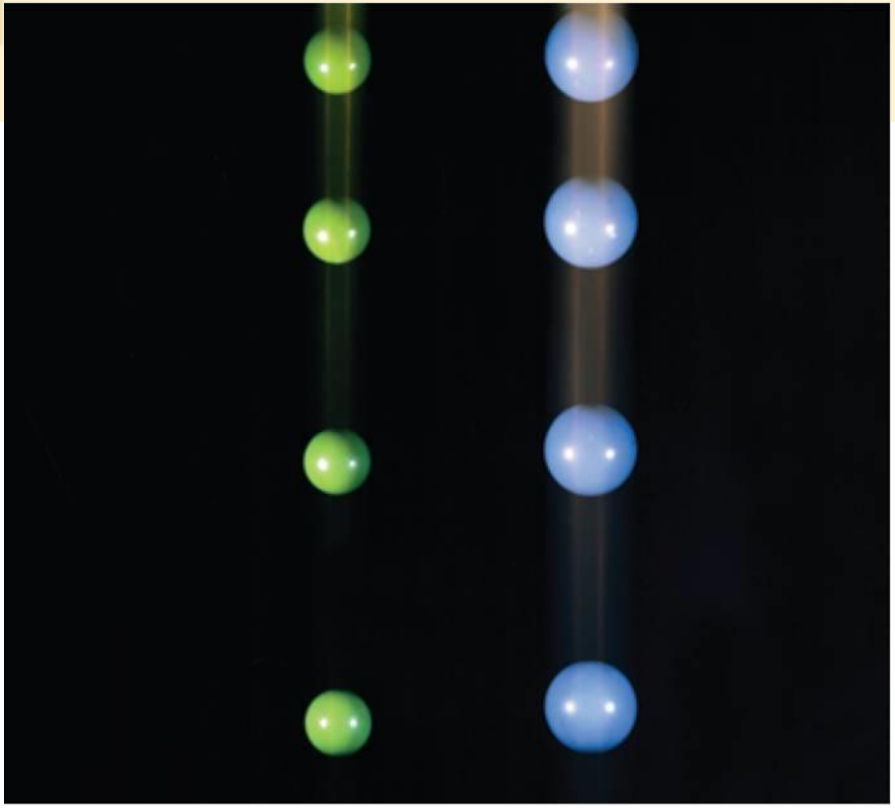
2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.3 極限的運算

極限的運算

在這一節裡我們會介紹極限的四則運算：

Limit Laws Suppose that c is a constant and the limits

$$\lim_{x\to a} f(x) \qquad \text{and} \qquad \lim_{x\to a} g(x)$$

exist. Then

1. $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

2. $\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

3. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \lim_{x\to a} f(x)$

4. $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ if $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

極限的運算

我們簡單講述一下運算的法則：

極限的加法 1. 兩函數相加取極限等於極限值相加。

極限的減法 2. 兩函數相減取極限等於極限值相減。

極限與常數的乘法 3. 函數乘上常數倍後取極限，等於其極限值乘上該常數。

極限的運算

極限的乘法　　**4.** 函數相乘後取極限等於極限值相乘。

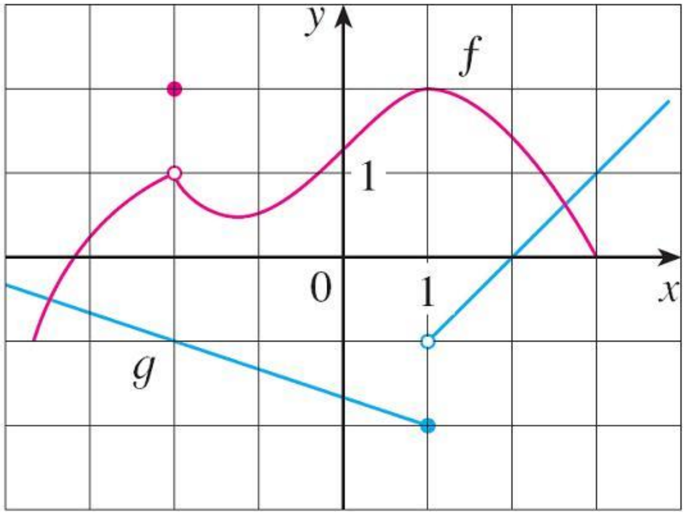
極限的除法　　**5.** 函數相除後取極限，若分母的極限不為 0 ，其值等於極限值相除。

舉例說明，若 f(x) 很靠近 L ， g(x) 很靠近 M ，則我們自然很合理地可以這麼說： f(x) + g(x) 很靠近 L + M 。

範例一

利用極限的運算，給定下圖中的函數 f(x) 跟 g(x) ，試計算下列極限之值：

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$　　(b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$　　(c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$



