1

函數(functions)與模型(models)

1.5 指數函數

指數函數

$f(x) = 2^x$ 是一種指數函數，其變數 x 的是在指數的位置。要避免與變數在底數的冪函數 $g(x) = x^2$ 產生混淆。

一般而言，對於 a > 0 ，我們都可以定義以 a 為底數的**指數函數 (exponential function)** 如下

$$f(x) = a^x$$

複習一下我們高中所認識的指數律，當 x 為正整數時，其值恰好就是 n 次的 a 相乘：

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factors}}$$

指數函數

若 $x = 0$ ，則 $a^0 = 1$ 。而當 $x = -n$ 是負整數，則變成倒數

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

更近一步，若 $x = p/q$ 為有理數，其中 p, q 為整數， $q > 0$，則有

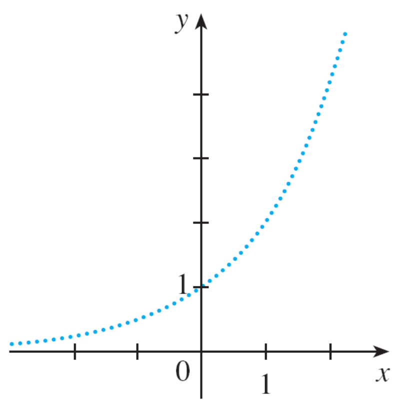
$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

那麼，當 x 是無理數時， a^x 的意義又是什麼呢？

例如 5^π, $2^{\sqrt{3}}$ 是什麼數？

指數函數

為了讓我們了解這個問題，我們考慮 $y = 2^x$ 的函數圖形。藉由計算 x 為有理數時的值 2^x（利用計算機或者十分逼近法近似），可用點勾勒出大致圖形如下：



$y = 2^x$ 其中 x 為有理點的圖形

圖一

當然，我們可繼續描繪更細的有理數函數值，然而一方面我們可以觀察到圖形上仍然存在著無理數所對映到的「洞」。

這個圖形的走向看似我們可以將其填滿成一個實數上的遞增函數。

指數函數

藉由觀察，我們理想中的指數函數是一個連續的遞增函數，因此考慮下列三個值

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

由於 2 > 1 ，指數函數必定滿足

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

由於 1.7, 1.8 為有理數，因此我們可以利用開方得到 $2^{1.7}$ 與 $2^{1.8}$ 之值。

指數函數

更近一步，我們可以得到一連串逼近 $\sqrt{3}$, 的有理數區間，近而得到可以逼近 $2^{\sqrt{3}}$. 的一連串的數值區間。

$$
\begin{array}{rcl}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 & \Rightarrow & 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 & \Rightarrow & 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 & \Rightarrow & 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 & \Rightarrow & 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \quad\quad \vdots & & \vdots \quad\quad\quad \vdots
\end{array}
$$

指數函數

我們可以證明只有一個實數恰好位列在這兩組數列之中：

其大於

$$2^{1.7},\quad 2^{1.73},\quad 2^{1.732},\quad 2^{1.7320},\quad 2^{1.73205},\quad \ldots$$

同時小於

$$2^{1.8},\quad 2^{1.74},\quad 2^{1.733},\quad 2^{1.7321},\quad 2^{1.73206},\quad \ldots$$

於是我們定義 $2^{\sqrt{3}}$ 的函數值為，恰好夾在這兩串數列之間的唯一的數。

另外我們透過計算有理數逼近的函數值，可以得到 $2^{\sqrt{3}}$ 的小數前六位表示：

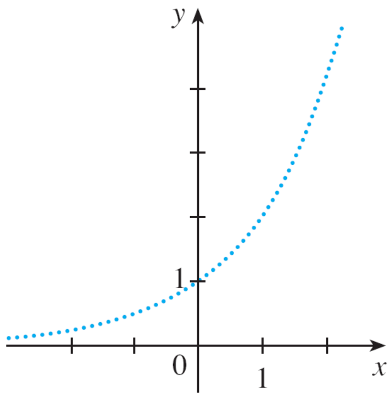
$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

