九十學年度下學期微積分甲 (II)) 組08-16班期中考題

(1) 設$w=f(x,y)$滿足 Laplace 方程式$w_{xx}+w_{yy}=0$. 令$x=\frac{1}{2}(u^2-v^2)$, $y=uv$, 試證明w亦滿足 Laplace 方程式$w_{uu}+w_{vv}=0$. (10分)

(解) $w_u=w_x\ u+w_y\ v$
$\Rightarrow w_{uu}=(w_{xx}\ u+w_{xy}\ v)u+w_x+(w_{yx}\ u+w_{yy}\ v)v$
$w_v=w_x\ (-v)+w_y\ u$
$\Rightarrow w_{vv}=(w_{xx}\ (-v)+w_{xy}\ u)(-v)+w_x\ (-1)+(w_{yx}\ (-v)+w_{yy}\ u)u$
$\Rightarrow w_{uu}+w_{vv}=(u^2+v^2)(w_{xx}+w_{yy})=0$
註解：許多學生的錯誤，除 ∂ 與 d 的誤用之外，大部分發生在對 $w=f(x,y)$ 進行二階偏導的過程.
我們就以 ... $w_{uu}=$ 將 w_u 對 u 偏微 ... 爲例，大多人的錯誤寫法如下:
$w_{uu}=(w_{xx}\ u\frac{\partial x}{\partial u}+w_x+w_{yy}\frac{\partial y}{\partial u}\ v)=w_{xx}\ u^2+w_x+w_{yy}\ v^2$
然而在使用 chain rule 進行偏微時，他們卻忽略
$w_u=w_u(x,y), x=x(u,v), y=y(u,v)$ 的事實.
現在就簡單地以將最上面 w_u 等式右方的 $(w_x\ u)$ 這項去對 u 偏微來說，正確過程如下：
$\frac{\partial(w_x\ u)}{\partial u}=(\frac{\partial w_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial w_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u})u+w_x\frac{du}{du}=(w_{xx}\ u+w_{xy}\ v)u+w_x$
在給分的標準方面，凡二階偏微發生上面錯誤而缺項者，一律均以0分計算.

(2) 試求函數 $f(x,y)=x^2+xy$ 在點 $(2,3)$ 之方向導數爲零的方向.(10分)

(解) $\vec{\nabla}f=(2x+y,x)$, $\vec{u}=(\cos\theta,\sin\theta)$, $D_\theta f=\vec{\nabla}f=\vec{\nabla}f\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=(2x+y)\cos\theta+x\sin\theta$
$D_\theta f(2,3)=\vec{\nabla}f(2,3)\cdot(\cos\theta,\sin\theta)=7\cos\theta+2\sin\theta=0\Rightarrow\tan\theta=-\frac{7}{2}$,
所以$\theta=\tan^{-1}(-\frac{7}{2})$

(3) 求$f(x)=2x^3-4xy+3y^2$的極值. (10分)

(解) $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} &= 6x^2-4y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -4x+6y\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 12x\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= -4\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6\end{cases}$

解 $\begin{cases}6x^2-4y=0\\ -4x+6y=0\end{cases}$

$y=\frac{2}{3}x$, $6x^2-\frac{8}{3}x=0\Rightarrow x=0,\ \frac{4}{9}$, 當$(x,y)=(0,0)$時, $\begin{vmatrix}0 & -4\\ -4 & 6\end{vmatrix}=-16<0$, $(0,0)$爲鞍點.
當$(x,y)=(\frac{4}{9},\frac{8}{27})$時, $\begin{vmatrix}\frac{16}{3} & -4\\ -4 & 0\end{vmatrix}=32-16=16>0$, 及$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_{(\frac{4}{9},\frac{8}{27})}=\frac{16}{3}>0$, $(\frac{4}{9},\frac{8}{27})$爲極小點

(4) 一金屬板上(x,y)點的溫度 (華氏) 爲$T(x,y)=4x^2-4xy+y^2$. 一螞蟻在以原點爲圓心, 半徑爲5之圓圈上爬行. 問該蟻所感受到的最高溫度與最低溫度各多少?(10分)

(解) 用Lagrange 乘數法, 考慮$F(x,y,\lambda)=4x^2-4xy+y^2-\lambda(x^2+y^2-25)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \quad : \quad 8x-4y-2\lambda x=0 \qquad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}=0 \quad : \quad -4x+2y-2\lambda y=0 \qquad (2)$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0 \quad : \quad x^2+y^2-25=0 \qquad (3)$$

$(1)+2\times(2)\Rightarrow 2\lambda(x+2y)=0$

(i) $\lambda=0\Rightarrow y=2x$, 代入 (3) $\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$, $y=\pm2\sqrt{5}$

