1

函數(functions)與模型(models)

1.6 反函數與對數函數

反函數與對數

下表一記錄了一百隻細菌在營養介質中培養，每小時過後的族群數量。

細菌的族群數量 N 為時間的函數我們記作 $N = f(t)$ 。

假設現在反過來看，有一位生物學家想關心到達某個數量 N 時的時間點 t 。換句話說，可以想像成 t 是數量 N 的函數。

t (hours)	$N = f(t)$ = population at time t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

數量 N 是時間 t 的函數
表一

反函數與對數

這個反過來視 t 為 N 的函數，我們稱為 f 的反函數 (inverse function) ，我們記作 f^{-1} 讀作 “*f* inverse” 。
因此這個函數 $t = f^{-1}(N)$ 就是指族群數量到達 N 時所需要的時間。

反查表一或者重新表列如右表二，我們可以得到相關數目所對應到的 f^{-1} 值。

例如 $f^{-1}(550) = 6$，因為 $f(6) = 550$

另外，不是所有的函數都存在反函數。我們後面會再說明。

N	$t = f^{-1}(N)$ = time to reach N bacteria
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

t as a function of *N*

Table 2

反函數與對數

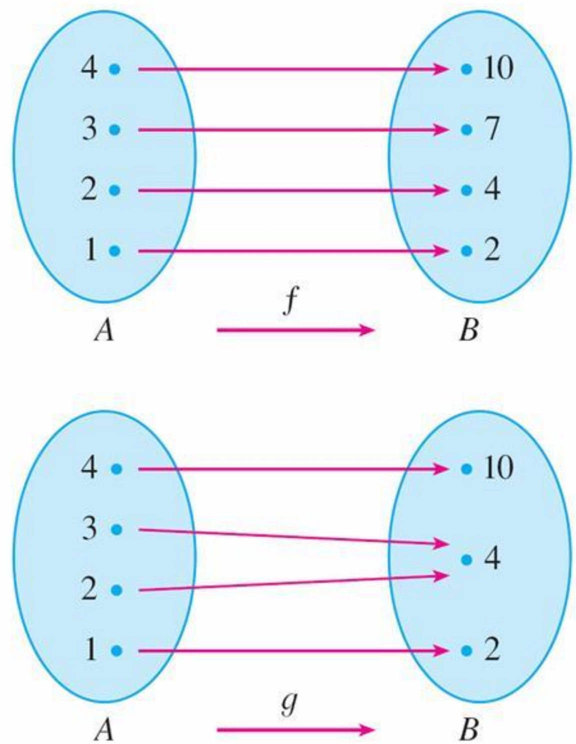
考慮下圖一的 f, g 函數的箭圖。

注意到 f 的對應不會打到同一個值兩次，也就是所有在 A 中經由 f 對應到的值都是不同的。
也就是

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{當} \quad x_1 \neq x_2 \text{ 時。}$$

而 g 則有 2, 3 都對應到 4 的情況。
用符號寫下來是

$$g(2) = g(3) = 4 \quad 。$$



f is one-to-one; *g* is not

Figure 1

反函數與對數

具有如前所述 f 性質的函數，我們稱為**一對一函數 (one-to-one function)** 。我們重新整理定義如下：

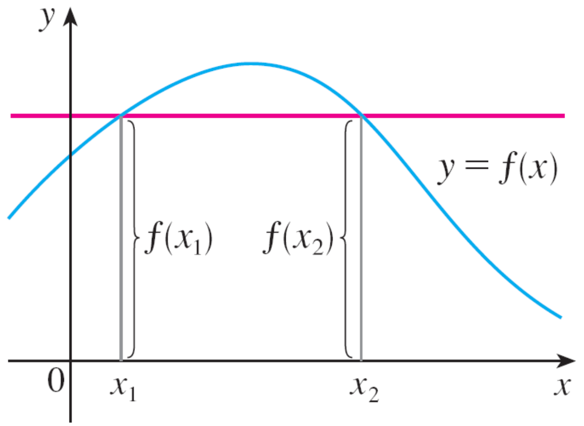
[定義] 我們稱 f 為一對一函數 (one-to-one, 1-1 function) 表示對任意定義域中的 $x_1 \neq x_2$ ，有

$$f(x_1) \neq f(x_2)$$ 。

反函數與對數

如右圖，一水平線與 f 的函數圖形相交超過一點，例如 x_1 及 x_2 所對應的函數值相等 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

因此 f 並非一對一函數。



此函數並非一對一，
由於 $f(x_1) = f(x_2)$.

