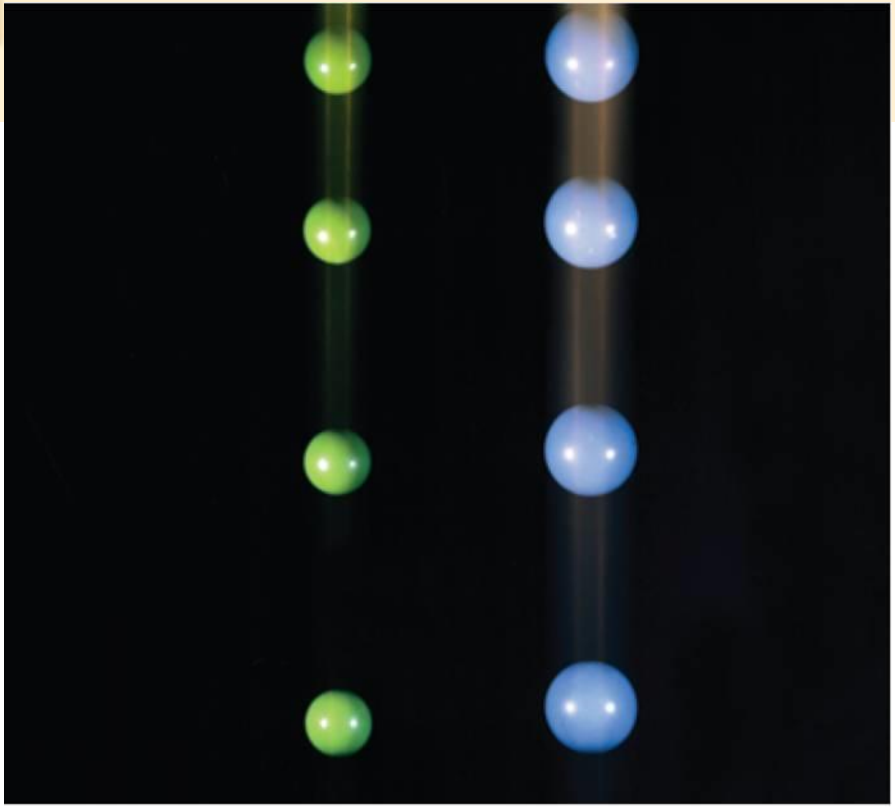
2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.5 函數的連續性

函數的連續性

我們常看到：一個函數 f(x) 在 x 趨近 a 的極限，通常是在該點的函數值 f(a) 。而滿足這樣好性質的函數，我們會說它**在 a 點連續 (continuous at a)** 。

我們後續會給一個「連續」在數學上的定義，並且討論與一般我們在語言上所認知的連續的相關性。

[定義] 我們說 f(x) 在 a 點連續 (f(x) is continuous at a) 表示

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

函數的連續性

注意到在前述的定義中， f(x) 在 a 連續隱含了三件事情：

1. $f(a)$ 是有定義的 (表示 a 落在 f 的定義域)

2. $\lim_{x \to a} f(x)$ 極限存在

3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 極限存在且跟函數值相等。

另外，從極限的定義來看： f(x) 在 a 連續，表示 x 在趨近 a 的時候 f(x) 的值會很靠近 f(a) 。

因此連續函數的特徵便是，當我們可以控制 x 有小變動時，$f(x)$ 的值也會有小的變動。

函數的連續性

更進一步來說，我們只要保證 x 的變動足夠小，則 f(x) 的變動就可以任意地小。

相反的， f(x) 在 a 的附近都有定義，我們**說 f(x) 在 a 不連續，(f is discontinuous at a)** 或者**說 f(x) 有一不連續點 a (f has a discontinuity at a)** ，表示 f(x) 不是在 a 連續。

