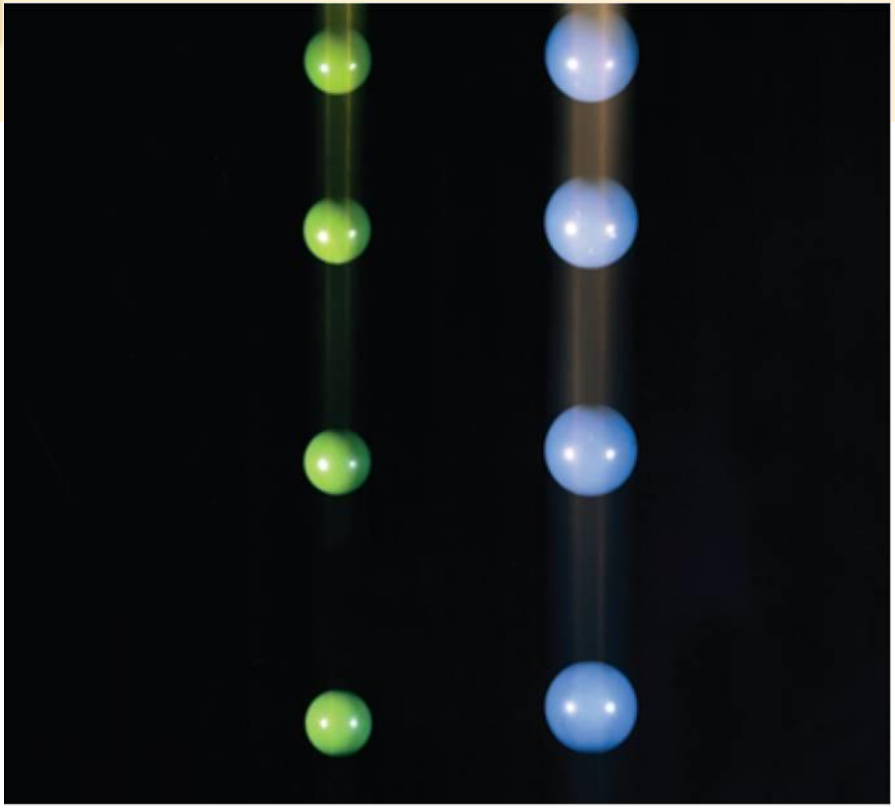
2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.6 無窮遠處的極限與水平漸近線

無窮遠處的極限與水平漸近線

這一節中我們想觀察函數的圖形在 x 趨近正、負無窮大時，其函數值的變化行為。

我們考慮這樣的函數：

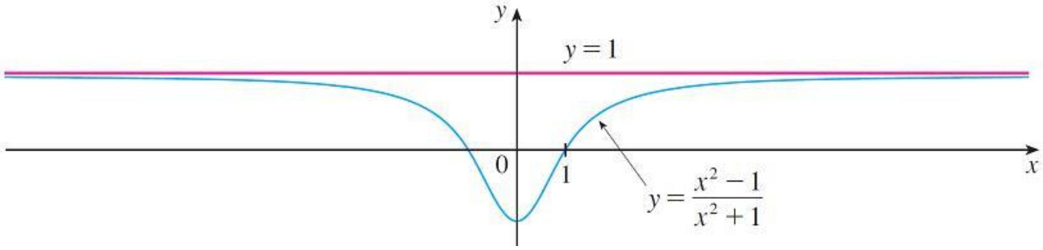
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

注意到分母恆為正，因此函數的定義域為整個實數。

無窮遠處的極限與水平漸近線

下表與圖給出了此函數大致上的圖形與一些函數值。

x	$f(x)$
0	-1
± 1	0
± 2	0.600000
± 3	0.800000
± 4	0.882353
± 5	0.923077
± 10	0.980198
± 50	0.999200
± 100	0.999800
± 1000	0.999998



