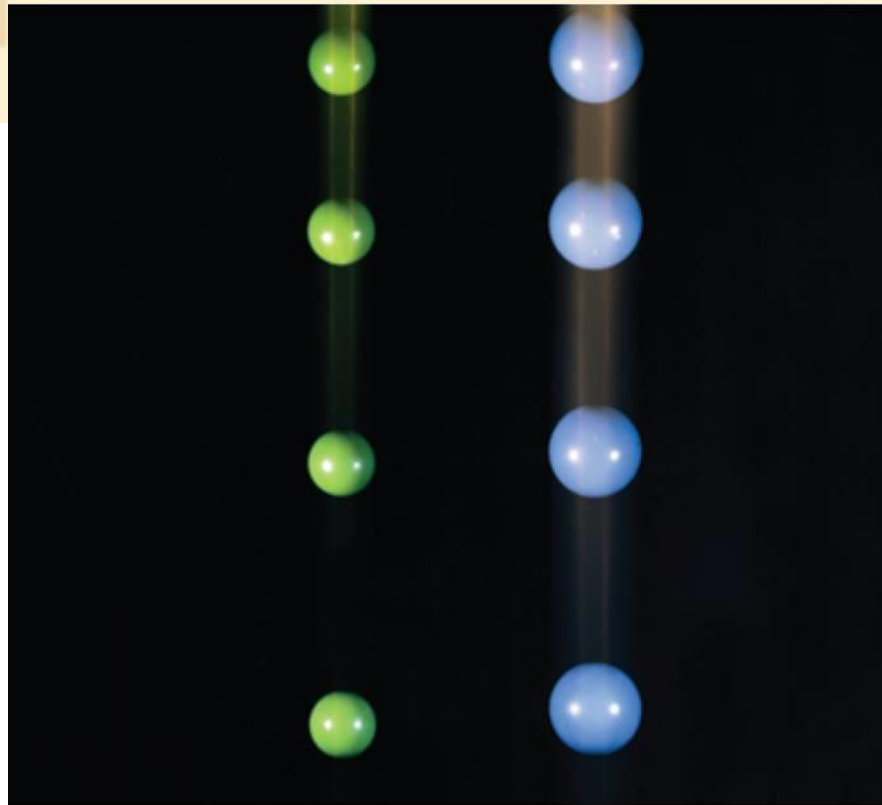


2

極限 (limits) 與 導數 (derivatives)