圖二

如同以前驗證一圖形為函數圖形的方法，
我們可利用水平線從函數圖形來驗證函數是否為一對一。

> [水平線檢驗法] 一個函數為一對一函數，若且唯若，其函數圖形與任意水平線相交不超過一點。

範例一

試判斷函數 $f(x) = x^3$ 是否為一對一？

解一:

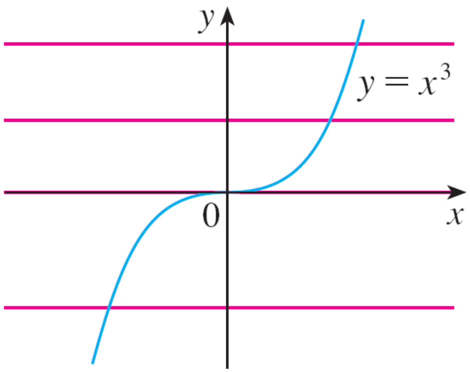
給定兩數 $x_1 \neq x_2$ ，若 $x_1^3 = x_2^3$，則利用立方差因式分解可得

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = 0$$

後者恆正，因此可推得 $x_1 = x_2$ ，矛盾。因此 $x_1^3 \neq x_2^3$ 。

解二:

觀察右圖，我們知道 $f(x) = x^3$ 的函數圖形恆為遞增，因此給定任意水平線，將與此函數圖形僅相交於一點。因此可知 f(x) 為一對一函數。



$f(x) = x^3$ 為一對一

圖三

反函數與對數

一對一函數的重要性，在於一對一的特性使這些函數具有反函數，反函數的實際定義如下

[定義] 給定 f 為一對一函數，其定義域為 A ，值域為 B ，則 f 的反函數定義為

$$f^{-1}(y) = x \quad \text{，若 } f(x) = y \text{ 。}$$

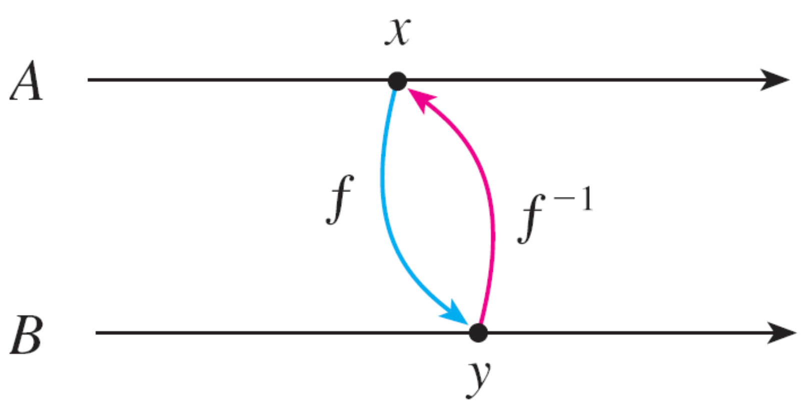
其定義域為 B ，值域為 A 。

這個定義的意思是說如果 f 將 x 對應至 y ，則 f^{-1} 會將 y 對應回 x 。

由於 f 為一對一函數，因此這個對應關係是唯一的。

反函數與對數函數

f 與 f^{-1} 相對應的關係我們以下面的箭圖表示：



圖五

另外注意到，f 與 f^{-1} 的定義域與值域恰恰相反：

$$\boxed{\begin{aligned} \text{domain of } f^{-1} &= \text{range of } f \\ \text{range of } f^{-1} &= \text{domain of } f \end{aligned}}$$

反函數與對數

舉例說明， $f(x) = x^3$ 的反函數即取三次方根 $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ，
這是因為：

若 $y = x^3$ ，則 $f^{-1}(y) = f^{-1}(x) = (x^3)^{1/3} = x$ 。

注意：

反函數的符號 f^{-1} 的 -1 常常與指數相混淆，因此在這裡我們特別定義 f^{-1} 的意義即為反函數。

而 $f(x)$ 的倒數，即 $f(x)$ 取指數為 -1 時，我們寫作 $[f(x)]^{-1}$ 。

範例三

給定函數 f ，在特定幾個數代入其值為 $f(1) = 5$ ， $f(3) = 7$，$f(8) = –10$ ，試求 $f^{-1}(7)$ ， $f^{-1}(5)$ 以及 $f^{-1}(–10)$ 。