連續性或者不連續在物理問題中都很常見，例如：交通工具的位移跟速度都是時間的連續函數；而電流在開關前後便有不連續的情形。

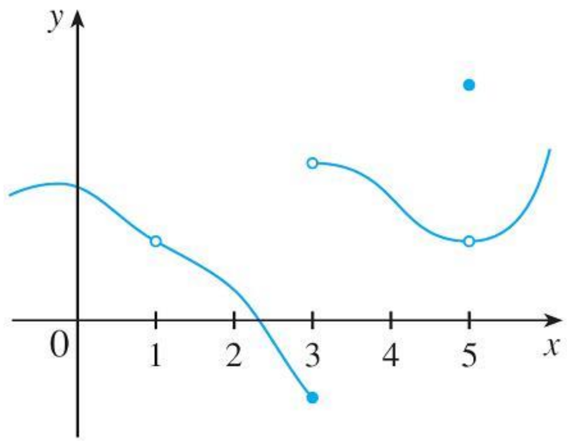
函數的連續性

從幾何上看，一個在區間上的每一點都連續的函數，其函數圖形沒有分斷。直觀上，這樣的連續圖形我們可以一筆劃完成不必離開紙面。

這也同時是我們平常所認知的「連續」的語意。

範例一

圖二為 f(x) 的函數圖形，試問 f(x) 在哪些點不連續？



圖二

解:

首先我們可以先確認在 x = 1 時， f(x) 並不連續。主要的理由當然是 f(x) 在 x = 1 時沒有定義。

範例一 / 解

cont'd

另外，我們可以看到當 x = 3 時，圖形有很明顯的斷點，但這裡的不連續理由是 f(x) 在 x 趨近 3 的極限不存在（其左、右極限不同），即使 f(3) 有定義。

最後，我們看 x = 5 。此時 f(5) 有定義且極限 $\lim_{x \to 5} f(x)$ 存在，但極限並不等於函數值：

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

因此 f(x) 在 5 不連續。

範例二

試舉出下列函數的不連續點。

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{if } x \neq 2 \\ 1 & \text{if } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

解:

(a) 注意到 f(x) 在 x = 2 時沒有定義，因此 2 為不連續點。

而除了 2 以外的其他點均連續，我們稍後會有相關的證明。

範例二 / 解

cont'd

(b) 即使 $f(0) = 1$ 有定義，但當 x 趨近 0 時的極限不存在：

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

因此 f(x) 在 x = 0 時不連續。當 x 不為 0 時 f(x) 均為好的函數，因此為連續。

(c) $f(2) = 1$ 有定義，且極限存在：

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2}$$

範例二 / 解

cont’d

$$= \lim_{x \to 2} (x + 1)$$

$$= 3$$

但極限值並不等於函數值

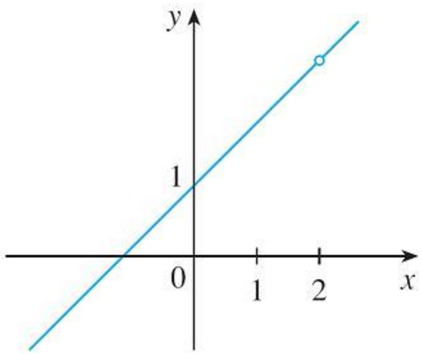
$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

因此 f(x) 在 2 不連續。

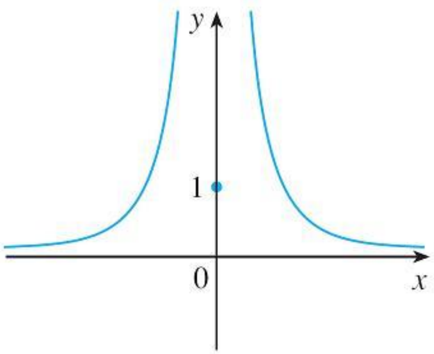
(d) 高斯階梯函數 *f*(*x*) = $[\![x]\!]$ 會在所有的整數點不連續，由於 $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ 的極限不存在。