2.2

函數的極限

函數的極限

在前一節的介紹中，我們發現，求曲線的切線或者移動物體的速度等等，都需要計算極限，不管是藉由電腦數值的計算或者從幾何圖形上著手。

在接下來的這一小節中，我們首先來看 $f(x) = x^2 - x + 2$ ，在 x 靠近 2 附近的行為。

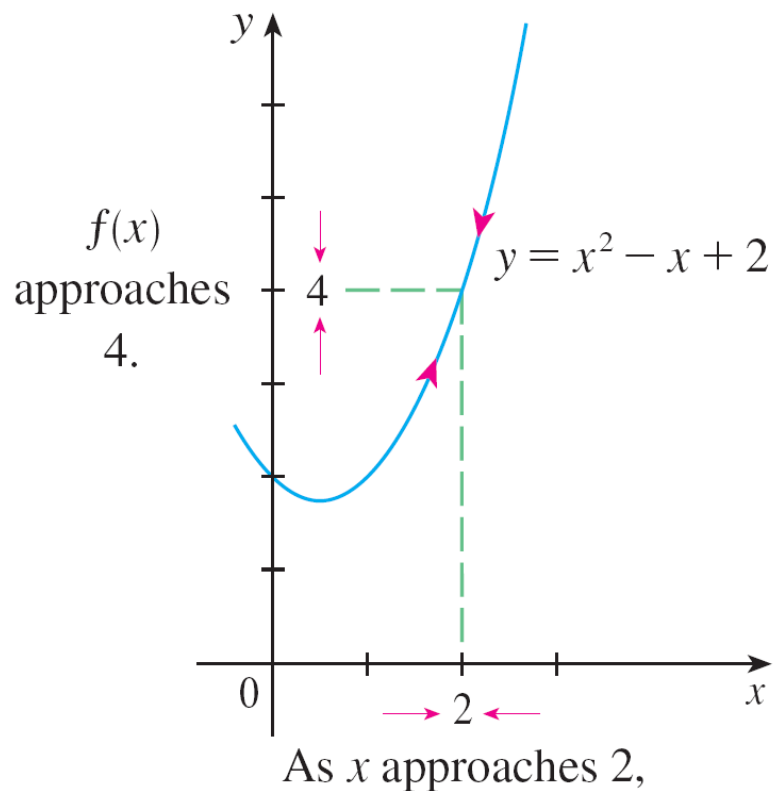
函數的極限

下表列出了 x 在 2 附近，但不等於 2 時，所對應到的函數值 $f(x)$ 。

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

函數的極限

如下圖，我們可以從 $f(x)$ 的函數圖形來看在 x 靠近 2 時函數的值會靠近 4。



圖一

函數的極限

事實上，我們可以藉由讓 x 夠靠近 2，使得 $f(x)$ 的函數值能夠任意地靠近 4。

此時我們便說： $f(x) = x^2 - x + 2$ 在 x 趨近 2 時的極限為 4。
並用以下符號表示：

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

函數的極限

更一般的情況，我們定義極限如下：

[定義]

我們說 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時的極限為 L ，表示：
只要 x 夠靠近 a 但不等於 a 時， $f(x)$ 的值可以任意靠近 L 。

其符號記為： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

在這個定義中，極限的意思可以想成：只要我們可以控制 x 很靠近 a ，就保證可以讓 $f(x)$ 很靠近 L 。

函數的極限

我們也可以把極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

寫成其它的形式如下

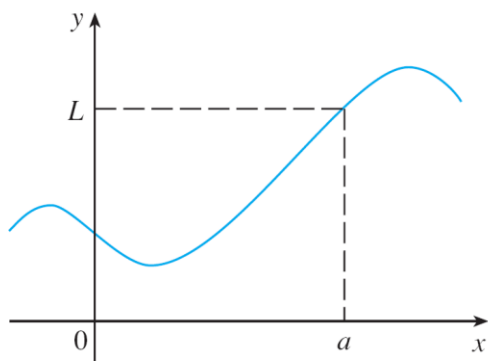
$$f(x) \rightarrow L \quad \text{as } x \rightarrow a.$$

這也表示：當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 的極限趨近 L 。

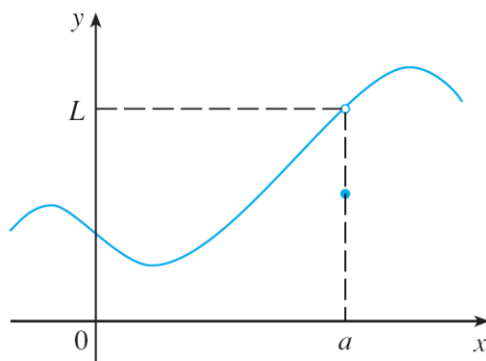
注意到，在極限的定義中我們只考慮在 a 附近的值，但不考慮在 a 點的函數值。甚至 $f(x)$ 在 a 點也可能沒有定義。

函數的極限

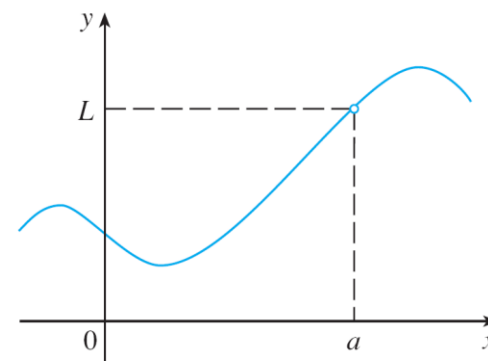
下圖的三個小圖分別是三個不同函數的圖形。注意到在 (c) 中， $f(a)$ 沒有定義；而在 (b) 中， $f(a)$ 的值定義在 L 的下方。但在這三個例子當中，函數在 a 附近的極限行為是一樣的： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。



(a)



(b)



(c)

三個例子均為 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時的極限為 L

圖二

範例一

猜極限值： $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1}$.