解:

從上面的定義，我們只要將對應關係倒過來即可：

$f^{-1}(7) = 3$ 因為 $f(3) = 7$

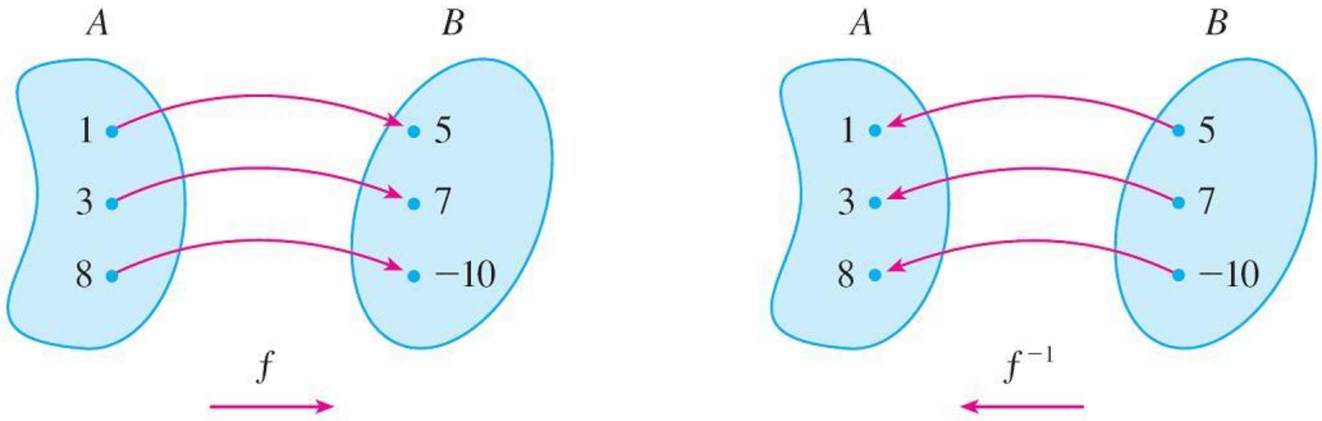
$f^{-1}(5) = 1$ 因為 $f(1) = 5$

$f^{-1}(–10) = 8$ 因為 $f(8) = –10$

範例三 / 解

cont'd

下面的箭圖解釋了此題中 f 與其反函數的對應關係。



反函數的作用將輸入與輸出對調。

圖六

反函數與對數

一般來說，我們將 x 這個符號用作為獨立變數，但當我們關注在反函數本身 f^{-1} 的時候，我們便將獨立變數 x 跟應變數 y 的角色互換：

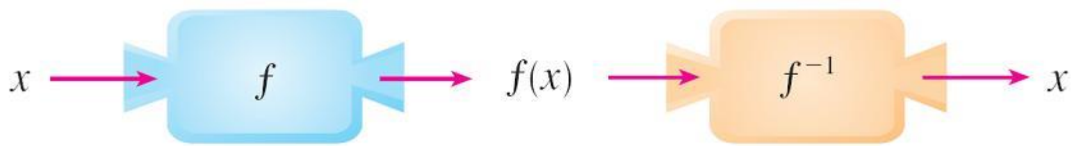
$$\boxed{f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x}$$

而利用原函數關係 y = f(x) 代換，我們會得到如下兩個的消去式 (cancellation equation)

$$\boxed{\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{for every } x \text{ in } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{for every } x \text{ in } B \end{aligned}}$$

反函數與對數

第一個消去式表示，我們從 x 開始，經過 f 送至 f(x) ，再經過 f^{-1} 則會回到 x ，如下圖



圖七

因此 f^{-1} 的作用就是抵消 f 的作用。

第二個消去式則是剛好相反， f 的作用抵銷了一開始 f^{-1} 的作用。

反函數與對數

舉例說明，若 $f(x) = x^3$ 則 $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ ，此時兩個消去式分別為：

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

簡單來說，這個的意思就是，取三次方與開三次方根的作用剛好會互相抵銷。

反函數與對數

那麼，對一般的函數我們要怎麼計算其反函數？

假設今天有函數 y = f(x) ，若我們能夠反解 y = f(x) 這個方程式，將 x 用 y 來表示，則根據定義，這個表示式即為我們所要求的反函數 $x = f^{-1}(y)$ 。