圖一

無窮遠處的極限與水平漸近線

從電腦繪圖中我們可以發現，當 x 的值越大（或者說離原點越遠），此時 f(x) 的值越接近 1 。

或者反過來說，我們發現 f(x) 的值可以越靠近 1 ，只要我們取 x 夠大，或者取 x 負越多。

我們把這個極限寫成：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

無窮遠處的極限與水平漸近線

更一般的，我們以這樣的極限符號

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

表示 *f*(*x*) 會逼近 *L* 當 x 趨近正無窮大的時候。
我們實際定義如下

[定義]
令 f 為一實函數定義域包含 (a,∞) 。
我們定義 f(x) 在 x 趨近正無窮大時的極限為 L ，意即

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ，

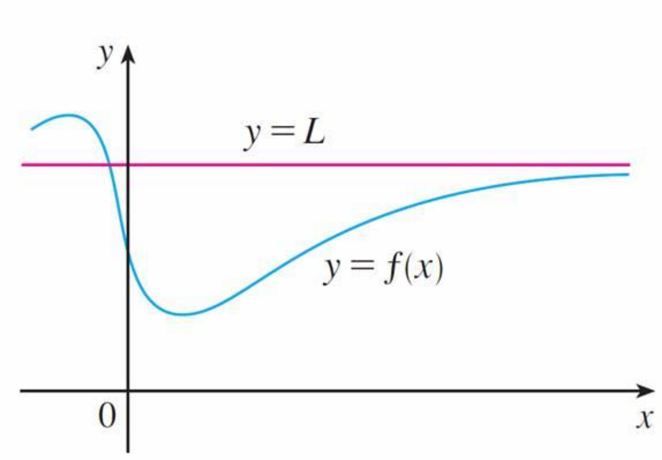
表示只要當 x 夠大， f(x) 的值可以任意靠近 L 。

無窮遠處的極限與水平漸近線

與一般極限相同，$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ 也可以寫作

$$f(x) \to L \quad 當 \quad x \to \infty$$

這類的極限我們大致上刻劃如下圖：

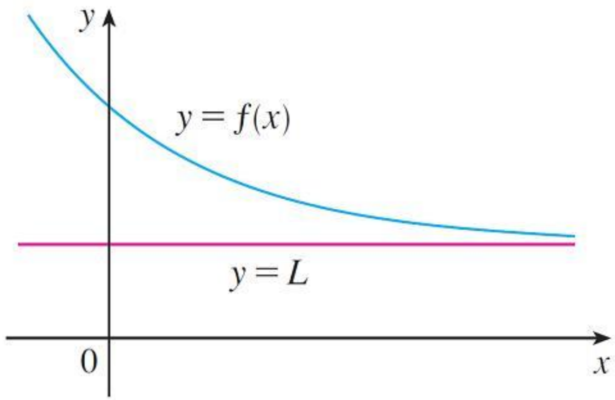


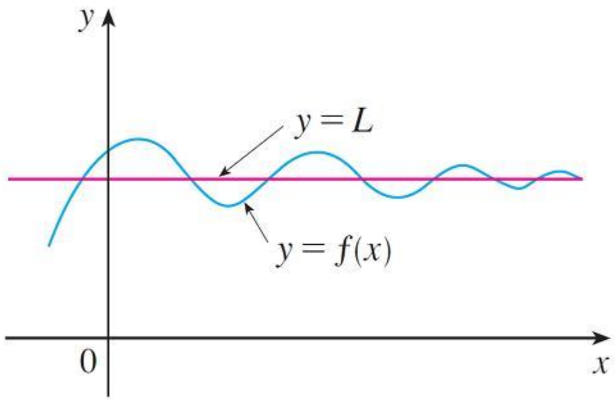
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

圖二

無窮遠處的極限與水平漸近線

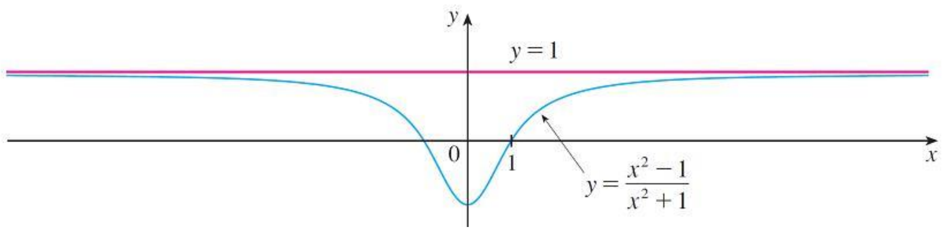
注意到 f(x) 的值在無窮遠處趨近 L 的方式可能不太一樣，如下面兩圖所刻畫：