函數的連續性

下面給出範例二的一些函數圖形。



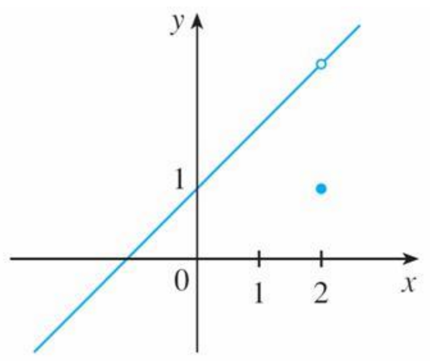
(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



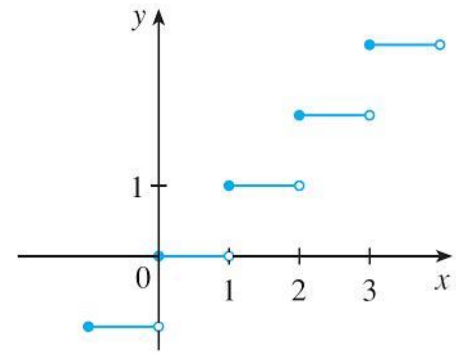
(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$

圖三 (a), (b)

函數的連續性



(c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{if } x\neq 2 \\ 1 & \text{if } x=2 \end{cases}$



(d) $f(x)=[\![x]\!]$

圖三 (c), (d)

函數的連續性

在這些例子中，我們發現函數圖形在這些不連續點會有缺漏或者跳躍點，沒有辦法一筆劃完成。

另外注意到在 (a) 跟 (c) 的情形，函數在不連續點附近的左、右極限均存在，此時我們會稱這類型的不連續點為**可去不連續點 (removable discontinuity)** ，若我們可重新在該點定義 f(x) ，使左、右極限與函數值相等，則不連續點就被移除了。

(b) 中的不連續點為**趨近無窮大值的不連續點 (infinite discontinuity)** ，而 (d) 中的不連續點則稱為**跳躍不連續點 (jump discontinuity)**。

函數的連續性

與連續相同，我們也可以額外定義函數的單邊連續性。定義如下：

[定義]

函數 f(x) 若在 a 點右連續，表示 f(x) 在 a 點的右極限等於其函數值 f(a) ：

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$ 。

f(x) 在 a 點左連續，則表示

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

[定義]

我們說 f(x) 在區間 I 上連續，表示 f(x) 在 I 上任一點均連續，而在此區間的端點左連續或者右連續。

函數的連續性

與極限的情況相同，函數經過四則運算後也能保持其連續性，因此我們不必反覆利用連續的定義檢驗，我們有如下定理：

[定理]

若 f 跟 g 均在 $x = a$ 連續，且 c 為常數，則下列函數也在 $x = a$ 時連續：

1. $f + g$　　2. $f – g$　　3. cf
4. fg　　5. f/g, 若$g(a) \neq 0$

函數的連續性

從前述的定理，若 f, g 是在一整個區間上連續，則 f + g, f – g, cf, fg, f/g (若 g 在區間上恆不等於 0) ，也會在整個區間上連續。

同樣也跟極限一樣，由 x 的四則運算所構成的多項式與有理式函數，都在其定義域上連續，我們有以下定理：

[定理]

(1) 若 f(x) 為多項式，則 f(x) 在整個實數上均連續。
(2) 若 f(x) 為有理函數，則 f(x) 在其定義域上連續。

函數的連續性

我們舉一些例子，例如半徑為 r 的球體，其體積對半徑的函數為 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，是一個 r 的多項式。

同樣，從地面以初速 50 ft/s 往上丟的球，其高度所滿足的等加速度曲線，函數式為 $h = 50t - 16t^2$ ，同樣也是多項式函數。

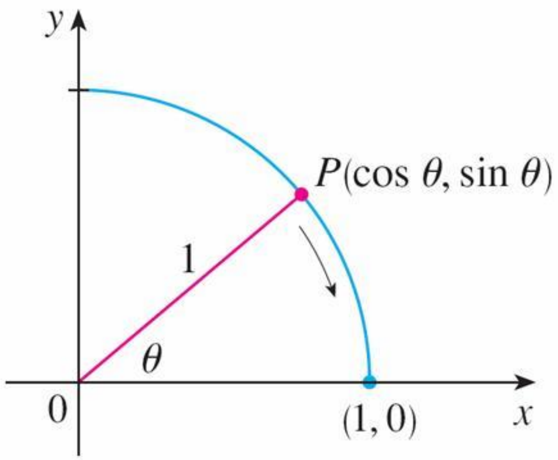
因此我們可以知道球體體積 V 對半徑 r ，等加速度運動中的物體對時間 t ，這兩種函數均為連續函數。