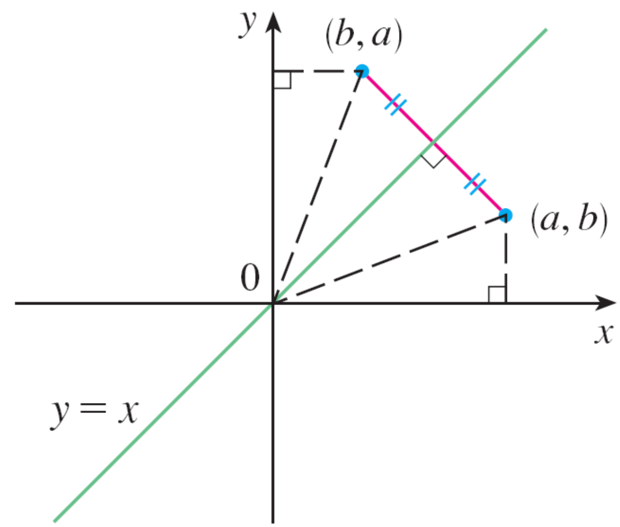
如果我們仍希望用 x 來作為獨立變數，則我們會交換 x, y 的位置，改寫為 $y = f^{-1}(x)$ 。

反函數與對數

將獨立變數與應變數 x, y 相互對調，給了我們一個刻劃反函數圖形的方法。

考慮到若 f(a) = b 則表示 $f^{-1}(b) = a$ ，因此若 (a, b) 在 f 的函數圖形上，則 (b, a) 便會在 f^{-1} 的函數圖形上。

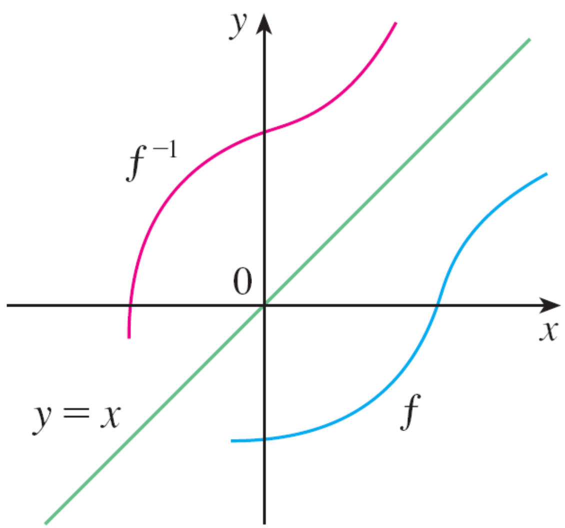
這是一種 x, y 座標互換的對稱性，我們可藉由對直線 y = x 作 (a, b) 點的反射得到 (b, a) 。見右圖。



圖八

反函數與對數

最後藉由瞄點，對一個 f 的函數圖形，我們可以藉由反射得到其反函數之圖形如下：



圖九

藉由對 y=x 的反射，我們可以從 y = f(x) 的函數圖形得到其反函數 $y = f^{-1}(x)$ 的函數圖形。

對數函數

對數函數

給定 $a > 0$ ， 且 $a \neq 1$ ，之前我們介紹了這樣的指數函數：$f(x) = a^x$ ，藉由觀察圖形發現這類的函數均為遞增或者遞減。因此由水平線檢驗法可知， f 存在反函數。