無窮遠處的極限與水平漸近線

回到原先的題目，經由數值計算，我們也會發現當 x 趨近負無窮大時， f(x) 的值也會趨近 1 。



圖一

而只要 x 負得越多， f(x) 就可以任意地靠近 1 ，因此我們同樣有類似的極限：

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

無窮遠處的極限與水平漸近線

我們實際做一個定義如下：

[定義]

令 f 為一實函數定義域包含 (-∞,b) 。

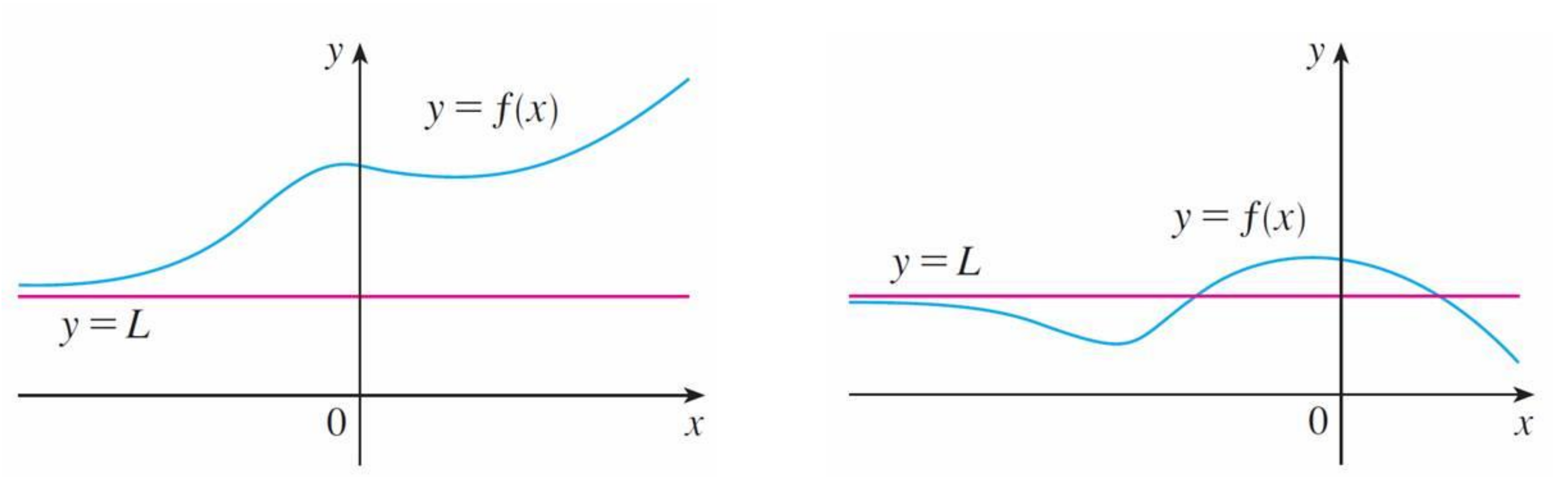
我們定義 f(x) 在 x 趨近負無窮大時的極限為 L ，意即

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L ，$$

表示只要當 x 負得越多， f(x) 的值可以任意靠近 L 。

無窮遠處的極限與水平漸近線

同樣 f(x) 在負無窮遠處會趨近 L 的行為也可能大不相同，我們可見下兩圖的刻畫：



$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

圖三

無窮遠處的極限與水平漸近線

觀察到不管是 x 趨近到正或負無窮大，若 f(x) 會趨近一個固定的值 L ，從前面的圖可以發現， f(x) 的函數圖形在 x 很大或者 x 負很多的時候，越貼近 y = L 這條線。