解：

注意到雖然 $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ 在 $x = 1$ 時並沒有定義，但我們從極限的定義可以知道，計算 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 只需要在 a 附近的函數值，不需要 $x = a$ 。

範例一 / 解

cont'd

下表給出了 x 在 **1** 附近，但不等於 **1** 時的函數值 $f(x)$
(精確度到小數後第六位)

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

觀察上表的趨勢，我們大概可以猜極限為：

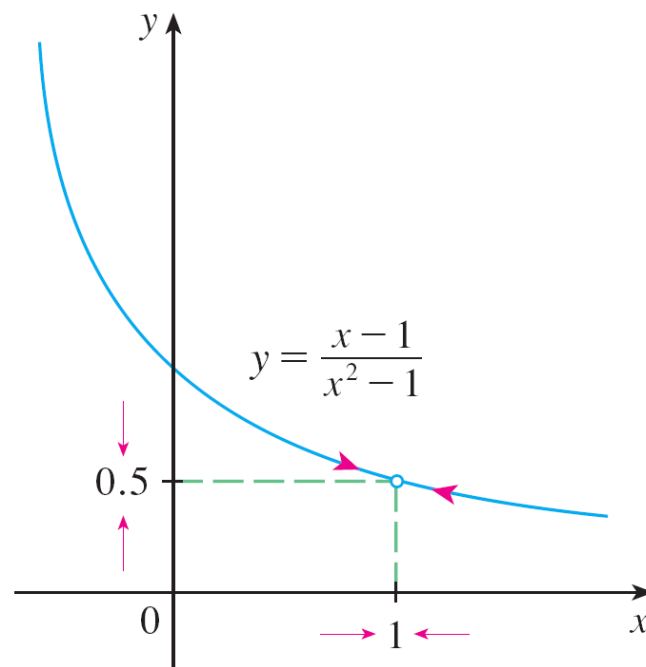
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$

函數的極限

右下圖為前述範例一的 $f(x)$ 函數圖形。

現在我們稍作一些改變，定義 g 如下：

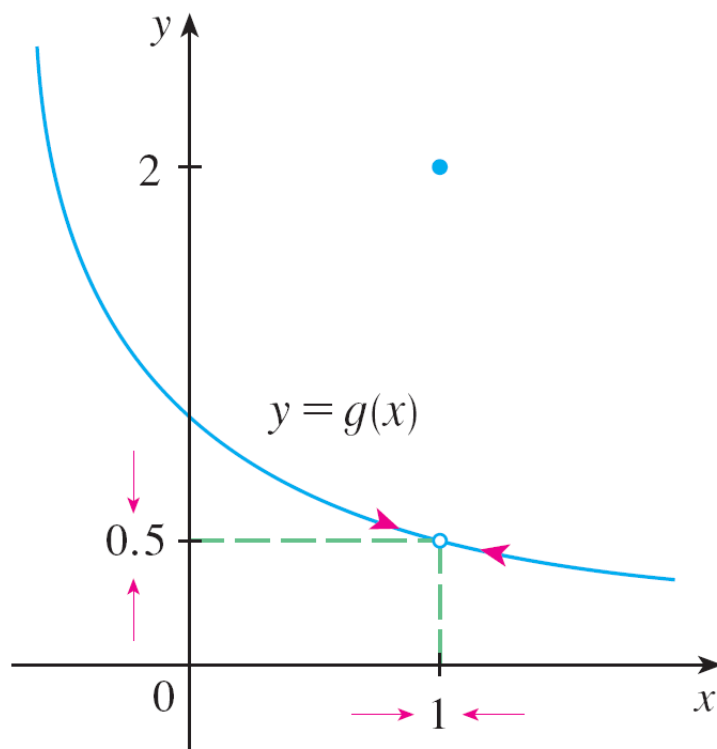
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1} & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$



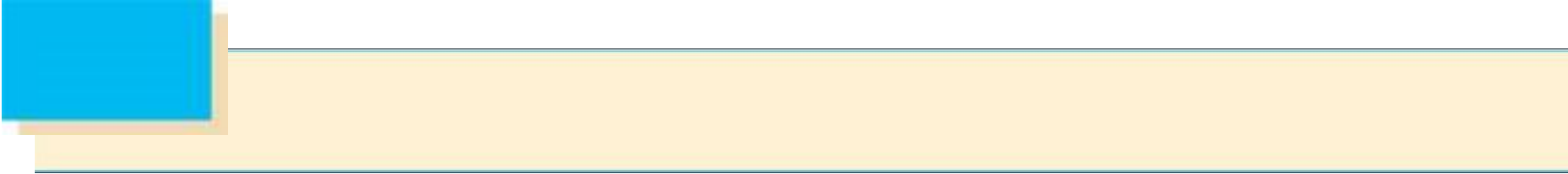
圖三

函數的極限

現在新定義的函數 g 在 $x = 1$ 有定義了，其圖如下。我們還是可以發現 $g(x)$ 在 x 趨近 1 的極限值與 $f(x)$ 的情形一樣。



圖四



單邊極限

單邊極限

我們定義 H 如下：

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 0 \\ 1 & \text{if } t \geq 0 \end{cases}$$