此時的 f^{-1} ，我們稱為**以 a 為底的對數函數**，符號記作

$$f^{-1}(x) = \log_a(x)$$

使用函數與反函數的記號：

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

則我們有：

$$\boxed{\log_a x = y \iff a^y = x}$$

對數函數

因此，若給定 x > 0 ， 則 $\log_a x$ 即為以 a 為底，取指數值得到 x 的指數。

例如， $\log_{10} 0.001 = -3$ 由於 $10^{-3} = 0.001$ 。

前述的消去式一樣可以利用在指數與對數函數上：

給定 $f(x) = a^x$ 與 $f^{-1}(x) = \log_a x$ ，有

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{for every } x > 0$$

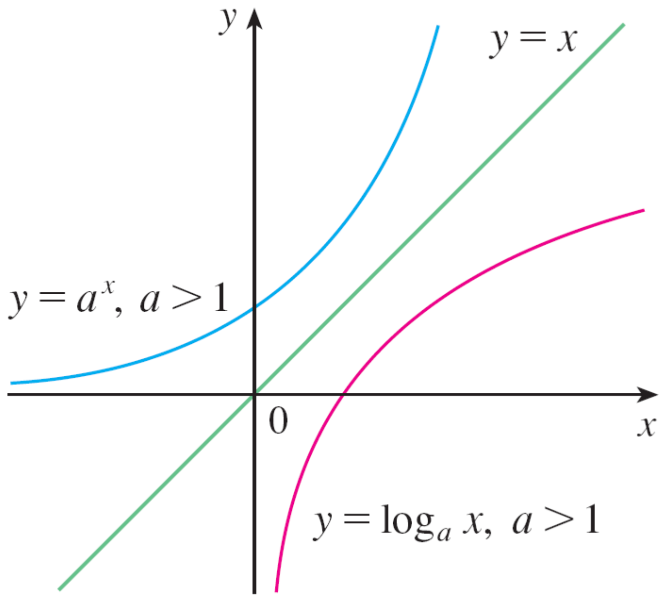
對數函數

從反函數的角度來看，對數函數 $\log_a$ 其定義域為 $(0, \infty)$ 而值域為 $\mathbb{R}$ 。其圖形恰好就是 $y = a^x$ 的圖形對直線 $y = x$ 作反射後的圖形。

右圖為當 $a > 1$ 時的對數圖形。

同時我們可以觀察到 $y = a^x$ 在 $x > 0$ 的部分遞增非常快，

因此在對稱後得到的 $y = \log_a x$ ，在 $x > 1$ 的部分，遞增的比較慢。

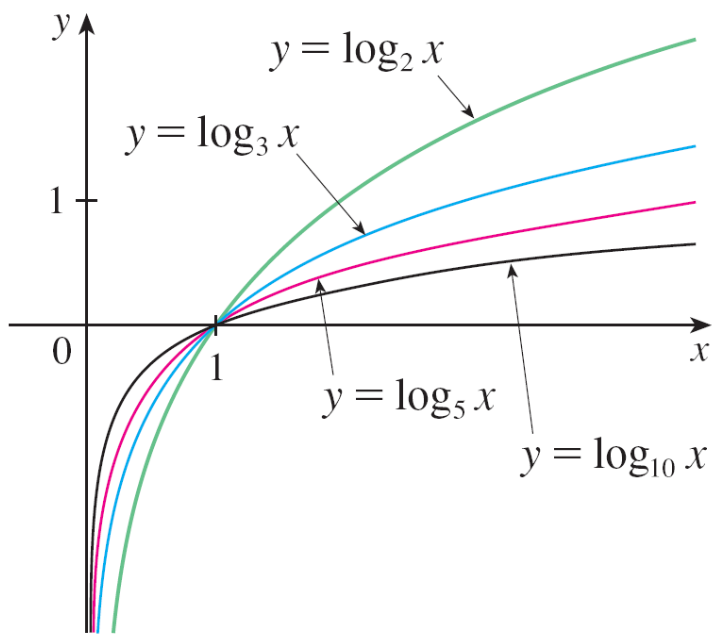


圖十一

對數函數

下圖十二刻畫了幾個不同底數 $a > 1$ ，所對映到的對數函數 $y = \log_a x$ 的圖形。

因為 $\log_a 1 = 0$ ，所有對數函數的圖形均會通過 (1, 0) 。



圖十二

對數函數

由指數函數的指數律，我們可以得到相對應的對數函數性質如下：

[對數律 law of logarithm] 給定 x, y 為正數，則

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$, 對任意實數 r

範例六

利用對數律計算 $\log_2 80 - \log_2 5$ 之值。

解:

由前述第二條對數律：

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$$

$$= \log_2 16$$

$$= 4$$

由於 $2^4 = 16$ 。

自然對數

自然對數

在對數函數所有可能選擇的底數 a 之中，我們有一個很方便利用的選擇：自然底數 e 。

以 e 為底的對數函數我們稱為**自然對數 (natural logarithm)**，記作如下符號

$$\log_e x = \ln x$$

此時以 e 為底的指數，與其反函數自然對數則分別寫為：

$$\ln x = y \iff e^y = x$$

自然對數

其函數與反函數的消去式：

$$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

特別的，當 x = 1 時，有這樣的關係：

$$\ln e = 1$$

範例七

試求 x 使 $\ln x = 5$ 。

解一:

由定義我們知道

$$\ln x = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^5 = x$$

因此 $x = e^5$ 。

（如果對 ln 符號的運算不習慣的話，可以先使用 $\log_e$ ，此時有 $\log_e x = 5$ ，因此從定義可知 $e^5 = x$ 。）

範例七 / 解

解二:

從方程式出發

$$\ln x = 5$$

兩邊同時取自然指數，可以得到

$$e^{\ln x} = e^5$$

利用指對數的相消可以得到 $e^{\ln x} = x$ 。

最後得到 $x = e^5$ 。

自然對數

對數的換底公式提供了我們把任意底數之對數轉變為自然對數的方法：

[換底公式]
對任意正數 a ， $a \neq 1$ ，我們有 $\log_a x = \ln x / \ln a$ 。

範例十

計算 $\log_8 5$ 之值，其精確度至小數點後六位。

解:

由換底公式：

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8}$$

$$\approx 0.773976$$

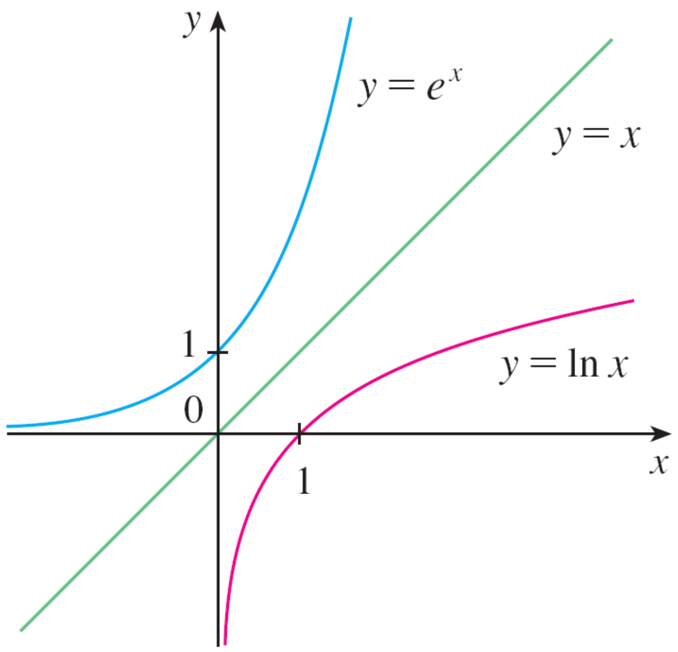
轉換成自然對數以後，通常自然指數、對數的函數值可以藉由查表估計而得。

自然對數的圖形與成長

自然對數的圖形與成長

我們再重新複習一下指對數函數的圖形，右下為自然指數 $y = e^x$ 與對數 $y = \ln x$ 的圖形。

由於 $y = e^x$ 經過 y 軸時之切線斜率為 1 。因此我們可以知道，通過反射後得到的 $y = \ln x$ 之函數圖形，其經過 x 軸的切線斜率為 1 的倒數，剛好也是 1 。



