1. 一條密度不均勻的纜線, 其曲線爲 $\vec{r}(t) = (0, t^2 - 1, 2t)$, $0 \le t \le 1$. 該纜線的線密度 $\delta(x,y,z) = \sqrt{y+2}$. 求該纜線的質量中心.

2. 向量場 $\vec{F}(x,y) = (x,y)$, 曲線 C 爲橢圓 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$. 用線積分的定義直接計算 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds$ 與 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 之值. 其中, $\vec{n}$ 表橢圓 C 上的往外單位法向量, $\vec{T}$ 爲沿橢圓 C 逆時針方向前進時的單位切向量.

3. 令向量場 $\vec{F}(x,y,z) = (e^x\cos y + yz, xz - e^x\sin y + 1, xy + e^z)$, C 爲由 (1,0,1) 到 (1,π,3) 的有向線段.

(a) 求 $\vec{F}$ 的位能函數.

(b) 求 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 之值.

4. 令向量場 $\vec{F}(x,y) = (y\sin(x^2y^2) - y, x\sin(x^2y^2) + x)$, C_1 爲由 (2,0) 經 (0,0) 到 (0,2) 的有向折線, C_2 爲由 (2,0) 出發, 沿圓 $x^2+y^2=4$ 逆時針前進到 (0,2) 的有向曲線.

(a) 求 $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 之值.

(b) 求 $\displaystyle\int_{C_2} \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 之值.

5. 令 C 爲橢圓 $2x^2+3y^2=1$, 逆時針方向前進, 向量場 $\vec{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^2+y^2-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x^2+y^2+x}{x^2+y^2}\right)$. 求 $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 之值. 注意, 原點不在 $\vec{F}$ 的定義域之內.

6. 求圓柱 $x^2+y^2=2x$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所截部分之面積.

7. 設 $\vec{u} = (a,b,c)$ 爲單位向量, 在平面 $ax+by+cz=0$ 上以原點 爲圓心的單位圓用 C 表示, C 與 $\vec{u}$ 的指向成一右手系. 令 $\vec{F}(x,y,z) = (3y-2z, x+2z, 2x-y)$,

(a) $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$

(b) 問 $\vec{u}$ 爲哪一方向時, $\displaystyle\int_C \vec{F}\cdot\vec{T}\,ds$ 最大? 最大值又是多少?

8. 設向量場 $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{x^3}{a^2}, \dfrac{y^3}{b^2}, \dfrac{z^3}{c^2}\right)$, 求 $\displaystyle\int_S\!\!\int \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ 之值, 其中 S 爲橢球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\vec{n}$ 爲橢球面上的往外單位法向量.

9. 設球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限 $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ 之部分的形心.

10. 設向量場 $\vec{F}(x,y,z) = (y, x^2, (x^2+y^4)^{3/2}\sin(e^{\sqrt{xyz}}))$, S 爲半個橢球面 $4x^2+9y^2+36z^2 = 36$, $z\ge 0$. 求 $\displaystyle\int_S\!\!\int (\bigtriangledown\times\vec{F})\cdot\vec{n}\,d\sigma$ 之值, 其中 $\vec{n}$ 爲橢球面指向外側的單位法向量.