圖一

範例一 (a) / 解

從圖我們可以看出， f(x) 和 g(x) 在 x 趨近 -2 的極限分別為

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to -2} g(x) = -1$$

因此從極限的加法、與常數的乘法可以知道：

$$\lim_{x\to -2}[f(x) + 5g(x)] = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2}[5g(x)]$$ (極限加法)

$$= \lim_{x\to -2} f(x) + 5\lim_{x\to -2} g(x)$$ (與常數乘法)

$$= 1 + 5(-1)$$

$$= -4$$

範例一 (b) / 解

cont'd

接著我們看 x 趨近 1 的極限，顯然 f(x) 會趨近 2 ，但是 g(x) 的左右極限並不一樣：

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

這個時候就沒有辦法用極限的乘法了，不過我們還是可以考慮單邊極限的乘法：

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

所以顯然乘法的左、右極限值不同，其極限不存在。

範例一 (c) / 解

cont'd

再來，觀察 x 靠近 2 的極限：

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

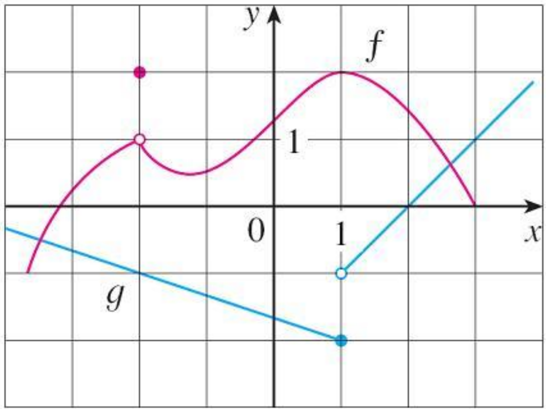


Figure 1

注意到在分母的 g(x) 其極限值為 0 ，因此無法使用極限的除法。

而 f(x)/g(x) 的極限也因此不存在，由於 g(x) 越靠近 0 ，而 f(x) 趨近一個非 0 的定值，這個比值 f(x)/g(x) 的左右極限會分別趨近正負無窮大。

極限的運算

重複使用極限的乘法，將 g(x) 都以 f(x) 替換，會有以下的運算：

極限的冪次

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ where n is a positive integer

在利用這些運算之前，我們先看這兩個簡單的極限：

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

這個結果很直覺，只要觀察 y = c, y = x 兩個函數的圖形就可以輕鬆地驗證。

極限的計算

我們考慮 f(x) = x ，利用極限的冪次運算以及 x 趨近 a 的結果可以得到：

9. $\displaystyle\lim_{x \to a} x^n = a^n$ where n is a positive integer

依此類推，我們對於開 n 次方根也有類似的結果：

10. $\displaystyle\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ where n is a positive integer

(If n is even, we assume that $a > 0$.)

更一般的情況我們有開方根的極限運算：

開方根的極限

11. $\displaystyle\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ where n is a positive integer

[If n is even, we assume that $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

極限的運算

由前面推導，我們可以發現只要分母不會趨近 0 ，取 x 趨近 a 的極限時，可以直接代入 a 值計算。因此有這樣的定理：

[定理]

若 f(x) 為 x 的多項式或者有理式，且 a 落在 f 的定義域內，
則 f(x) 在 x 趨近 a 的極限可以直接代入 a ，即 f(a) ，也就是

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

其實不只是多項式滿足這個定理，以後我們遇到這樣的函數，即取 x 趨近 a 的極限等於直接代入 a 計算值的函數，都稱這個**函數在 x = a 連續**。

更一般的情況，若對所有不等於 a 的 x 均有 f(x) = g(x) ，則若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 極限存在，則 $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ 。

極限的運算

回憶上一節，我們知道：函數的極限存在，等價於，其左、又極限存在且極限值相同。

1 Theorem $\lim_{x\to a} f(x) = L$ if and only if $\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$

所以計算單邊極限的結果也是很重要的。

而就像前面的例題一樣，我們也常應用極限的運算在單邊極限上。

例如： $\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = \lim_{x\to a+} f(x) \lim_{x\to a+} g(x)$

當右邊兩個單邊極限都存在的時候。

極限的運算

極限也可以比較，我們有以下兩個定理：

[定理]

若 x 在 a 附近但 $x \neq a$ 時，函數 f, g 均滿足 $f(x) \le g(x)$ ，且在 x 趨近 a 時， $f(x), g(x)$ 的極限均存在，則

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

[夾擠定理(Squeeze Theorem)]

假設 x 在 a 附近但 $x \neq a$ 時，函數 f, g, h 均滿足 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ，若在 x 趨近 a 時，$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ ，則

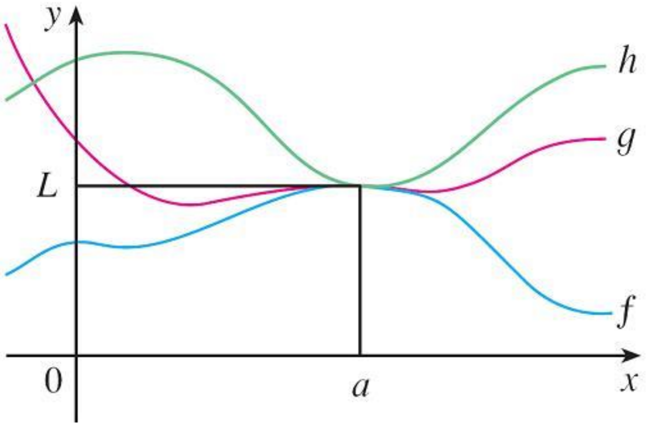
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

極限的運算

夾擠定理，有時候我們也稱為三明治定理 (Sandwich Theorem) 。這個定理的內涵我們可以刻畫如下圖：

我們說 $g(x)$ 在 a 的附近被 f(x) 跟 h(x) 夾擠，表示在 x 趨近 a 時， f(x) 跟 h(x) 的極限值存在且相等。

假設 f(x) 跟 h(x) 的極限值同為 L ，則由於 $f(x) \le g(x) \le h(x)$ ，g(x) 在 x 趨近 a 的極限值被迫一定要是 L 。



圖七