1

函數(functions)與模型(models)

1.3 從已知函數定義新函數

函數的變換

函數的變換

想像我們將函數圖形作一些變換，只要仍滿足鉛直線的條件，則新的圖形也會是某些函數的圖形。因此，當我們遇到類似的圖形時，便可反過來巧妙地推得這些類似圖案的函數或方程式。

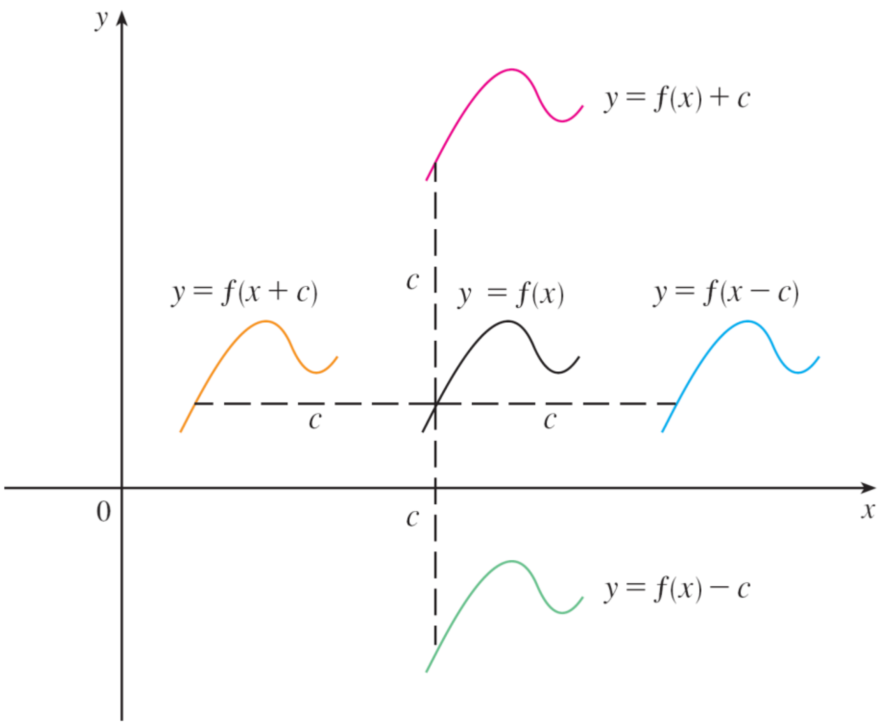
首先我們先考慮圖形的平移 (translation) 。假設 c 為一正數，則 $y = f(x) + c$ 的圖形，便會在 $y = f(x)$ 的圖形上方 c 單位之處，原因是前者的 y 座標都比原來的 $f(x)$ 還要多 c 單位。

函數的變換

同樣的道理，若 g(x) = f(x – c) ，其中 c 為一正數。則 g 在 x 的值與 f 在 x 左邊 c 單位處的值相同。

此時 $y = f(x - c)$ 的圖形，便是將 $y = f(x)$ 往右移 c 單位長。

考慮 c 的正負號，共四種平移方式，可參考右圖。



f 圖形的平移

圖一

函數的變換

整理一下四種位移：

[函數圖形的水平與垂直位移] 給定 $c > 0$ ，給定函數 f 。
$y = f(x) + c$ 的圖形，為 $y = f(x)$ 的圖形上移 c 單位；
$y = f(x + c)$ 的圖形，為 $y = f(x)$ 的圖形左移 c 單位；
$y = f(x) - c$ 的圖形，為 $y = f(x)$ 的圖形下移 c 單位；
$y = f(x - c)$ 的圖形，為 $y = f(x)$ 的圖形右移 c 單位。

接著我們考慮**伸縮 (stretching)** 與**反射 (reflecting)** 。考慮 $c > 1$ ，此時 $y = cf(x)$ ，其 y 座標值為原先 $y = f(x)$ 的 c 倍。因此其圖形為原先圖形沿垂直方向伸長 c 倍。