指數函數

同樣，對於任意的無理數 x ，我們可以利用同樣的步驟來定義指數 a^x (a > 0)。

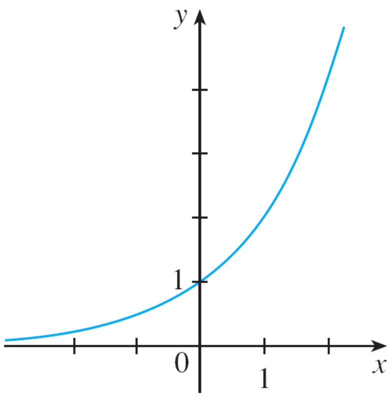
下圖二補上了前述圖一的「洞」，對於每個無理數，利用周圍兩側的有理數逼近來夾出無理數的函數值，最後得到

$f(x) = 2^x,\ x \in \mathbb{R}.$ 的函數圖形。



$y = 2^x$, x 為有理數

圖一

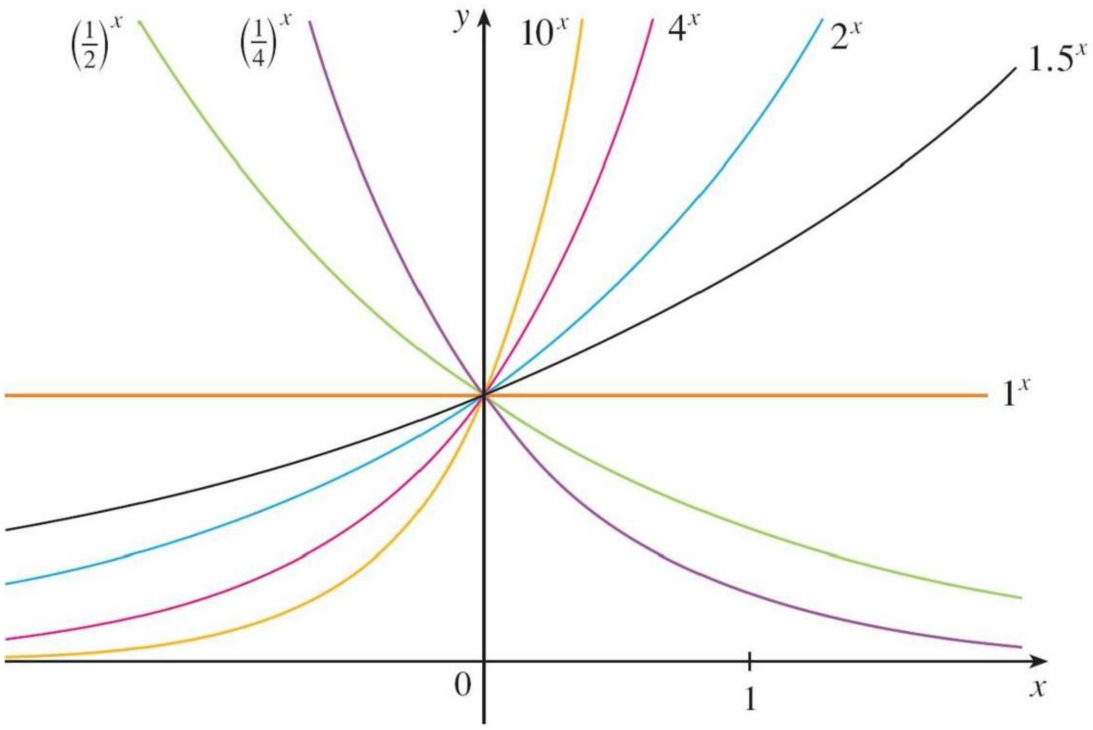


$y = 2^x$, x 為實數

圖二

指數函數

下圖刻劃了以各種不同的 a 值為底數的的指數函數圖形。



圖三

指數函數

注意到，前面所有的圖形均通過同一個點 (0,1) ，由於我們定義 $a^0 = 1$ for $a \neq 0$ 。

若底數 a 越大，可以發現當 x ＞0 更大時，函數 a^x 成長得更快。

另外，從圖三中我們可以分類得到三種指數函數 $y = a^x$ ：

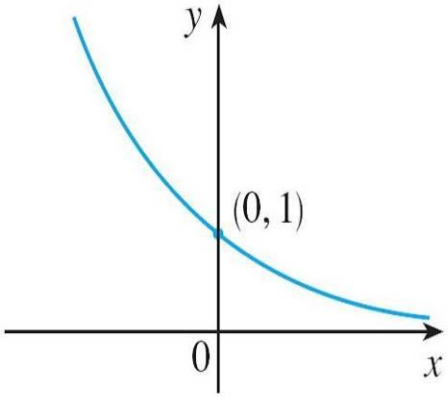
當底數 $0 < a < 1$ ， 指數函數隨著 x 增加而遞減；

若 $a = 1$ ， $a^x =1$ 為常數函數；

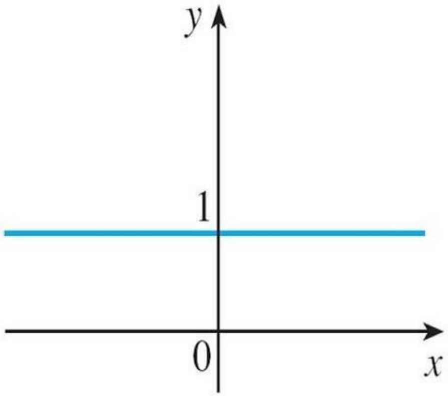
若 $a > 1$ ，其為遞增函數。

指數函數