函數的連續性

另外，一些我們熟悉常用的函數也會是連續函數。

從右下圖觀察，圓的圖形以及其上點的座標參數式可以寫成角度的 cosine 值與 sine 值，由圖形的連續性我們可以得知 sine, cosine 都是連續函數。

當角度 $\theta \to 0$ ，我們可以看到點 P 趨近 (1, 0) ，因此可知道座標函數分別的極限為 $\cos\theta \to 1$, $\sin\theta \to 0$ 。



圖五

函數的連續性

因此

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$

而函數值 cos 0 = 1, sin 0 = 0 ，所以由 $\boxed{6}$ 我們可以知道 cos(x) 跟 sin(x) 在 x= 0 的時候連續。再由 cosine, sine 的合角公式可知，

sin(x+a) = sin x cos a + sin a cos x,

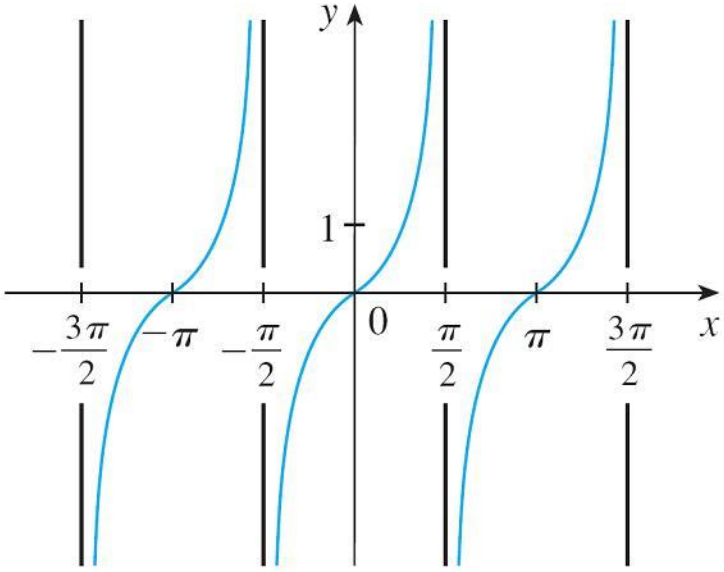
cos(x+a) = cos x cos a – sin x sin a,

其值是由 sine, cosine 四則運算後所組成，因此 sine, cosine 的函數值在任意點 a 均為連續。

更進一步， $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 也是連續函數，除了 cos x = 0 的點。

函數的連續性

cos x 的零點發生在$\pi/2$ 的奇數倍，因此 y = tan x 會有無窮多個無窮大值的不連續點，發生在 $x = \pm\pi/2, \pm3\pi/2, \pm5\pi/2$ 等地方，如下圖



$y = \tan x$

圖六

函數的連續性

所以，現在我們知道了更多好的函數了：

[定理]

下列函數在其定義域上均為連續函數：

(1) 多項式函數　　(2) 有理函數

(3) 開 n 次方根函數　　(4) 三角函數

為了從已知的連續函數得到更多的連續函數，我們考慮各種函數的合成，有下面的定理：

[定理] 若 f(y) 在 y = b 連續，而 $\lim_{x\to a} g(x) = b$，則

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)$$

換言之，即極限的運算可以代入連續函數內。

函數的連續性

從直覺上來說，前述的定理我們可以想像成，只要 x 夠靠近 a ，則由極限定義可知 $g(x)$ 夠靠近 b ，而此時 $f(g(x))$ 也就夠靠近 $f(b)$ 。我們改寫成兩個連續函數的合成形式：