若 $c < 1$ ，則是縮短。

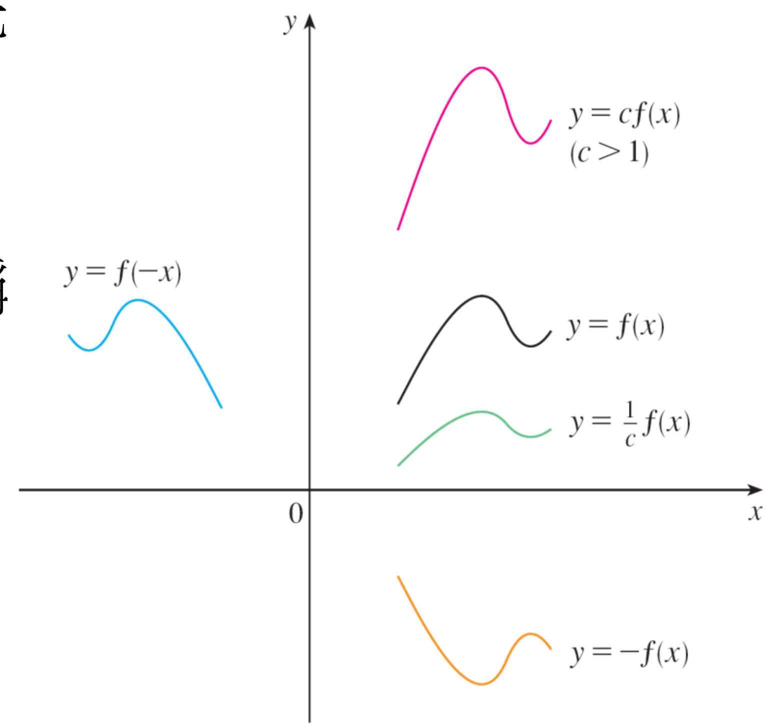
函數的變換

若 c < 0 ，例如 y = -f(x) ，其座標值剛好是原先相差一個負號，若 (x, y) 落在 y = f(x) 圖形上，則 (x, -y) 將落在 y = -f(x) 上，因此 y = -f(x) 圖形會與原先之圖形對 x 軸對稱。

