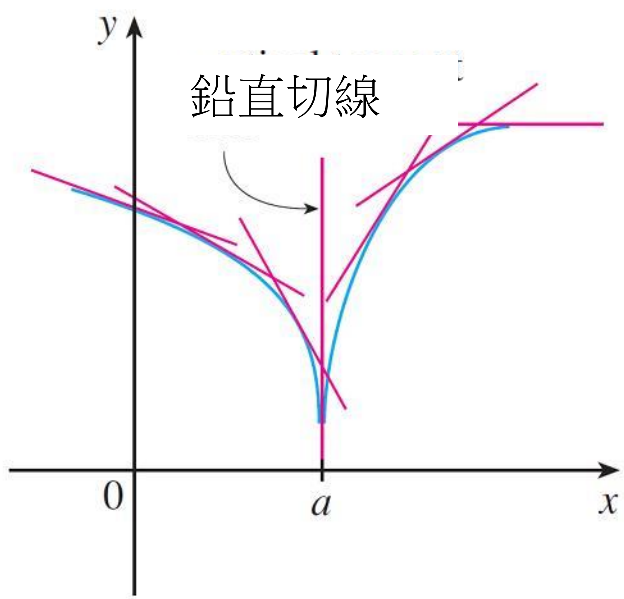
還有一種情況是函數連續，但函數曲線的切線是鉛直線，如 x = a ，此時在 a 點的切線斜率是無窮大。

$$\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$$

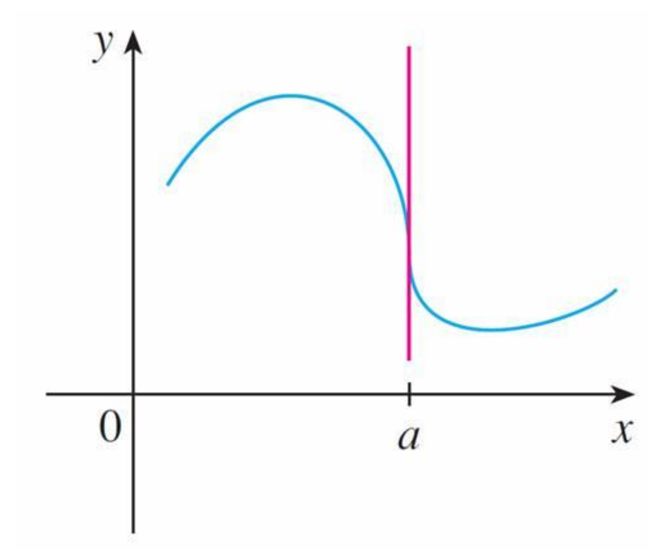
假設我們用 a 附近的切線斜率去逼近，於是 |f’(x)| 的極限會趨近無窮大，當 x 趨近 a 。

函數有哪些不可微的情形？

這也就是說在 a 附近的切線，在 x 趨近 a 的同時會越來越陡峭，如下面兩圖所刻畫：



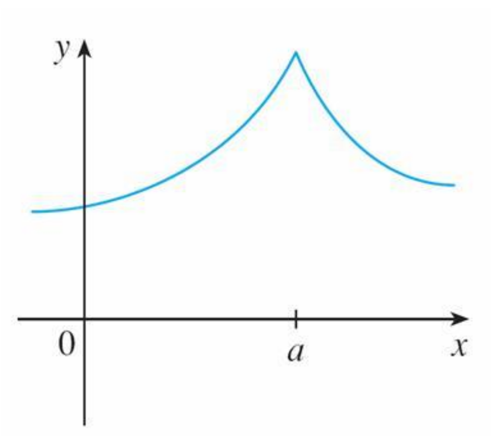
圖六



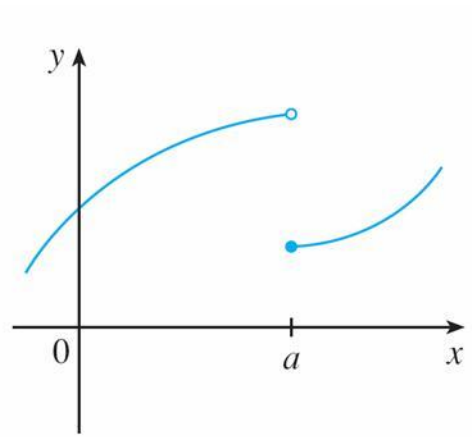
圖七(c)