[定理]

若 $f(y)$ 在 $y = b$ 時連續， $g(x)$ 在 $x = a$ 連續且 $g(a) = b$ ，
則合成函數 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 在 $x = a$ 連續。

連續函數有很多好的性質，其中一個重要的性質便是下述的定理：

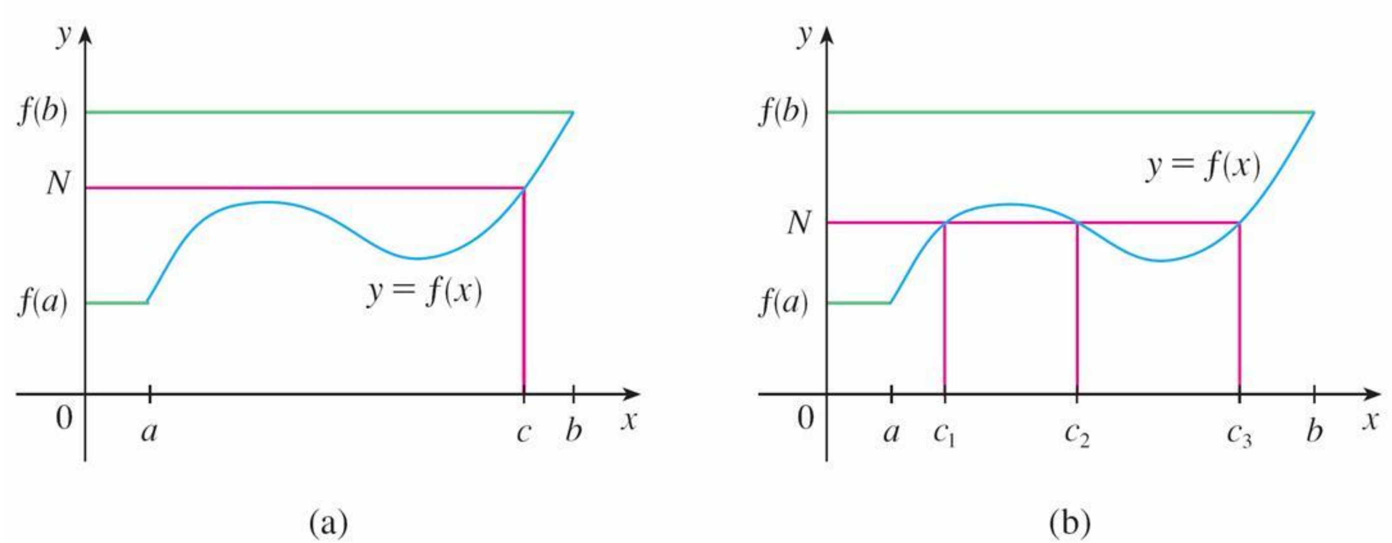
[中間值定理]

若 $f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 上連續，且令 N 為介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 間的數，則存在 (a, b) 中一數 c 滿足 $f(c) = N$ 。