同理， y = f(-x) 是對 y 軸做對稱

假設 c > 1 。

右圖列出了伸長 c 倍，縮短 1/c 倍，對 x 軸做對稱，對 y 軸做對稱四種圖形。



f 圖形的伸縮與反射

圖二

函數的變換

同樣整理一下函數的伸縮與反射：

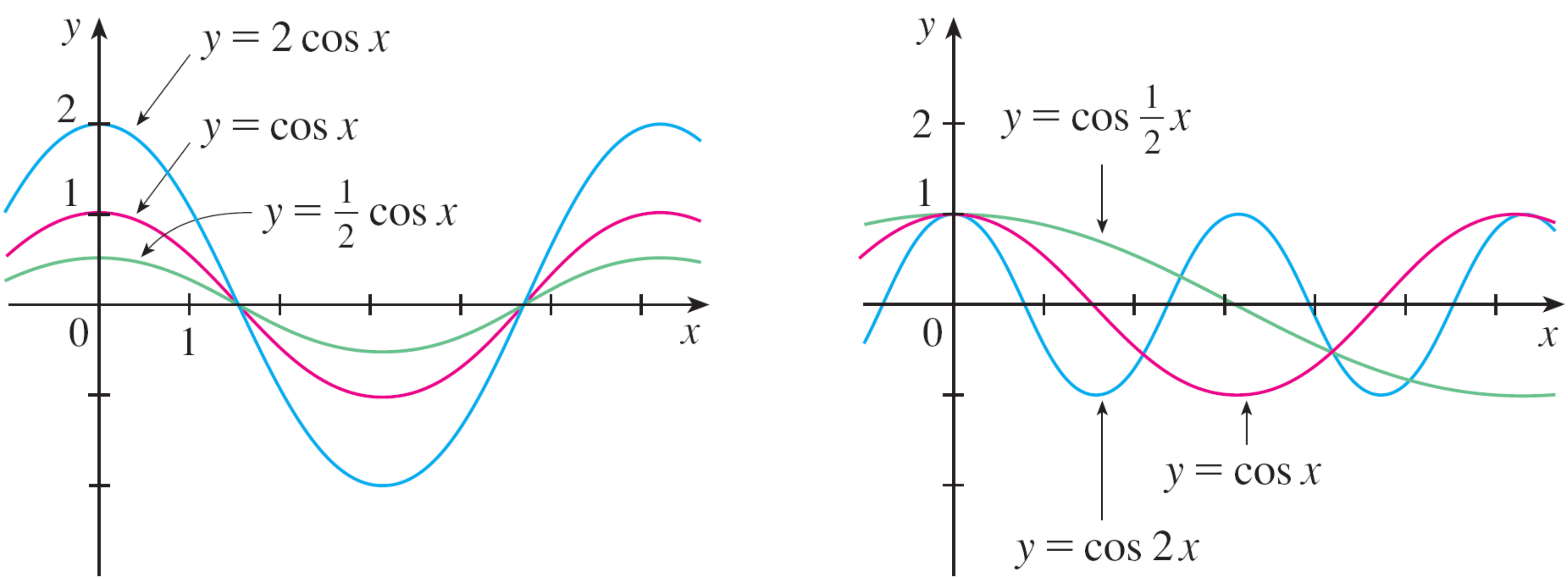
[函數的水平/垂直伸縮、反射] 給定 $c > 1$ ，則

$y = cf(x)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形沿垂直方向伸長 c 倍；
$y = 1/c\ f(x)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形沿垂直方向縮短 c 倍；
$y = f(cx)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形沿水平方向縮短 c 倍；
$y = f(x/c)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形沿水平方向伸長 c 倍；
$y = -f(x)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形對 x 軸做反射；
$y = f(-x)$ 之圖形，為 $y = f(x)$ 圖形對 y 軸做反射。

註：注意到 c 乘在 f 裡面是剛好相反的結果。
$y = f(cx)$ 的圖形是縮短 c 倍，例如 $y = f(2x)$ 是圖形沿水平縮短兩倍。理由是若 (x, y) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則 $(x/2, y)$ 會落在 $y = f(2x)$ 之圖形上。

函數的變換

下圖三我們實際來看 cos 函數的伸縮，左圖是垂直伸縮兩倍、右圖是水平伸縮兩倍。



圖三

函數的變換

若我們想得到 $y = 2\cos x$ 的圖形，便是將 $y = \cos x$ 圖形的每一點的 y 座標乘上兩倍。

也就是最後 $y = 2\cos x$ 的圖形，就是 $y = \cos x$ 沿著垂直方向伸長兩倍。

其它三種伸縮變換也可以實際參考上圖。

範例一

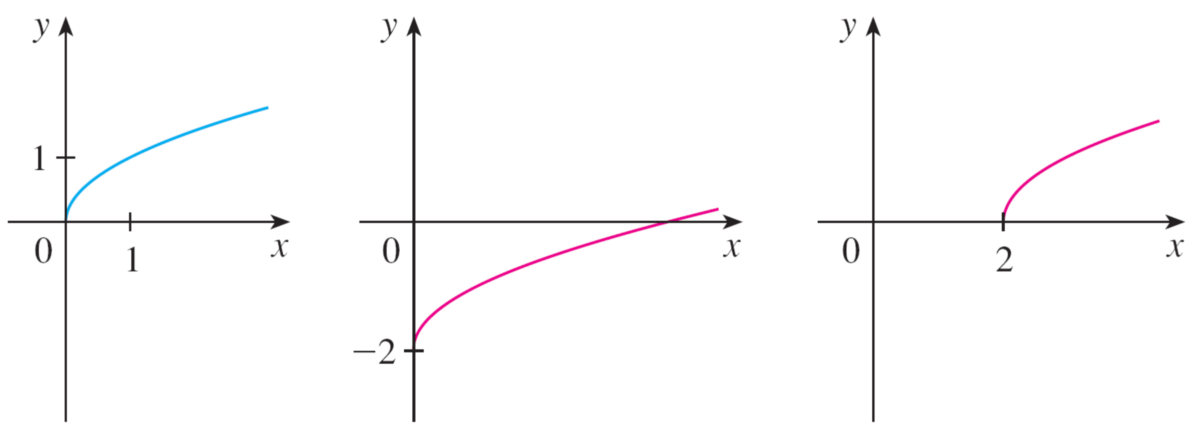
給定圖形 $y = \sqrt{x}$, 試利用函數的位移變換得下列函數圖形：

$y = \sqrt{x} - 2, y = \sqrt{x-2}, y = -\sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{-x}.$