此時我們稱 y = L 為 y = f(x) 的一條**水平漸近線 (horizontal asymptote)** 。

[定義]

我們說 y = L 為 y = f(x) 的一條水平漸近線，表示 f(x) 在 x 趨近正或負無窮遠處時， f(x) 的值會趨近 L ，意即

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{或者} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

範例二

試求極限值： $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$ 與 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}.$

解:

觀察到當 x 越大， 1/x 的值會越小：

$$\frac{1}{100}=0.01 \qquad \frac{1}{10{,}000}=0.0001 \qquad \frac{1}{1{,}000{,}000}=0.000001$$

事實上只要取 x 夠大， 1/x 的值便越接近 0 。

範例二 / 解

cont'd

因此我們有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

同樣的道理，當 x 負得越多， 1/x 的值同樣也越接近 0 ，因此我們也可以知道

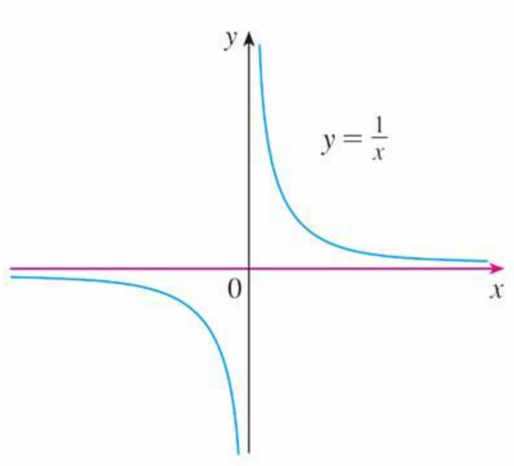
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

範例二 / 解

cont'd

因此 y = 0 （也就是 x 軸） 是曲線 y = 1/x 的水平漸近線。

見下圖：



$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

圖六

無窮遠處的極限與水平漸近線

一些基礎的極限結果，我們同樣也列成定理：

[定理]

給定 $r > 0$ 為一有理數，則

$$\lim_{x\to\infty} 1 / x^r = 0 \text{ 。}$$

另外若 x^r 對任意 x 都有定義，則

$$\lim_{x\to-\infty} 1 / x^r = 0 \text{ 。}$$

範例三

試求極限 $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

解:

注意到當 x 變大時，此分式的分子與分母的多項式均趨近到無窮大，極限不存在（注意到趨近到無窮大並不是一個數字！），無法使用極限的除法，我們必須透過化簡來求得這個極限。

由於 x 為趨近無窮大，因此足夠大的 x 便滿足 $x \neq 0$ ，此時我們可以將分子分母同除以兩個多項式的最高次方。

範例三 / 解

cont'd

在這個例子當中，分子分母次數最高的項為 x^2 ，除掉：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

範例三 / 解

cont'd

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

(如果個別極限存在，則可以使用極限的除法)

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

(由於個別極限存在，因此可以使用極限的加減法)

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0}$$

(利用前述趨近無窮遠處的極限，得知這些個別的極限均存在)

