八十九學年度微積分甲統一教學下學期期中考

第 1 題 考慮曲面方程式: $f(x,y,z) = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$, 及曲面上之一點 $p = (1,2,-1)$. 推求通過該點 p 之

(a) 切平面 (tangent plane) 和

(b) 法線 (normal line) 方程式.

解答: (a) 函數 f 的梯度向量 $\bigtriangledown f = (2xyz - 2z^2, x^2z + 6y, x^2y - 4xz + 8)$
$\Rightarrow$ 函數 f 在點 $p = (1,2,-1)$ 的梯度向量爲 $(-6, 11, 14)$
$\Rightarrow$ 切平面方程式爲 $-6(x-1) + 11(y-2) + 14(z+1) = 0$

(b) 法線方程式爲 $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-2}{11} = \dfrac{x+1}{14} = t \qquad t \in R$

第 2 題 令 $f(x,y) = (x^3 - xy^2)/(x^2 + y^2)$. 請回答下面問題

(a) 定義 $f(0,0)$ 使得 $f(x,y)$ 在 (0,0) 點連續.

(b) 求 $f_x(x,y)$ 及 $f_x(0,0)$

(c) 試問 $f_x(x,y)$ 在 (0,0) 點連續否?

解答: (a) $\left|\dfrac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}\right| = \left|\dfrac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}\right| \le |x|$ 對於 $(x,y) \neq (0,0)$

定義 $f(0,0) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} |f(x,y) - f(0,0)| \le \lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} |x| = 0$

(b) $f_x(x,y) = \dfrac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2}$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{x^2} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - 0}{x} = 1$

(c) 令 $y = kx$, 對於 $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2) - (x^3 - xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^4 + 5x^2y^2 - x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{x^4 + 2x^2y^2 + y^4} \\
&= \frac{x^4 - k^4x^4 + 4x^2k^2x^2}{x^4 + k^4x^4 + 2x^2k^2x^2} \\
&= \frac{1 - k^4 + 4k^2}{1 + k^4 + 2k^2}
\end{aligned}$$

不同的 k 值有不同的極限, 因此 $\lim\limits_{x\to 0,\, y\to 0} f(x,y)$ 不存在. 所以 $f_x(x,y)$ 在 (0,0) 不連續.

第 3 題 若 $u = f(r,\theta,z')$ 爲一個在柱面坐標系統下的二次可微分函數, 其中 (r,θ,z') 與 Cartesian 坐標系統變數 (x,y,z) 之間的關係爲:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z'$$

(a) 試用 chain rule 將 Cartesian 坐標系統下的偏導數: u_x, u_y, 和 u_z, 分別寫成柱面坐標系統下 u 對變數 r, θ, 和 z' 的偏導數的表示式.

(b) 試問在柱面坐標系統下函數 u 延著某單位向量 $\vec{p}$ 的方向導函數爲最大時, 該最大變化率爲若干?

解答: (a) $r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{(y)(-\frac{1}{x^2})}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r}\frac{y}{r} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{1}{r}\frac{x}{r} = -\frac{\cos\theta}{r}$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = (u_r)\cos\theta - (u_\theta)\frac{\sin\theta}{r}$$

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = (u_r)\sin\theta + (u_\theta)\frac{\cos\theta}{r}$$

(b) 假設單位向量 $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3), \qquad p_1^2 + p^2 + p_3^2 = 1$

函數 u 沿著 $\vec{p}$ 的方向導數爲 $u_x p_1 + u_y p_2 + u_{z'} p_3 \le \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} = \sqrt{u_r^2 + \dfrac{u_\theta^2}{r^2} + u_z^2}$

第 4 題 試問當 (x,y) 定義在下列圖型內部的情形下 (包含邊界), 函數 $f(x,y) = e^{3x^2-2y^2}$ 的極值爲若干?

解答: (1): 內部極值可能發生的點,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^{3x^2-2y^2})(6x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (e^{3x^2-2y^2})(-4y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{(3x^2-2y^2)}(6x)^2 + (e^{(3x^2-2y^2)}6$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{(3x^2-2y^2)}(6x)(-4y)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{(3x^2-2y^2)}(4y)^2 + e^{(3x^2-2y^2)}(-4)$$

運用二次導數檢驗法 $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ 在 $(0,0)$
因此函數 f 在 $(0,0)$ 處爲一個鞍點 (saddle point).