(ii) $x=-2y$ 代入 (3) $\Rightarrow y=\pm\sqrt{5}$, $x=\mp2\sqrt{5}$

最低:$T(\pm\sqrt{5},\pm2\sqrt{5})=0$, 最高:$T(\mp2\sqrt{5},\pm\sqrt{5})=125$

(5) 試求$f(x,y)=e^x\ln(1+y)$在原點的二階及三階泰勒估計式 (無須給出餘式) . (10分)

(解) 可例行求f在$(0,0)$之一階, 二階及三階導數, 代入泰勒公式, 或由

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x+\frac{x^2}{2!}+...)(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+...) \\ &= y+xy-\frac{y^2}{2}-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}+\frac{x^2y}{2}+... \\ &= y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)+... \end{aligned}$$

二階估計式:$y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)$, 三階估計式:$y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$

(6) (i) 求由圓柱面 $y^2+z^2=a^2$ 與平面 $y=x$, $x=0$ 和 $z=0$ 所圍成領域的體積. (8分)

(ii) 求$\int_0^\pi\int_0^\pi\int_0^\pi\cos(x+y+z)dxdydz$. (8分)

(解) 先考慮在第一掛限內，設

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a\int_x^a\sqrt{a^2-y^2}dydx \\ &= \int_0^a\int_0^y\sqrt{a^2-y^2}dxdy \\ &= \int_0^a y\sqrt{a^2-y^2}dy \\ &= [-\frac{1}{3}(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a \\ &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

or

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^a \int_0^{a^2-z^2} y\,dydz \quad (\text{or} = \int_0^a \int_0^{a^2-y^2} y\,dzdy) \\
&= \int_0^a \frac{1}{2}(a^2-z^2)dz \\
&= \frac{1}{2}(a^2z - \frac{1}{3}z^3)|_0^a \\
&= \frac{1}{3}a^3
\end{aligned}
$$

附註: 第6題只要過程正確詳細, 則答案無論是 V , 或 2V(在第一. 五或一. 三掛限內) , 亦或是4V(在第一. 三. 五. 七掛限內) , 均給滿分.

(7) 求$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$. (10分)

(解)

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \ln(r^2+1)r\,drd\theta \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln 4 - 1)d\theta = \pi(\ln 4 - 1)
\end{aligned}
$$

(8) 設D爲$z=2-(x^2+y^2)$與$z=x^2+y^2$所圍成的領域, 密度爲$\delta(x,y,z)=z$, 求D的質心座標. (12分)

(解) 設D的質心座標爲$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由對稱性知$\bar{x}=\bar{y}=0$, 所以只需求$\bar{z}$
D對xy平面的 Moment 爲

$$
M_{xy} = \int\int\int_D z^2 dxdydz
$$

令R爲$x^2+y^2\le 1$, 所以

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \int\int_R \left(\int_{x^2+y^2}^{2-(x^2+y^2)} z^2dz\right)dxdy \\
&= \frac{1}{3}\int\int_R [8-12(x^2+y^2)+6(x^2+y^2)^2-2(x^2+y^2)^3]dxdy \\
&\quad \text{利用極座標代換} \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 [\int_0^{2\pi} (8-12r^2+6r^4-2r^6)r\,d\theta]dr \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_0^1 (8r-12r^3+6r^5-2r^7)dr = \frac{7}{6}\pi
\end{aligned}
$$

同理, 可求得總質量 $M = \pi$, 所以$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{7}{6}$

(9) 試求函數$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x + 3y$ 在由$x = 0$,$y = 0$, 和 $x + y = 4$ 等三條直線所圍成的領域上 (含內部及邊界) 所產生的最大值與最小值. (12分)

(解)

(I) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x + 3y \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0 \end{cases}$,
所以, $x = \frac{11}{3}$, $y = \frac{-10}{3}$ 不在圍成的三角形領域中. 故考慮三條邊界線上.

(II) 在 $x = 0$上的邊界線L_1，令 $g(y) = f(0,y) = y^2 + 3y$,$0 \le y \le 4$，則 $g'(y) = 2y + 3 = 0$．所以 g 在 [0,4] 上遞增.
因此在 L_1 上，$g(0) = 0$ 爲最小值，$g(4) = 28$ 爲最大值．

(III) 在 $y = 0$上的邊界線L_2，令 $h(x) = f(x,0) = x^2 + 4x$,$0 \le x \le 4$，則 $h'(y) = 2x - 4 = 0$．所以 h 在 [0,2] 上遞減；在 [2,4] 上遞增．
因此在 L_2 上，$h(2) = -4$ 爲最小值，$h(4) = h(0) = 0$ 爲最大值．

(IV)在 $x+y = 4$上的邊界線L_3，令 $k(x) = f(x,y) = x^2 - 11x + 28$,$0 \le x \le 4$，則 $k'(x) = 2x - 11 = 0$．所以 k 在 [0,4] 上遞減.
因此在 L_3 上，$k(4) = 0$ 爲最小值，$k(0) = 28$ 爲最大值．

故由(I)–(IV)，我們可推得在圍成的三角形領域上，-4 爲 f 的最小值；28 爲 f 的最大值．