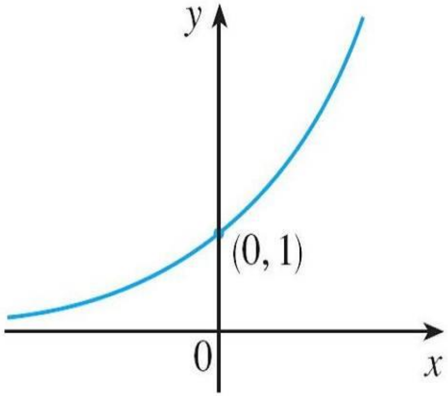
三種指數函數的行為我們分別刻劃在下圖：



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$



(b) $y = 1^x$



(c) $y = a^x$, $a > 1$

圖四

指數函數

另外從圖上我們可以觀察到，指數函數 $y = a^x$ 的定義域為整個實數 $\mathbb{R}$，而值域則為正實數 $(0, \infty)$.

另外注意到，由於 $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$ ，因此 $y = (1/a)^x$ 的圖形恰好就是 $y = a^x$ 對 y 軸做反射後的圖形。

指數函數

指數律是指數函數滿足的一個重要性質，過去我們已經知道對於有理數指數，會滿足指數律。現在更進一步我們定義了實數指數，可以發現實數指數也滿足指數律：

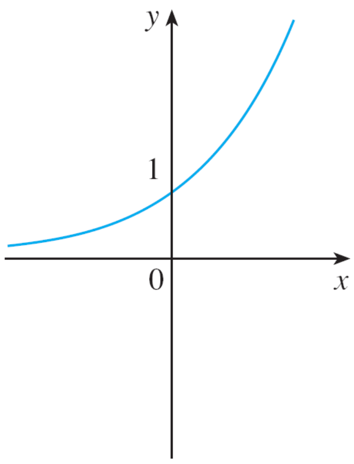
1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

範例一

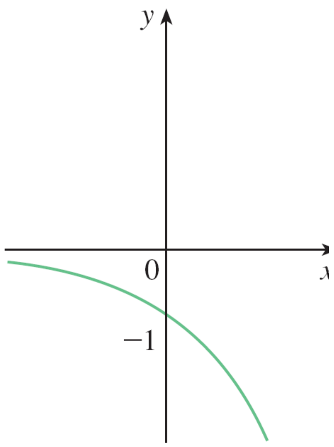
描出 $y = 3 - 2^x$ 的圖形，並且決定其定義域與值域

解:

首先我們經過反射 $y = 2^x$ 的圖形得到 $y = -2^x$ 的圖形如下：



(b) $y = 2^x$



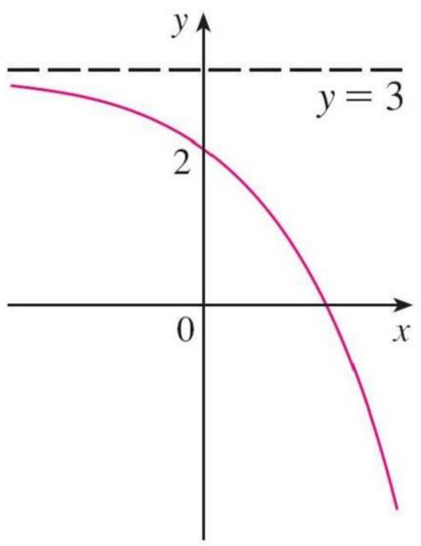
(b) $y = -2^x$

圖五

範例一 / 解

cont'd

接著將 $y = -2^x$ 上移三單位，便可以得到 $y = -2^x+3$ 的圖形



(c) $y = 3 - 2^x$

Figure 5

觀察得到，其定義域為 $\mathbb{R}$ ，值域為 $(-\infty, 3)$ 。

指數函數的應用

指數函數的應用

指數函數常見於自然或者人類社會裡的數學模型之中。
我們這裡介紹從族群成長模型中衍生而來的指數函數。

假設現在有一細菌族群在均勻的營養介質中。假設我們在某個區間上抽樣測量其族群總數，並測得其族群數量每小時數目會倍增。

指數函數的應用

假設在 t 小時後的細菌族群數量為 p(t) ，原始數量 p(0) = 1000 單位，則我們有

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$

$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$

$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

看得出來族群數量的函數為

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

指數函數的應用

我們可以觀察到，族群數目的函數為指數函數 $y = 2^t$ 的常數倍，這個成長是非常快速的。

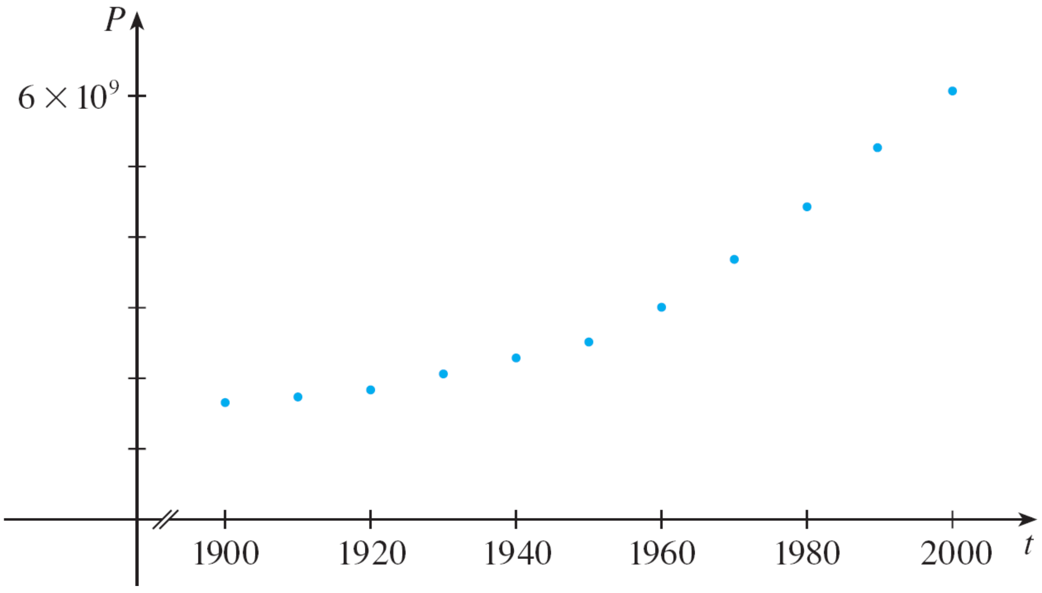
在理想的條件下，如果生長環境不受限制、沒有疫病的發生，則一個生物族群的生長率一般為指數成長。

指數函數的應用

那麼人口族群的數目呢？下表一列出了自二十世紀後，每十年的世界人口普查數目。而右圖為此資料的點圖。

TABLE 1

t	Population (millions)
0	1650
10	1750
20	1860
30	2070
40	2300
50	2560
60	3040
70	3710
80	4450
90	5280
100	6080
110	6870