注意到在 $t < 0$ 的部分， $H(t)$ 在 t 自左邊趨近 0 的極限為 0 ；
而在 $t > 0$ 的部分， $H(t)$ 在 t 自右邊趨近 0 的極限為 1 。

從左右兩邊各自趨近的極限都存在，但其值不同。

單邊極限

這種情況我們先以符號記作：

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$$

這個符號“ $t \rightarrow 0^-$ ”，表示我們只從比 0 小的地方趨近 0 ；
同樣的，“ $t \rightarrow 0^+$ ”表示 t 只能從比 0 大的地方靠近 0 。

單邊極限

我們對從不同方向計算得來的極限作一個定義：

[定義]

我們稱 $f(x)$ 在 x 趨近 a 的左極限 (left-hand limit) 為 L ，表示當 x 夠靠近 a 且 x 比 a 小時， $f(x)$ 可以任意靠近 L 。

其符號定義為 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 。

注意到這跟原先的極限定義相比，差別就在於 $x \rightarrow a^-$ ，意即 x 趨近時只考慮比 a 小的 x 。

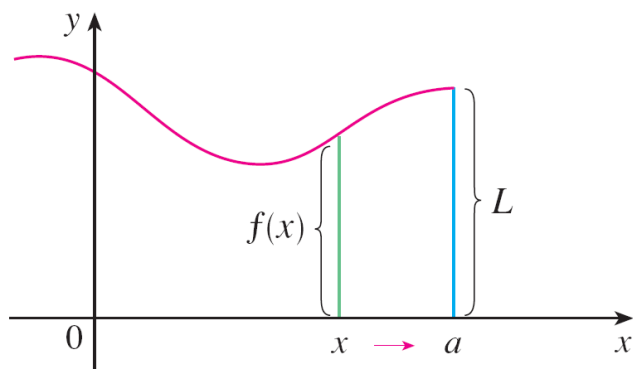
單邊極限

同樣，右極限 (right-hand limit) 的意思便是，當 x 夠靠近 a 且 x 要比 a 大時， $f(x)$ 可以任意靠近 L 。此時符號記作：

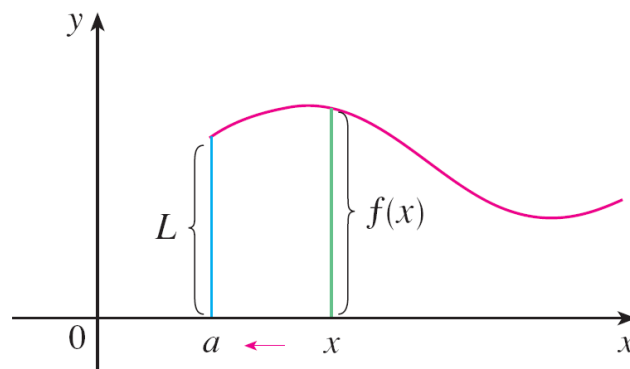
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

其中“ $x \rightarrow a^+$ ”表示我們只考慮比 a 大的 x 。

下圖九分別表示 x 自 a 的左邊與右邊趨近時 $f(x)$ 的情形。



(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

圖九

單邊極限

比較極限的定義與左、右極限的定義，我們可以發現：

$$\boxed{3} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{if and only if} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