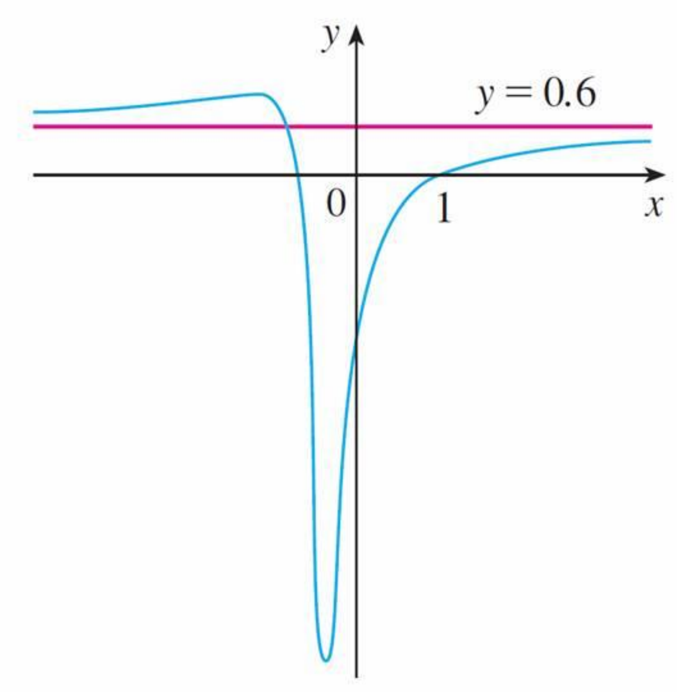
$$= \frac{3}{5}$$

範例三 / 解

cont'd

藉由同樣的方法，我們也可以得到極限在 x 趨近 $-\infty$ 時會趨近 $\frac{3}{5}$.

右圖大致上刻畫出這個有理函數，其水平漸近線即為 $y = \frac{3}{5}$.



$$y = \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

圖七

範例四

試求下列函數圖形之水平與鉛直漸近線

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

解:

同樣我們除以分子分母之中的最高次項 x ：

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}}$$

(考慮到 $\sqrt{x^2} = x$ 當 $x > 0$)

範例四 / 解

cont'd

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 3 - 5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}$$

(同樣，依照極限運算的規則，先計算各自的極限是否存在)

$$= \frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

因此直線 $y = \sqrt{2}/3$ 為圖形的一條水平漸近線

範例四 / 解

而當 x 趨近負無窮大時，此時 $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ 。

此時我們除掉 x ，得到：

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1}$$

$$= -\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}$$

範例四 / 解

cont'd

因此

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2 + \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}}{3 - 5 \displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

範例四 / 解

cont'd

可知道，直線 $y = -\sqrt{2}/3$ 也為一水平漸近線。

另外，鉛直漸近線會發生在分母趨近 0 的地方，也就是 $3x - 5 = 0$ 時， $x = \frac{5}{3}$.

當 x 非常靠近 $\frac{5}{3}$，且 $x > \frac{5}{3}$ 時，分母 $3x - 5$ 非常接近 0 且為正數，而分子 $\sqrt{2x^2 + 1}$ 恆正，因此 f(x) 在此時為正，函數值趨近無窮大：

$$\lim_{x \to (5/3)^+} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \infty$$

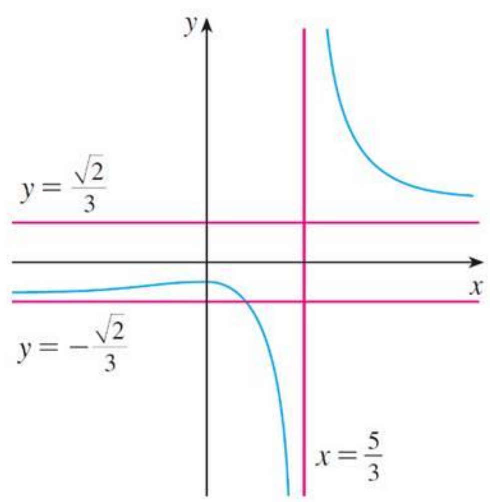
範例四 / 解

cont'd

而當 x 接近 $\frac{5}{3}$ 但 $x < \frac{5}{3}$ 時，此時 3x – 5 < 0 為負，因此 $f(x)$ 的值為負：

$$\lim_{x \to (5/3)^-} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = -\infty$$

我們刻劃這些極限如右圖，並劃出水平與鉛直漸近線：



$$y = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

圖八

在無窮遠處趨近無窮大的極限

在無窮遠處趨近無窮大的極限

與一般趨近無窮大的極限相同，我們用以下的符號

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

表示 *f*(*x*) 的函數值在 x 趨近無窮遠處時，逼近無窮大。

而下面分別是 x 趨近正、負無窮大， f(x) 分別趨近正負無窮大的符號：

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

範例九

試求 $\lim_{x \to \infty} x^3$ 與 $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

解:

我們可以觀察：當 x 越大， x^3 會變得更大。

例如，

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1,000,000 \qquad 1000^3 = 1,000,000,000$$