解:

下圖 (a) 為 $y = \sqrt{x}$ 之圖形。 (b) $y = \sqrt{x} - 2$ 是下移兩單位
(c) $y = \sqrt{x-2}$ 是右移兩單位。

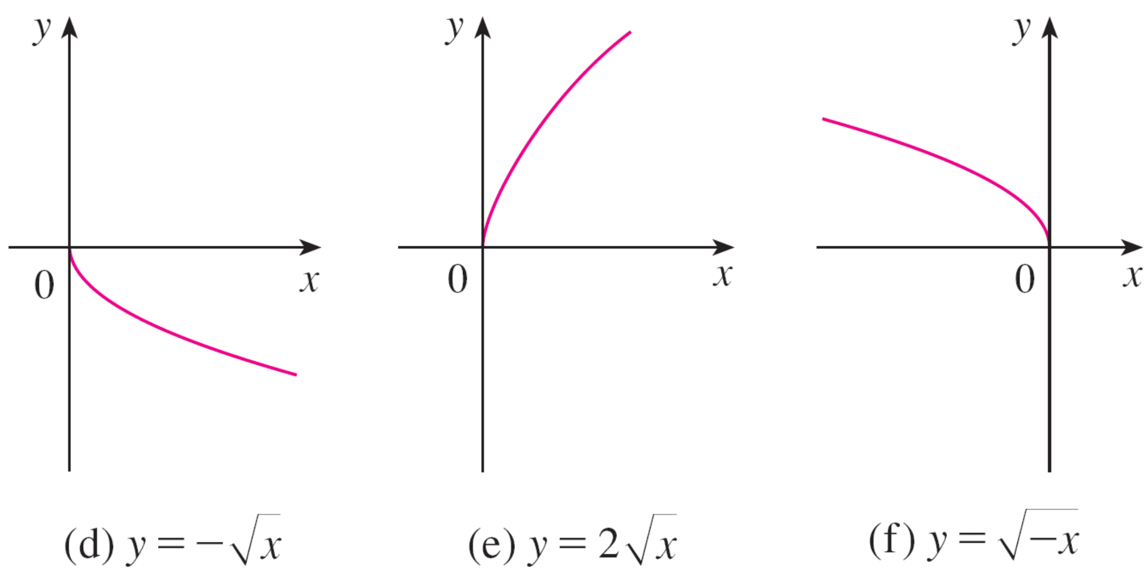
圖四



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x-2}$

範例一 / 解

cont'd



圖四

(d) $y=-\sqrt{x}$ 是將圖形對 x 軸做反射。

(e) $y=2\sqrt{x}$ 是將圖形沿著垂直方向作兩倍的伸長。

(f) $y=\sqrt{-x}$ 是將圖形對 y 軸做反射。

函數的變換

還有一種有趣的變換是取絕對值。

考慮 $y = |f(x)|$ ，我們根據絕對值的定義，有

當 $f(x) \geq 0$ ，則 $y = f(x)$

當 $f(x) < 0$ ，則 $y = -f(x)$ 。

因此這告訴我們，將原本 $y = f(x)$ 在 x 軸上方的圖形保留，而在 x 軸下方的圖形，也就是 $f < 0$ 的部分，對 x 軸作對稱得到 $y = -f(x)$ 。

最後便可以得到 $y = |f(x)|$ 。

函數的合成

函數的合成

給定兩個函數 f 跟 g，我們可以藉由四則運算得到新的函數 f + g , f – g, fg 以及 f/g (當 g 不為 0) 。

函數的四則運算都是由其值的運算結果所定義：

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

但其值要相加減，我們必須要求 x 同時在 f, g 的定義域中。因此函數運算後的新定義域，便是原先各自定義域的交集：

例如, 例如 $f(x) = \sqrt{x}$ 的定義域為 $A = [0, \infty)$ ，而 $g(x) = \sqrt{2 - x}$ 的定義域為 $B = (-\infty, 2]$ ，因此取交集後，我們可以知道 $(f + g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ 的定義域為 $A \cap B = [0, 2]$ 。