範例七

給定函數 $g(x)$ ，其函數圖形如下圖十，試判斷下列極限是否存在，若存在則求其值。

(a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

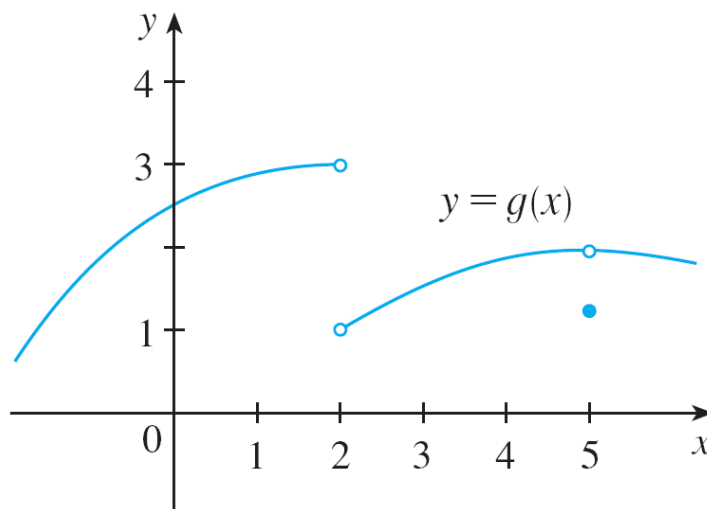
(b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 5^-} g(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} g(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 5} g(x)$



圖十

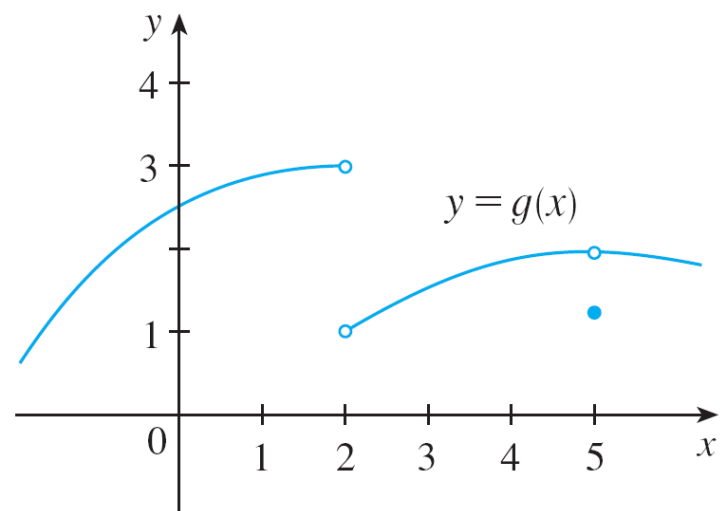
範例七 / 解

直接從圖觀察，當 x 分別從左邊與右邊趨近 2 時，其值分別趨近 3 與 1，因此

$$(a) \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 3$$

以及

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$



然而，左、右極限的值並不相同，因此我們可以知道

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ 極限並不存在。

範例七 / 解

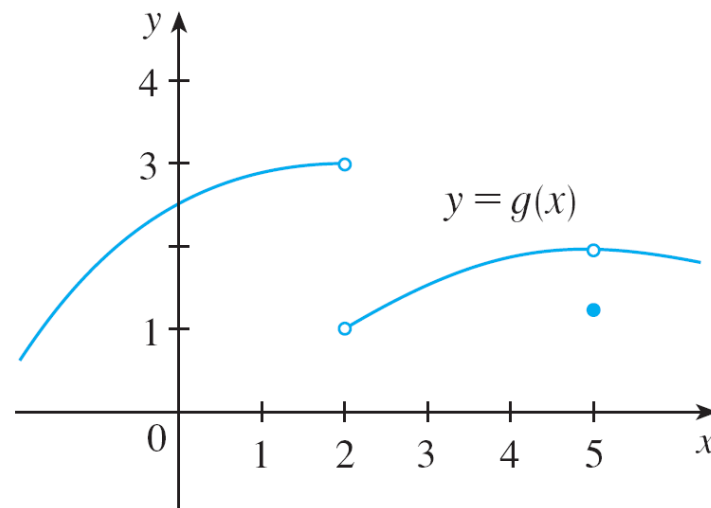
cont'd

同樣，在 $x = 5$ 的附近觀察函數圖形的行為，可知：

$$(d) \lim_{x \rightarrow 5^-} g(x) = 2$$

以及

$$(e) \lim_{x \rightarrow 5^+} g(x) = 2$$



而由於左、右極限都存在，且左右極限值相同，因此

$$(f) \lim_{x \rightarrow 5} g(x) = 2$$



趨近無窮大值的極限

趨近無窮大值的極限

[定義]

假設 f 在 a 的附近有定義，我們說 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時趨近無窮大，表示 $f(x)$ 的值可以任意大，只要當 x 夠靠近 a 但不等於 a 。

其符號記作： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

另外我們也可以將 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ 寫成：

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ 當 } x \rightarrow a$$

趨近無窮大值的極限

必須注意的是，這裡無窮大的符號 ∞ 並不是一個數，而這個趨近無窮的極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ，我們通常會念作