因此事實上我們可以取 x 夠大，使得 x^3 可以任意大。所以我們記作：

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

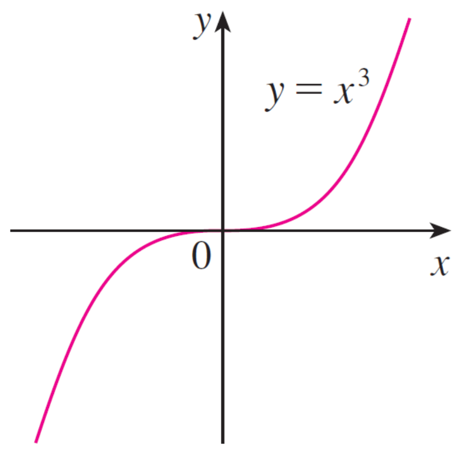
範例九 / 解

cont'd

同樣，當 x 負得多時， x^3 會負得更多，因此有

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

這些對於極限的觀察我們可以從下圖的刻畫中看出：



$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

圖十一

在無窮遠處的極限
之精確定義

在無窮遠處的極限之精確定義

我們重新回想 x 趨近無窮遠處之極限的定義，並改寫成嚴格 $\varepsilon - \delta$ 語言的形式：

[定義]

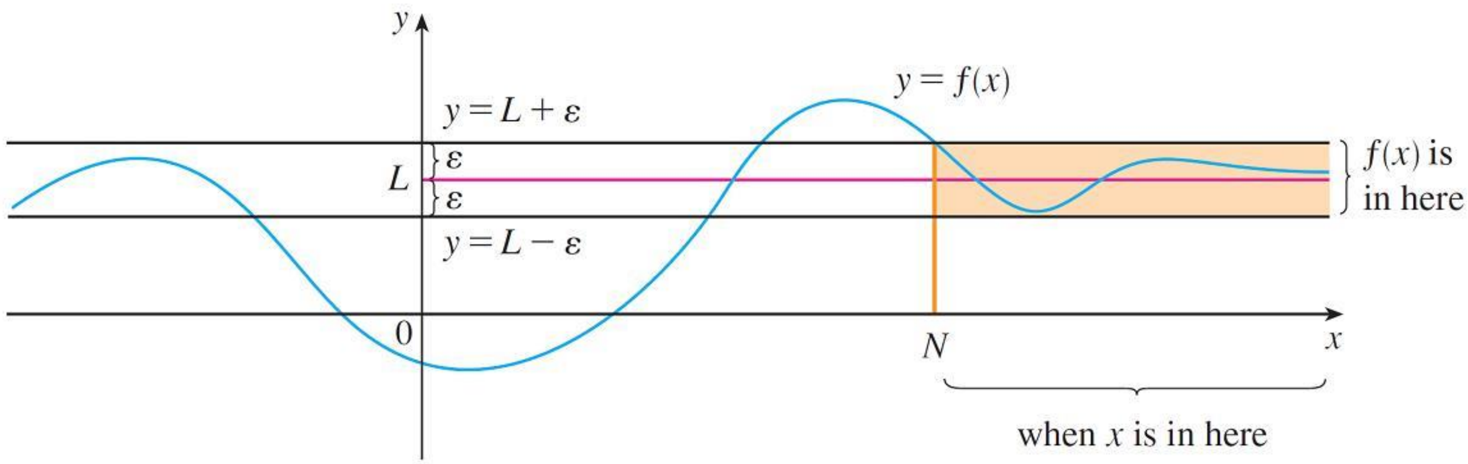
令 f 為一實函數定義域包含 (a,∞) 。

我們說 $f(x)$ 在 x 趨近正無窮大時的極限為 L ，表示給定任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N 夠大使得若 $x > N$ 則有 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

換句話說，對於任意小的誤差容忍度 ε ，我們可以取 x 足夠大，只要 $x > N$ ， $f(x)$ 跟 L 間的誤差便會小於 ε 。

在無窮遠處的極限之精確定義

以圖表來說明，這個極限的意思便是，給定了一個誤差容忍度 ε ，我們可以取到一個 N ，使得圖形在 x = N 的右邊以後，y = f(x) 的圖形都會落在 y = L + ε 與 y = L – ε 之間。如下圖所示：