函數的合成

同樣，函數相乘與相除，也是由其值相乘除後的值來定義：

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

同樣的道理， fg 之定義域為 $A \cap B$ ，而由於除法除以 0 沒有定義因此 f/g 之定義域為 $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$ 。

實際舉例說明，給定 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x - 1$ ，則比值函數 $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ 之定義域為 $\{x \mid x \neq 1\}$ ，或者我們寫成 $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ 。

函數的合成

另一種得到新的函數的方式是迭代，例如 $y = f(u) = \sqrt{u}$ ，且 $u = g(x) = x^2 + 1$ 。

由於 y 是 u 的函數， u 同時也是 x 的函數，因此給定 x ，可以得到 u 再來決定 y 的函數值，因此 y 是 x 的函數。

我們利用代換得到 y 對 x 的函數表示：

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

這種透過函數迭代得到新函數的方式，我們稱為**函數的合成 (composition of functions)** 。

函數的合成

一般而言，給定任意兩函數 f, g ，我們從 g 的定義域挑選一點 x 開始，計算得到 g(x) 之值。若 g(x) 落在 f 的定義域之中，這時我們才可以計算得到 f(g(x)) 的值。

於是這個透過 f, g 迭代而成的新函數 $h(x) = f(g(x))$ ，我們稱為 f 跟 g 的合成，記作 $f \circ g$ （而念作 “*f* circle *g*”）。

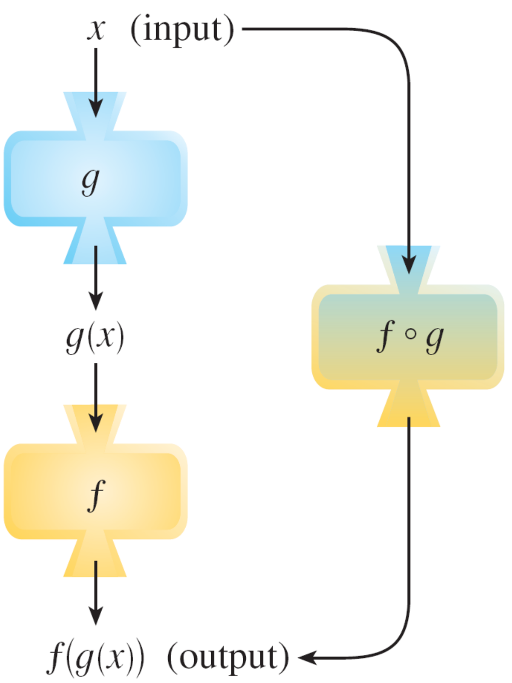
其定義即為 $f \circ g(x) = f(g(x))$ 。

函數的合成

$f \circ g$ 的定義域即為，在 g 的定義域中滿足 g(x) 在 f 的定義域中的所有 x 。

換言之 $(f \circ g)(x)$ 有意義，必須要 $g(x)$, $f(g(x))$ 代入的值同時有意義。

右圖解釋了合成函數的黑箱過程。



$f \circ g$ 黑盒子，是由先通過 g 這個黑盒子再通過 f 這個黑盒子所組成。

圖十一

範例六

給定 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x - 3$ ，求合成函數 $f \circ g$ 與 $g \circ f$ 。

解:

我們直接代入計算可得：

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$

函數的合成

注意到合成函數的符號 $f \circ g$ 表示這個函數作用的過程是，先經過 g 的作用，再通過 f 的作用。

在前述的範例六當中，兩個函數得作用分別是： f 為平方， g 為減三。因此 $f \circ g$ 就是先減三再平方的函數， $g \circ f$ 就是先平方再減三。

了解先後作用的順序之後，我們甚至可以合成三個或者更多函數。例如合成函數 $f \circ g \circ h$ ，就是先經過 h 作用，再經過 g ，最後再經過 f ：

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$