函數的連續性

中間值定理保證一個連續函數會通過其兩個端點值之間的所有數值，不過連續函數實際的行為怎麼通過我們並不知道，如下圖刻畫。

注意到 N 這個值在圖 (a) 經過了一次，而在圖 (b) 經過了三次。

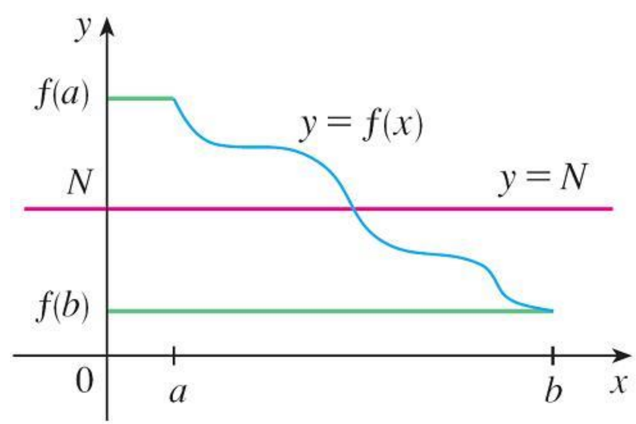


圖八

函數的連續性

回想關於連續函數的幾何直觀，一個連續函數的函數圖形不會有洞跟斷點，所以很直觀的我們可以相信中間值定理保證函數會通過兩端值中間所有的值至少一次。

函數通過某些值我們可以用這樣的術語來刻劃：若給定一條水平直線 $y = N$ ， N 直落在兩端值的水平線 $y = f(a)$ 跟 $y = f(b)$ 之間如下圖所示，則若 $f(x)$ 是連續函數， $y = f(x)$ 的圖形會與 $y = N$ 相交至少一點。



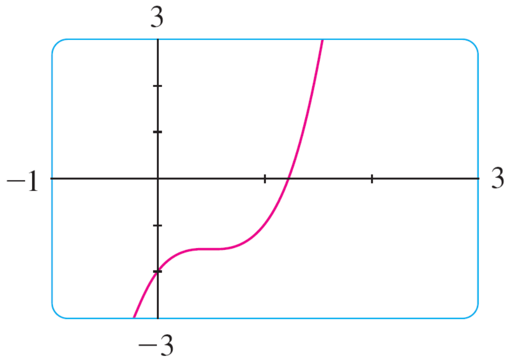
圖九

函數的連續性

函數的連續性這個條件在中間直定理中是必要的，我們可以找到很多反例，如果函數不連續。

中間值定理的一個應用是我們可以利用定理來找連續函數的根。

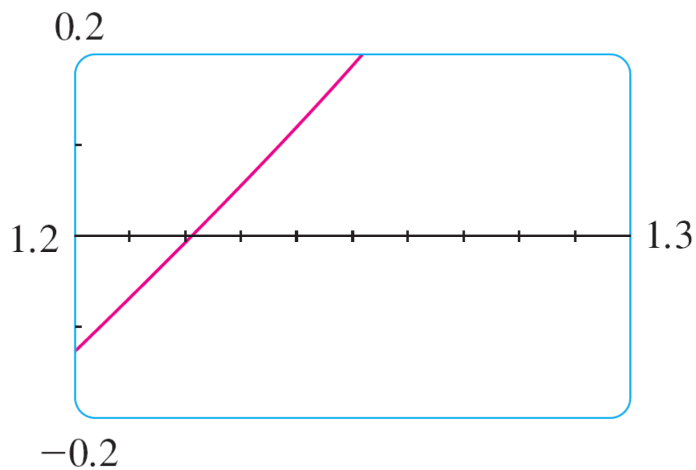
當我們遇到一個函數，我們可以利用電腦繪圖刻畫出函數圖形，如右圖，是一個在 [-1,3] x [-3,3] ，我們可以看出來，函數的圖形在經過 x 軸的地方大約在 x = 1 到 x= 2 之間。



圖十

函數的連續性

圖十一是當我們把範圍縮小到 [1.2, 1.3] x [–0.2, 0.2] 的圖形。



圖十一

事實上中間值定理是保證在我們在縮小範圍時，可以確定交點仍在圖形的這個範圍內的工具之一。當我們在找根的時候，確認兩端的點其函數值分別是正數與負數，那麼在這個範圍內至少存在一個根。

函數的連續性

除了勘根以外，中間值定理也能夠保證，當我們計算兩端的函數值，其中間的函數值大致上分布在兩端值之間。

也因此當電腦在繪圖時，電腦只需要計算足夠多點

$$\{x_1,x_2,x_3,x_4,\ldots,x_N\}$$

的函數值，而且每個 x_i 到 x_{i+1} 之間的距離夠精細，那麼我們便可以將這些點 $\{(x_i, f(x_i)) \mid i = 1,2,3,\ldots,N\}$ 中每相鄰兩個點以直線相連，便可以用折線圖大致上逼近函數的圖形。