函數有哪些不可微的情形？

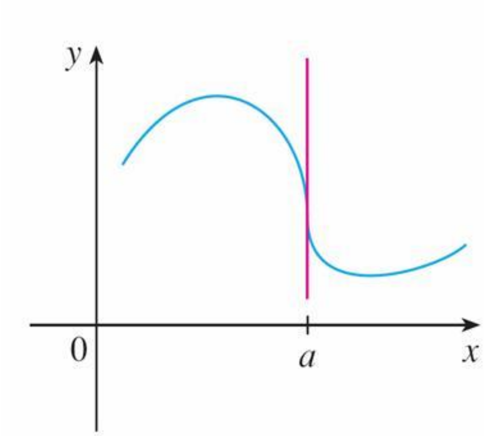
下圖列出前述的三種不可微的情形：



轉折點



不連續點(跳點)



鉛直切線

圖七

高階導數

高階導數

若 f(x) 是可微函數，則其導函數 f’(x) 也是一個函數，因此我們也可以討論導函數是否可以微分。若 f‘ 也存在有導函數，我們記作 (f’)’ = f” ，稱為 f 的**二次導數 (second derivative)**。

另外，我們也可以用萊布尼茲的符號來寫 y = f(x) 的二次微分如下：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

範例六

給定 $f(x) = x^3 - x$ ，求二次導數 $f''(x)$ 並且是其意義。

解:

我們可以先計算一次導數得到 $f'(x) = 3x^2 - 1$

接著二次導數的計算同樣是利用定義：

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \end{aligned}$$

範例六 / 解

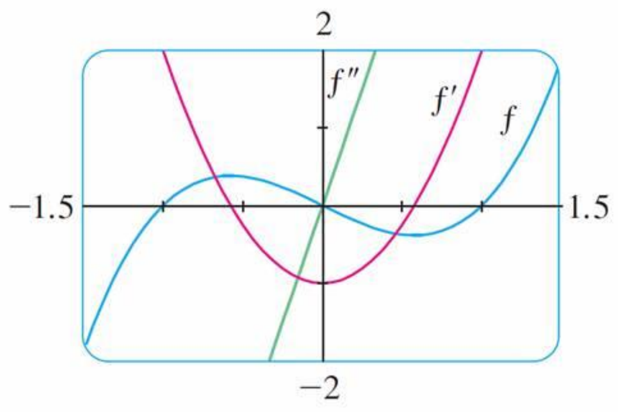
cont'd

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (6x + 3h)$$

$$= 6x$$

最後 *f*, *f'*, *f''* 的圖刻畫如下：



圖十

範例六 / 解

cont'd

$f''(x)$ 的意思我們可以解釋成導函數 $y = f'(x)$ 圖形在 $(x,f'(x))$ 的切線斜率。換句話說，它也同時是 $y = f(x)$ 的切線斜率的變化率。

從前面的圖我們可以驗證這個解釋：當 $f''(x)$ 為負時， $y = f'(x)$ 在該點的切線斜率為負，而 $f''(x)$ 為正時， $y = f'(x)$ 在該點切線斜率為正。

高階導數

一般來說，我們可以將二階導數解釋成變化率的變化率。不過最常見的情況還是將二階導數看成物體直線運動的加速度 (acceleration) ：

假設 $s = s(t)$ 代表物體直線運動的位置函數，令 $v(t)$ 為 s(t) 的一次導函數，也就是速度：

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

高階導數

此時，速度對時間的瞬間變化率即為物體的加速度 a(t) 。因此 a(t) 就是對 v(t) 微分得到的導函數，也就是對位置函數 s(t) 微分兩次得到的二階導函數：

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

用萊布尼茲的符號寫成：

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

高階導數

更高階的導數，如三階導數 f’’’(x) ，也就是二階導數的導函數。而同樣， f’’’(x) 也可以解釋成二階導函數 y = f’’(x) 曲線的切線斜率，也或者是 f‘’(x) 的變化率。

$y = f(x)$ ，其三階導函數的符號，用萊布尼茲的符號寫成：

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

高階導數

同樣，我們可以繼續下去定義更高階的導數，四階導數 f'''' 也就是三階導數的導函數。為了避免 prime 記號太多造成混淆，四階導數一般也可記作 $f^{(4)}$ 。

而 n 階導數也就常記作 $f^{(n)}$ ，其定義也是從 f 作 n 次導函數而得來。

利用萊布尼茲的符號， y = f(x) 的 n 階導數，寫作：

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

高階導數

高階導數的意義有時不好想像，但這裡我們仍可以解釋三階導數的物理意義，同樣利用物體直線運動的例子：

三階導數也就是加速度的變化率 $s''' = (s'')' = a'$ ，也常被稱為 jerk (“猛推”，中文並不常用這類的字，僅以英文敘述)

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

此時這個 jerk j 也就是指位置加速度的變化率。
之所以用 jerk 命名，是由於一個 jerk (猛推) 會造成加速度的大幅度變化。