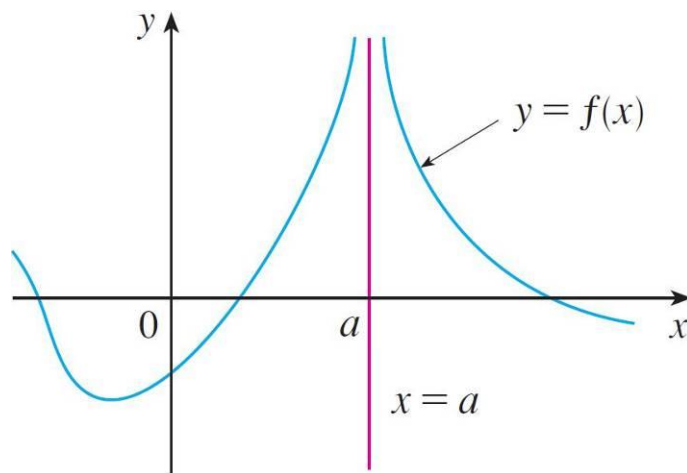
$f(x)$ 在 x 趨近 a 的時候會趨近無窮大，

或者

$f(x)$ 在 a 附近遞增無上界。

趨近無窮大值的極限

下圖是一個趨近無窮大的範例。具體來說就是只要足夠靠近 a ， $f(x)$ 就可以任意地大。

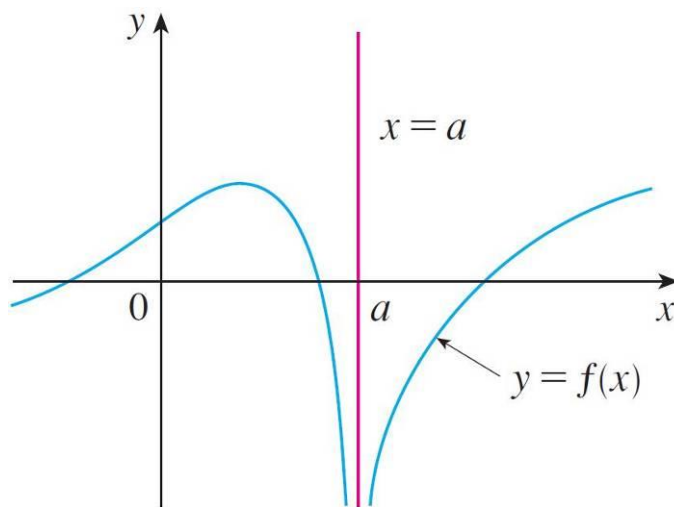


$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

圖十二

趨近無窮大值的極限

類似的，我們也可以定義趨近負無窮大。如下圖，只要 x 足夠靠近 a ，則 $f(x)$ 可以任意地小。



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

圖十三

趨近無窮大值的極限

實際作定義如下：

[定義]

假設 f 在 a 的附近有定義，我們說 $f(x)$ 在 x 趨近 a 時趨近負無窮大，表示 $f(x)$ 的值可以任意小，只要當 x 夠靠近 a 但不等於 a 。

其符號記作： $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

符號 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ，我們讀作 $f(x)$ 在 x 趨近 a 的時候會趨近負無窮大。下面是一個例子

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

趨近無窮大值的極限

還有分別趨近正、負無窮大的單邊極限也可以用同樣的方式定義：

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

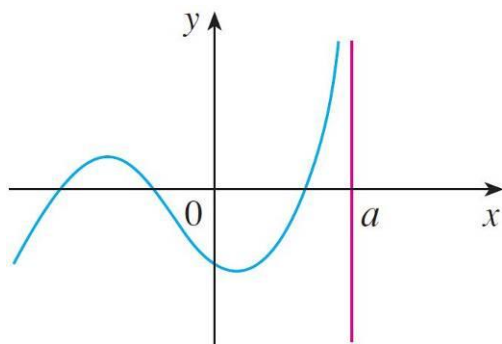
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