$y = \ln x$ 的函數圖形為 $y = e^x$ 對直線 $y = x$ 作反射得來。

圖十三

自然對數的圖形與成長

與其他底數 $a > 1$ 的對數函數相同，自然對數為遞增函數，其定義域為 $(0, \infty)$ ，而在 0 的附近， y 軸為其圖形的漸進線。

這裡以 y 軸為漸進線的意思是指，當 x 越靠近 0 ， $\ln x$ 值負的越多。

範例十一

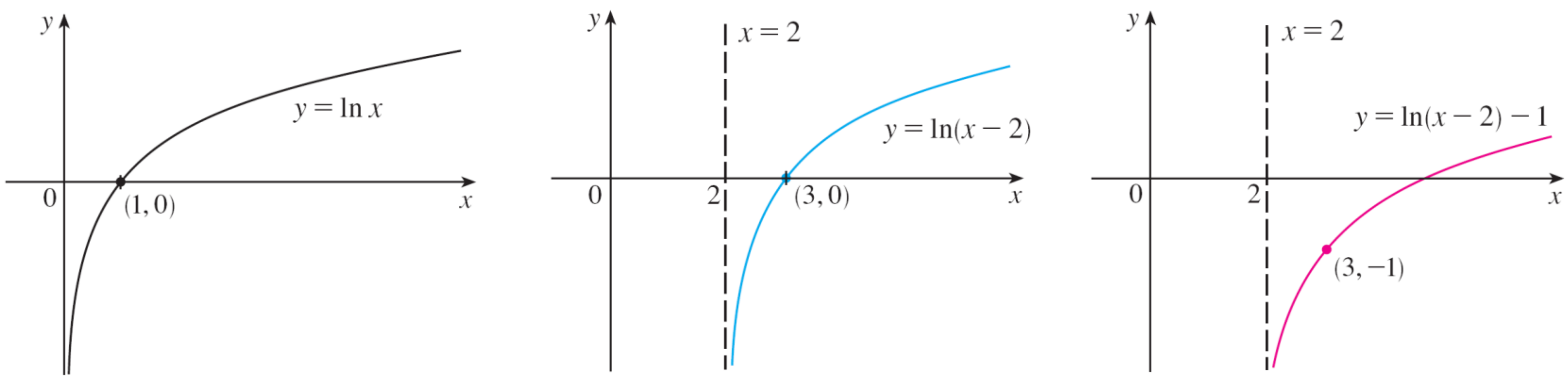
試刻畫 $y = \ln(x - 2) - 1$ 的函數圖形

解:

我們從 $y = \ln x$ 的圖形開始，

像右平移兩單位可得到 $y = \ln(x - 2)$ 的圖形，再往下平移一單位，則可以得到 $y = \ln(x - 2) - 1$ 。

結果如下：



圖十四

自然對數的圖形與成長

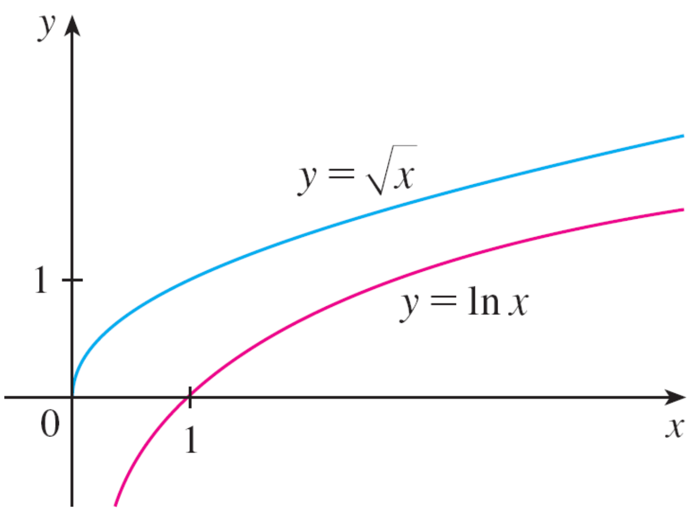
雖然 $f(x) = \ln x$ 是一個遞增函數，然而在 x 越大時，其成長的速度越慢。

事實上我們之後會知道， $\ln x$ 的成長速度會比 x 的任意正數次方都要慢。為此我們可以比較這兩個函數 $y = \ln x$ 與 $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ ，其值如下列表格

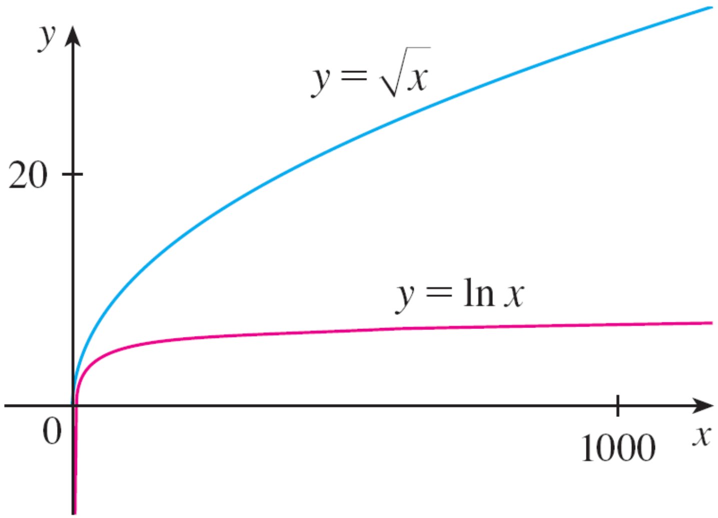
x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10,000	100,000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

自然對數的圖形與成長

我們將這兩種函數放在兩種不同尺度的座標圖上比較：



圖十五



圖十六

可以發現在一開始 $x < 1$ 時，兩個函數 $y = \sqrt{x}$ and $y = \ln x$ 的成長速度差不多，但當 x 越大，平方根函數成長的速度遠遠超過對數函數。