世界人口成長的點圖

圖八

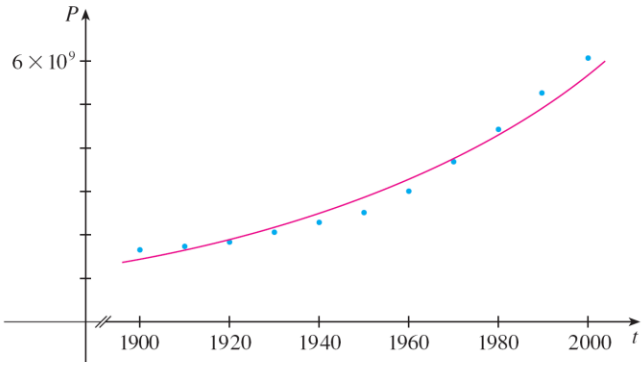
指數函數的應用

我們從前面圖八的點圖可以看出，其圖形走勢的確像是指數成長，我們套用最小平方法在指數函數上，得到一個近似的模型：

$$P = (1436.53) \cdot (1.01395)^t$$

其中 t = 0 時代表 1900 年。

圖九為我們得到的近似模型與原先點圖的比較。



Exponential model for population growth

Figure 9

指數函數的應用

從上圖，我們看得出來指數函數跟現實的資料還算穩合。

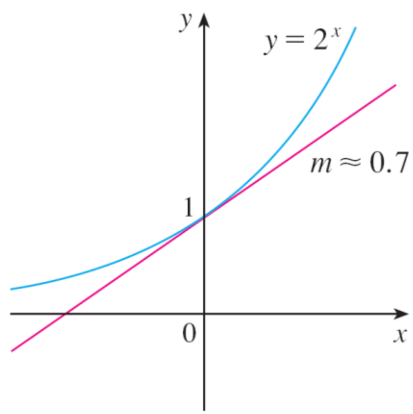
另外我們還可以觀察到，在 1930 年以後的一段時間，人口數量的資料比預測模型的數值還低。這可能與這段時間人類歷經了兩次世界大戰與大蕭條時代造成人口減少有關。

自然底數 e

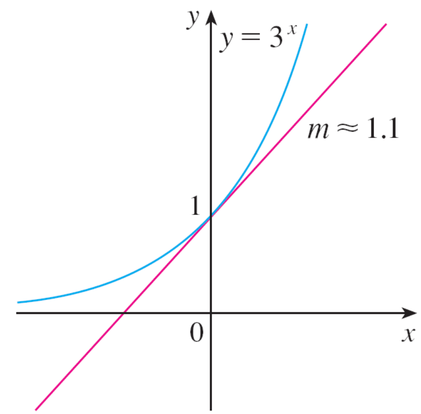
自然底數 e

指數函數的可能的底數中，有一個數是因應微積分發展方便的需求而產生的。選擇各種不同的底數，對函數圖形所影響的主要就是經過 y 軸之後的成長率。

下圖十與十一，分別是 $y = 2^x$ 與 $y = 3^x$ 以及他們各自經過 (0,1) 的切線。



圖十



圖十一

自然底數 e

（在實際介紹切線以前，為了方便我們將切線想成經過圖形的某一點恰好與圖形相擦而過只交於一點的直線。）

我們可以大概測量一下上述兩條在 (0,1) 切線的斜率：

$y = 2^x$ 的斜率 $m \approx 0.7$

$y = 3^x$ 的斜率 $m \approx 1.1$

自然底數 e

於是我們開始考慮，如果想以某個指數函數作為指數成長的基準，那到底以什麼為底數的指數函數，其經過 (0,1) 的切線斜率恰好為 1 ？請見下圖十二：

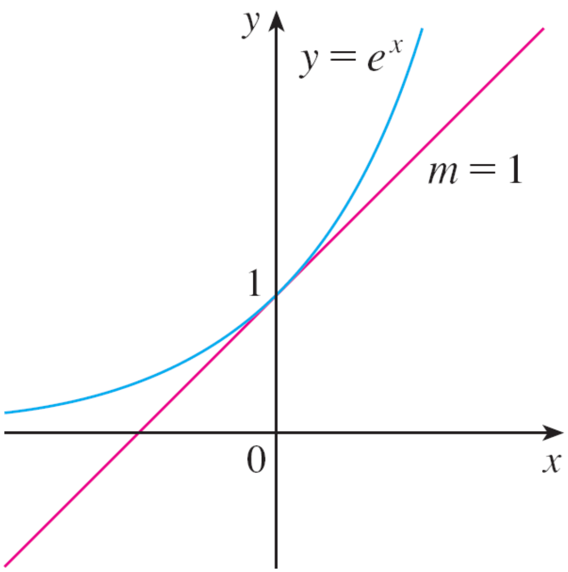


Figure 12

自然指數函數 e^x 經過 (0,1) 的切線斜率恰好為 1 。

自然底數 e

由於不同底數的指數函數其成長速率都是不同的，因此經過 (0,1) 的切線斜率為 1 的指數函數，恰好只有一種。

我們定義這個指數函數的底數為 e 。

（這個記號是由瑞士數學家 Euler 在 1727 年所挑選，原因是 e 為指數的英文 exponential 的開頭。）

自然底數 e

由觀察，由於 $y = 2^x$ 與 $y = 3^x$ 經過 (0,1) 的切線斜率分別為 0.7 與 1.1 左右，因此 $y = e^x$ 的圖形增長的程度會在兩者之間，請見圖十三