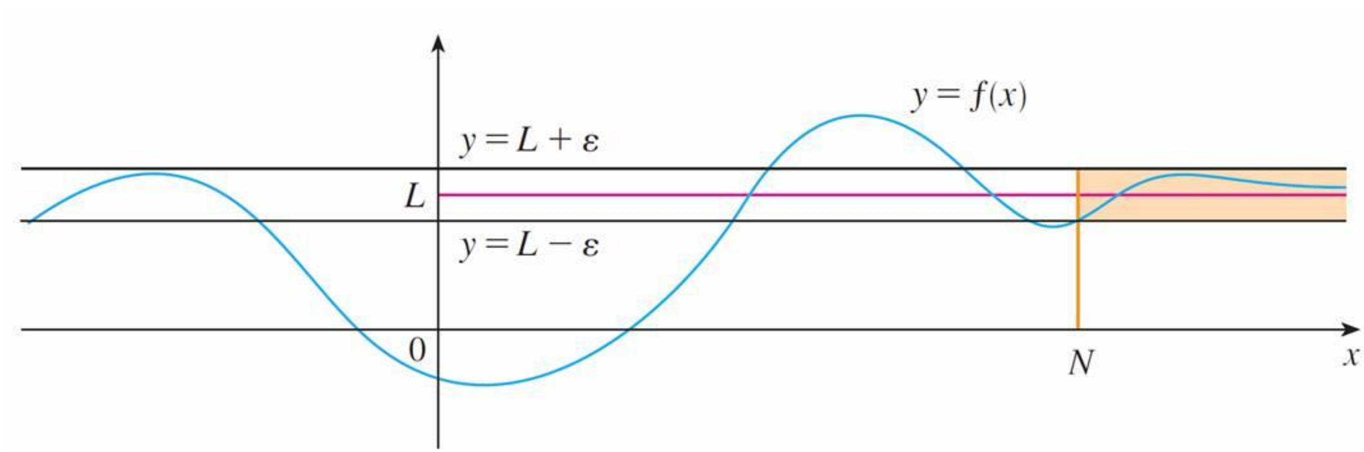


$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

圖十四

在無窮遠處的極限之精確定義

跟一般的極限一樣，若此極限存在，當今天給定了一個更小的誤差容忍度 ε ，就有可能必須取更大的 N ，使得 y = f(x) 在 x = N 右邊的圖形在誤差容忍度範圍之內：



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

圖十五

在無窮遠處的極限之精確定義

在 x 趨近負無窮大時的極限，我們也作類似的定義：

[定義]

令 f 為一實函數定義域包含 $(-\infty, b)$ 。

我們說 f(x) 在 x 趨近負無窮大時的極限為 L ，表示給定任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 N 夠大使得若 $x < -N$ 則有 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 。

範例十四

利用前述 ε – N 語言的定義，證明 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ = 0.

解:

首先我們仍然需要做一些估計，先給定一個 ε > 0 ，我們需要找到一個 N 使得：

當　x > N　則有 $\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$

為了計算方便，由於 x 趨近正無窮大，我們便先假設 $x > 0$ ，

因此有

$$1/x < \varepsilon \Longleftrightarrow x > 1/\varepsilon.$$

範例十四 / 解

是故取 N = 1/ε ，此時

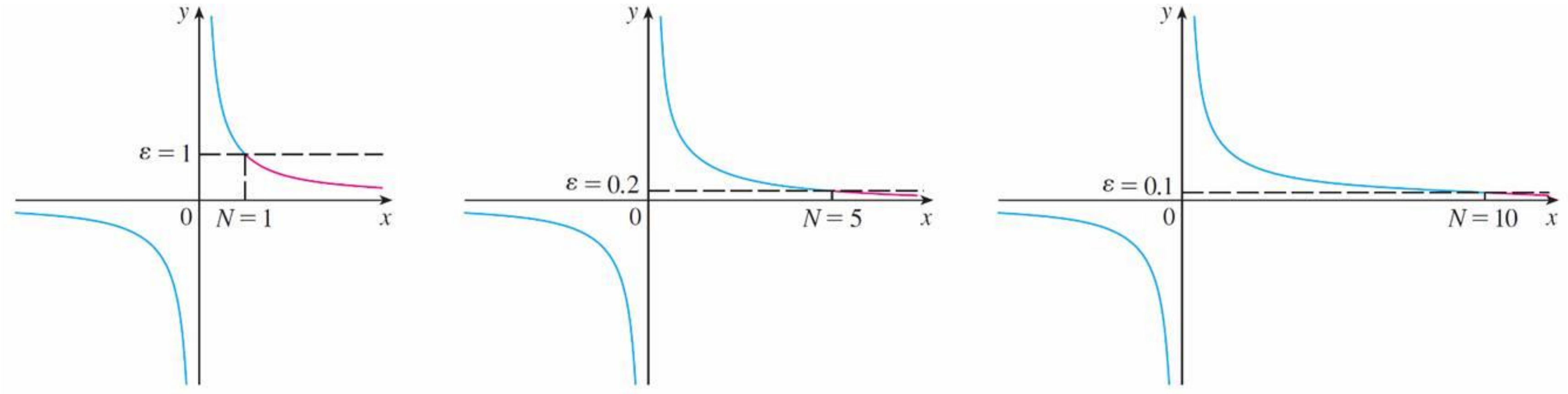
若 $x > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$ 則有 $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{x} < \varepsilon$

因此利用前述的定義，我們可知

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

範例十四 / 解

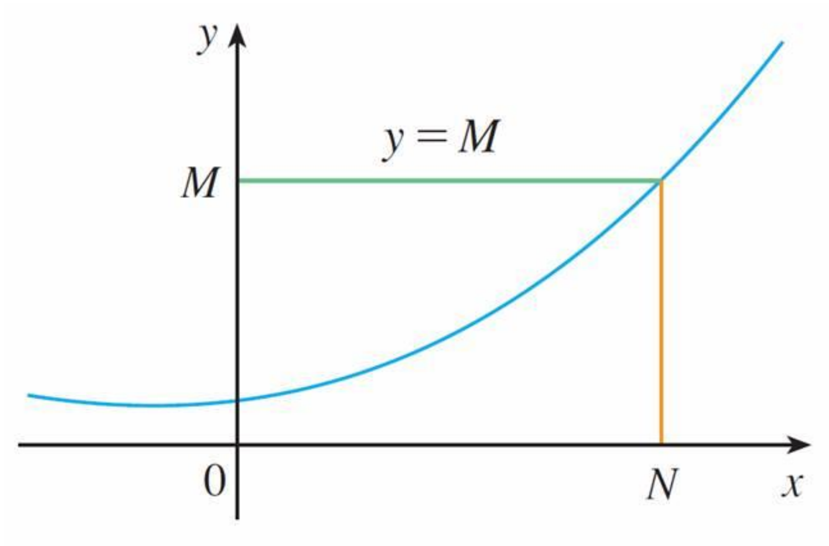
下圖大致上刻畫出，在不同的誤差容忍度 ε 時，我們可以取到可以滿足誤差的 N 的情形：



圖十八

在無窮遠處的極限之精確定義

最後，在無窮遠處趨近無窮大值的極限也可以用嚴格的語言寫下「只要取 x 足夠大， f(x) 的函數值可以任意的大」這件事情，如下圖所刻畫：



$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

圖十九

在無窮遠處的極限之精確定義

我們最後作一個定義：

[定義]

令 f 為一實函數定義域包含 (a, ∞) 。
我們說 $f(x)$ 在 x 趨近正無窮大時，趨近無窮大 ，表示給定任意大的 $M > 0$ ，存在 N 夠大使得若 $x > N$ 則有 $f(x) > M$ 。

同理，若趨近負無窮大，則是定義改成 $f(x) < -M$ 即可。
而若是 x 趨近負無窮大，則在定義中改成 $x < -N$ 即可。