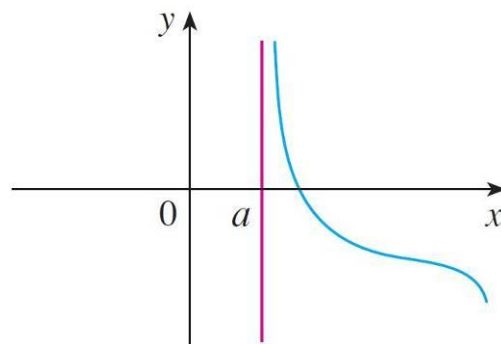
回憶“ $x \rightarrow a^-$ ”的符號表示在 x 趨近 a 的時候，我們是考慮 $x < a$ 的部分。同樣，“ $x \rightarrow a^+$ ”表示我們只考慮 $x > a$ 的部分。

趨近無窮大值的極限

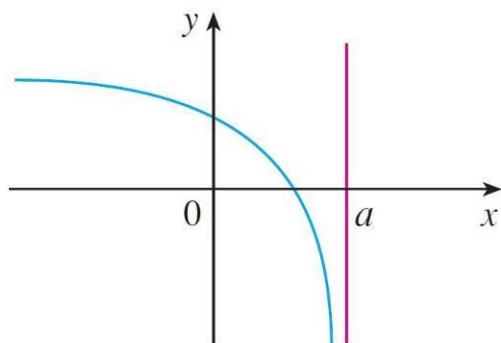
前述的四個情形可見下圖：



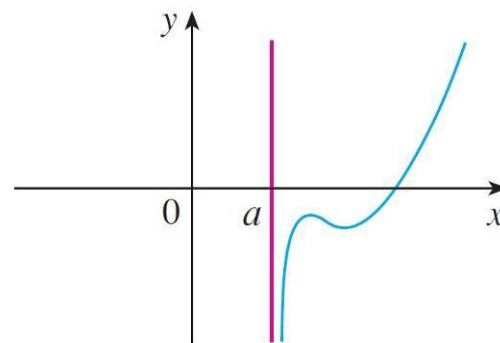
$$(a) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$$



$$(b) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$



$$(c) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$



$$(d) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

圖十四

趨近無窮大值的極限

我們可以發現前述的情況，當 x 越靠近 a ， $f(x)$ 的函數值增加或減少的越快，圖形的點 $(x, f(x))$ 越貼近鉛直線 $x = a$ 。

這時候我們稱此線為**鉛直漸近線 (vertical asymptote)**，定義如下。

[定義]

以下六種情況，我們稱直線 $x = a$ 為曲線 $y = f(x)$ 的鉛直漸近線：

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

範例十

求 $f(x) = \tan x$ 的鉛直漸近線。

解:

由於 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

因此可能的鉛直漸近線會發生在 $\cos x = 0$ 的地方。

事實上我們知道

$$\cos x \rightarrow 0^+ \quad \text{當 } x \rightarrow (\pi/2)^- ;$$

$$\cos x \rightarrow 0^- \quad \text{當 } x \rightarrow (\pi/2)^+$$

而 $\sin x$ 在 $x = \pi/2$ 附近恆正，我們可知

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

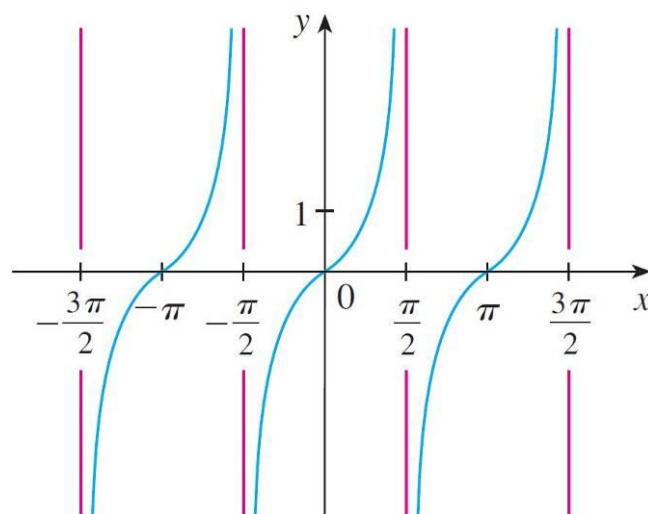
範例十 / 解

cont'd

因此 $x = \pi/2$ 為一鉛直漸近線。又我們知道 $\tan x$ 的周期為 π ，這表示

$$x = (2n + 1)\pi/2, \text{ 其中 } n \text{ 為整數,}$$

也是 $f(x) = \tan x$ 的鉛直漸近線。最後我們以下圖刻劃此結果



$$y = \tan x$$

圖十六