(2): 在上半圓極值可能發生的點,
令 $y = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow f(x, \sqrt{x^2+y^2}) = e^{3x^2-2(1-x^2)} = e^{5x^2-2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^{5x^2-2})(10x) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y = 1$$

$f(0,1) = e^{-2} \qquad f(1,0) = f(-1,0) = e^3$

(3): 在邊界 $y = x-1, \quad 0 \le x \le 1$ 上極值可能發生的點
$f(x, x-1) = e^{x^2+2x-2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (e^{x^2+2x-2})(2x+2) = 0 \Rightarrow x = -1, y = -2$$

但 $(-1,-2)$ 並不在線段 $(y = x-1,\ 0 \le x \le 1)$ 上
所以極值可能發生點爲 $(1,0)$ 和 $(0,-1)$
$f(1,0) = e^3, \quad f(0,-1) = e^{-2}$

(4): 在邊界 $y=-(x+1), \quad -1<x<0$ 上極直可能發生的點

$f(x,-(x+1))=e^{x^2-4x-2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=(e^{x^2-4x})(2x-4)=0 \Rightarrow x=2, y=-3$

但 $(2,-3)$ 並不在線段 $(y=-(x+1), \quad -1<x<0)$ 上

所以極值可能發生點爲 $(-1,0)$ 和 $(0,-1)$

$f(-1,0)=e^3, \quad f(0,-1)=e^{-2}$

綜合 (1)(2)(3)(4) 的結論得知整個區域極值可能發生的點爲 (1,0),(0,-1),(-1,0),(0,1)

本來需要進一步檢查這些點是否爲區域極值 (local extreme value)

但由於 $f(1,0)=f(-1,0)=e^3, \quad f(0,1)=f(0,-1)=e^{-2}$

所以$f(1,0)$ 和 $f(-1,0)$ 必爲整個區域的最大值, 自然也是區域極大值.

同理$f(0,1)$ 和 $f(0,-1)$ 必爲整個區域的最小值, 自然也是區域極小值.

第 5 題 已知一個上方開口 (open at the top) 的長方形盒子的表面積爲 $100m^2$, 試決定該盒的長, 寬, 高以使得盒子的體積爲最大.

解答: 假設盒子的長爲 x m, 寬爲 y m, 高爲 z m.

盒子的表面積爲 $100m^2 \Rightarrow xy+2xz+2yz=100$

題目要我們在表面積爲 $100m^2$ 的限制下決定長, 寬, 高以使得體積最大

我們要找出 $f(x,y,z)=xyz$ 的最大值當 (x,y,z) 在 $g(x,y,z)=xy+2xz+2yz-100=0$上

The Method of Lagrange Multipliers 告訴我們區域最大值發生點會滿足方程式

$\bigtriangledown f=\lambda \bigtriangledown g$ 和 $g(x,y,z)=0$

$\bigtriangledown f=(yz,xz,xy), \quad \bigtriangledown g=(y+2z,x+2z,2x+2y)$

$\bigtriangledown f=\lambda \bigtriangledown g$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} yz=\lambda(y+2z) \\ xz=\lambda(x+2z) \\ xy=\lambda(2x+2y) \end{cases}$ 解方程式得 x,y,z,λ 之間的關係爲 $x=y=4\lambda$, $z=2\lambda$

代入 $g(x,y,z)=0 \Rightarrow \lambda=\dfrac{5}{6}\sqrt{3}$

$\Rightarrow (x,y,z)=(\dfrac{10}{3}\sqrt{3}, \dfrac{10}{3}\sqrt{3}, \dfrac{5}{3}\sqrt{3})$ 使得體積最大.

註: 測驗時解方程式的過程應明確地寫出來, 否則會被酌予扣分.

第 6 題 試計算下列雙重積分

(a) $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{xy}\,dxdy$, D is the region bounded by $1 \le x \le e^2$, $1 \le y \le 2$;

(b) $\displaystyle\int_{y=0}^{4}\int_{x=y/2}^{2} e^{x^2}\,dxdy$

解答: (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{y}\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\,dxdy=\int_1^2 (\ln x)|_1^{e^2}\frac{1}{y}\,dxdy=\int_1^2\frac{1}{y}2\,dy=2\ln y|_1^2=2\ln 2$

(b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{2x} e^{x^2}\,dydx=\int_0^2 e^{x^2}(2x)\,dx=e^{x^2}|_0^2=e^4-1$

第 7 題 試推求在 cardioid $r=1+\cos\theta$ 內部和 circle $r=1$ 外部所圍成區域之面積

解答: $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_1^{1+\cos\theta} r\,drd\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}r^2|_1^{1+\cos\theta}\right)d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{1}{2}(1+\cos\theta)^2-\frac{1}{2}\right)d\theta$

$\displaystyle=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{1}{2}(1+2\cos\theta+\cos\theta^2)-\frac{1}{2}\right]d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta+\frac{\cos^2\theta}{2}\,d\theta$

$\displaystyle=\sin\theta|_{-\pi/2}^{\pi/2}+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos 2\theta}{4}\,d\theta=1+1+\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\sin 2\theta}{8}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}$

$\displaystyle=2+\frac{\pi}{4}$

第 8 題 令 V 爲由拋物面 $z = x^2 + y^2$ 與平面 $z = 4$ 所圍成之立體區域, 試推求 V 的形心坐標.