我們利用小數逼近大致上可以得到

$$e \approx 2.71828$$

另外我們稱 $f(x) = e^x$ 為**自然指數函數 (natural exponential function)** 。

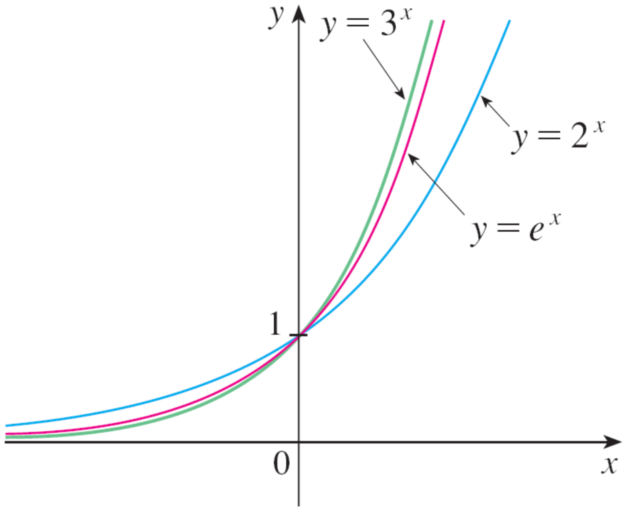


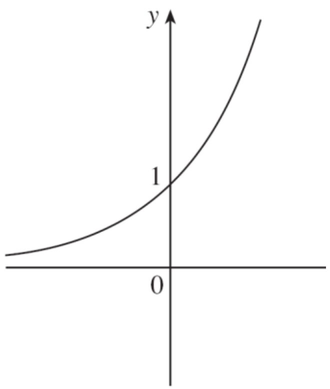
Figure 13

範例四

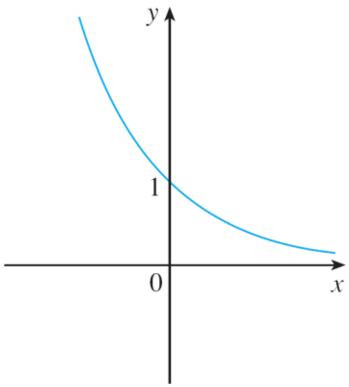
描出 $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ 之圖形，並決定其定義域及值域。

解:

我們從經過 (0,1) 之切線斜率為 1 的圖形 $y = e^x$ 出發，考慮對 y 軸的反射得到 $y = e^{-x}$ 的圖形如下圖右。



(a) $y = e^x$



(b) $y = e^{-x}$

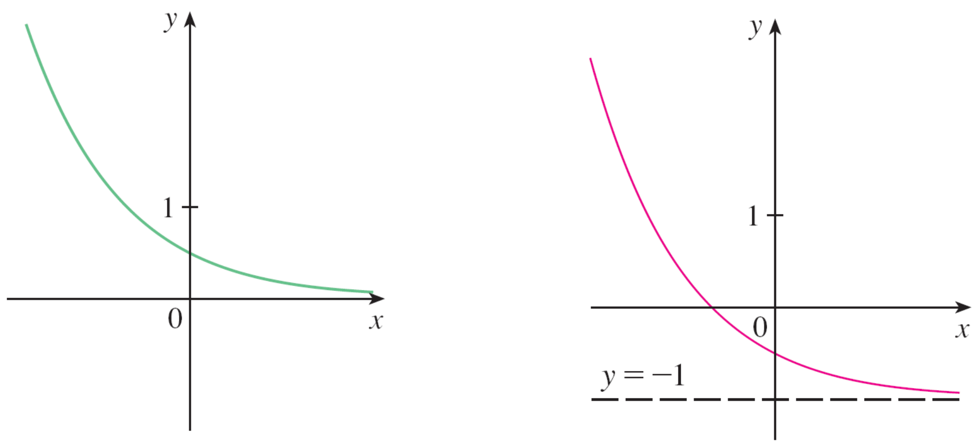
圖十五

範例四 / 解

cont'd

接著我們沿垂直方向壓縮兩倍可得到 $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ 的圖形如下圖左。

最後往下平移一單位，得到最後的結果，其圖形如下圖右。



(c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ **Figure 15** (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

可以觀察到此函數定義域為 $\mathbb{R}$ ，其值域為 $(-1, \infty)$ 。