解答: $M = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 dz\, r dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r\, dr d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 4r - r^3\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} 4\, d\theta = 8\pi$

$M_{xy} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 zr\, dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 8r - \frac{r^5}{2}\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{32}{3}\, d\theta = \frac{64\pi}{3}$

$\frac{M_{xy}}{M} = \frac{8}{3}$

形心落於對稱軸上, 也就是 z-軸.

因此形心坐標爲 $(0, 0, \frac{8}{3})$

第 9 題 (a) 設 A 爲球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 與圓柱 $x^2 + (y - 1/2)^2\ eq (1/2)^2$ 的交集. 試推求 A 的體積.

(b) 設 B 爲橢球 $x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 \leq 1$ 與橢柱 $x^2 + (y-1)^2/4 \leq (1/2)^2$ 的交集. 試利用 (a) 之結果, 推求 B 的體積.

解答: (a) $A = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} dz\, r dr d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{\sin\theta} 2\sqrt{1-r^2} r\, dr d\theta = \int_0^{\pi} \frac{2}{3} \left[-(1-r^2)^{3/2}\right] \Big|_0^{\sin\theta}\ d\theta$

$= \int_0^{\pi} \frac{-2}{3} |\cos^3\theta| + \frac{2}{3}\, d\theta = \frac{2}{3}\theta|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{2}{3} |\cos^3\theta|\, d\theta = \frac{2}{3}\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \frac{2}{3} \cos^3\theta\, d\theta$

$= \frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}$

(b) 令 $u = x$, $v = \frac{y}{2}$ $w = \frac{z}{3}$

$x^2 + (y/2)^2 + (z/3)^2 \leq 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$

$x^2 + (y-1)^2/4 \leq (1/2)^2 \Rightarrow u^2 + (v - 1/2)^2 \leq (1/2)^2$

$B = A \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (\frac{2}{3}\pi - \frac{8}{9}) \cdot 6 = 4\pi - \frac{16}{3}$

第 10 題 Ω 表單位球體, $k > 0$ 爲常數

(a) 求 $\int\int\int_{\Omega} \cos(kz)\, dV$ 之值.

(b) 利用 (a) 的結果求 $\int\int\int_{\Omega} \cos(x + y + z)\, dV$ 之值.

(提示: 球無方向性, 以 $x + y + z = 0$ 的法向爲新 z 軸; 令 $z' = (x + y + z)/\sqrt{3}$)

解答: (a) $\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \cos(kz)\, r dr d\theta dz$

$= \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (\cos(kz)) \frac{1 - z^2}{2}\, d\theta\, dz$

$= \int_{-1}^1 \pi \cos(kz)(1 - z^2)\, dz$

$= \pi \left[\int_{-1}^1 \cos(kz)\, dz - \int_{-1}^1 z^2 \cos(kz)\, dz \right]$

$= \pi \left[\frac{\sin(kz)}{k} - z^2 \frac{\sin(kz)}{k} - 2z \frac{\cos(kz)}{k^2} + \frac{2\sin(kz)}{k^3} \right]_{-1}^1$

$= \pi \left[\frac{4\sin k}{k^3} - \frac{4\cos k}{k^2} \right]$

(b) 利用坐標軸旋轉其 Jacobian=1 的想法將 $x+y+z=0$ 的法向定爲新 z 軸

$$\int\int\int_{\Omega}\cos(x+y+z)\,dV=\int\int\int_{\Omega}\cos(\sqrt{3}z)\,dV$$

也就是將 (a) 小題的 k 代入 $\sqrt{3}$ 就得到 (b) 小題的答案

註: 若各位不相信旋轉座標軸其 Jacobian=1,
可嘗試計算此座標變換來得出 (b) 小題的答案

$$x^{'}=\frac{x-2y+z}{\sqrt{6}}$$

$$y^{'}=\frac{x-z}{\sqrt{2}}$$

$$z^{'}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

第 11 題 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1 \quad (x>0, y>0, z>0)$ 與三座標平面圖 所圍成之體績.
(提示: 令 $x=u^2, y=v^2, z=w^2$)

解答: 令 $x=u^2, y=v^2, z=w^2$

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} 2u & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{vmatrix}=8uvw$$

$$\int_0^1\int_0^{1-u}\int_0^{1-v-u} 8uvw\,dwdvdu$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-u} 4uv(1-u-v)^2\,dvdu$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-u}(4uv+4u^3v+4uv^3-8u^2v+8u^2v^2-8uv^2)\,dvdu$$

$$=\int_0^1(2u+2u^3-4u^2)(1-u)^2+\frac{8}{3}(u^2-u)(1-u)^3+u(1-u)^4\,du$$

$$=\int_0^1\frac{1}{3}u(u-1)^4\,du$$

$$=\int_{-1}^0\frac{1}{3}(t+1)t^4\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-1}^0 t^5+t^4\,dt$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{6}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{90}$$