微積分甲89學年度上學期期中考

1. 試推求常數 a 和常數 b 的值以使得函數 $f(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 時為一 連續可微分的函數

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} & 當\theta > 0 \\ a\theta + b & 當\theta \leq 0 \end{cases}$$

解答: $\lim\limits_{\theta\to 0^-} f(\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0^-} a\theta + b = b$

$$\lim_{\theta\to 0^+} f(\theta) = \lim_{\theta\to 0^+}\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right| \leq \lim_{\theta\to 0^+}\left|\frac{(\sin d)\theta}{\sin\theta}\right| = \frac{\lim\limits_{\theta\to 0^+} |\sin d|}{\lim\limits_{\theta\to 0^+}\left|\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right|} = \frac{0}{1} = 0$$

$\Rightarrow b = 0$

$$左導數 = \lim_{\theta\to 0^-}\frac{a\theta - 0}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^-} a\frac{\theta}{\theta} = a$$

$$右導數 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta} - 0}{\theta} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(\theta\sin\theta)(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin^2\theta}{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

2. 考慮曲線方程式: $x^3+y^3=2xy$, 試求 dy/dx 和 d^2y/dx^2 在點 $(x,y)=(1,1)$ 之值.

解答: 對 $x^3+y^3=2xy$ 兩邊微分求一次導數

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}=2y+2x\frac{dy}{dx}$$

$$(3y^2-2x)\frac{dy}{dx}=2y-3x^2$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}=\frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}=\frac{2-3}{3-2}=\frac{-1}{1}=-1$$

求二次導數

$$6x+6y\frac{dy}{dx}(\frac{dy}{dx})+3y^2\frac{d^2y}{dx^2}=2\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}+2\frac{d^2y}{dx^2}$$

將 (1,1) 代入

$$6+6\times 1\times(-1)(-1)+3\times 1\times\frac{d^2y}{dx^2}=2\times(-1)+2\times(-1)+2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-4-6-6=-16$$

3. 考慮函數 $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ 試計算下列極限:

$(a)\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x$若極限存在, 稱該結果爲 A),

$(b)\ \lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-Ax)$.

解答: (a): $|x+1|\le\sqrt{x^2+x}\le|x|$, 對於 $x<-10$

$$\Rightarrow \frac{|x+1|}{x}\ge\sqrt{x^2+x}\ge\frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow -1-\frac{1}{x}\ge\sqrt{x^2+x}\ge-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$$

(b):

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)(\sqrt{x^2+x}-x)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{y\to\infty}\frac{-y}{\sqrt{y^2-y}+y}=-\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt{y^2-y}+y}$$

$$=-\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-(1/y)}+1}=-\frac{1}{2}$$

4. 試問若某生想要將一個正圓錐 (right circular cone) 內接於半徑爲 a 的球內, 該園錐最大的體積爲若干?

解答: $f(x) = \frac{1}{3}\pi x^2(a+\sqrt{a^2-x^2})$

$f'(x) = \frac{1}{3}\pi(2ax + 2x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}})$

令 $f'(x) = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{8}{9}a^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{2}a}{3} \qquad (-\frac{2\sqrt{2}a}{3}$不合$)$

$\Rightarrow f(\frac{2\sqrt{2}}{3}a) = \frac{32}{81}a^3\pi$

5. 試證明下列問題:

(a) $|\tan x - \tan y| \geq |x-y|$ 對所有的 $x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x \in (0, \pi/2)$ 之間爲一遞減函數.

解答: (a) 利用均值定理

$\tan x - \tan y = (\sec^2 d)(x-y)$, d 介於 x 和 y 之間

$|\tan x - \tan y| = |\sec^2(d)||x-y| \geq |x-y|$

(b) $f'(x) = (\dfrac{\sin x}{x})' = \dfrac{(\cos x) - (\sin x)}{x^2}$

令 $g(x) = (\cos x)x - \sin x$

$g(0) = 0$

$g'(x) = (-\sin x)x + (\cos x) \times 1 - \cos x = (-\sin x)x < 0$, 對於 $x \in (0, \pi/2)$

所以 $g(x) < 0$ 對於 $x \in (0, \pi/2)$

所以 $f'(x) < 0$ 對於 $x \in (0, \pi/2)$

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, \pi/2)$ 之間是一個遞減函數

6. 試描繪 $f(x) = x^{2/3}(2x+5)$ 之圖形, 請指出 (i) 極值, (ii) 反曲點, (iii) 上昇 下降區間, 及 (iv) 上凹下凸區間.

解答: $f'(x) = \dfrac{10x+10}{3\sqrt[3]{x}}$

$f''(x) = \dfrac{20x-10}{9\sqrt[3]{x^4}}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, \quad f(-1) = 3$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1/2, \quad f(1/2) = \dfrac{6}{\sqrt[3]{6}}$

(i)$f(x)$在$x=-1$時有極大值 3, 在 $x=0$ 處有極小值0

(ii)$f(x)$ 在 $x = 1/2$ 時有反曲點 $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{6}{\sqrt[3]{4}})$

(iii)$f(x)$ 在 $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ 爲遞增函數, 在 $(-1, 0)$ 爲遞減函數

(iv)$f(x)$ 在 $(-\infty, 1/2)$ 爲凹口向下, 在 $(1/2, \infty)$ 爲凹口向上

7. 求極限:

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left\{ \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n-1)^3} + \cdots + \frac{1}{[n+(2n-1)]^3} \right\}.$$

(Hint: 上式是一個函數在某區間的 Riemann 和之極限, 試著將上式話成定積分.)

解答: $\frac{1}{n} \times n^3 \left\{ \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots + \frac{1}{[n+(2n-1)]^3} \right\}.$

$= \frac{1}{n} \left\{ (\frac{n}{n})^3 + (\frac{n}{n+1})^3 + \cdots + \frac{n^3}{[n+(2n-1)]^3} \right\}.$

$= \frac{1}{n} \left\{ (\frac{1}{1+\frac{0}{n}})^3 + (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^3 + \cdots + \frac{1}{(1+2-\frac{1}{n})^3} \right\}.$

$= \frac{2-0}{2n} \left\{ (\frac{1}{1+\frac{0}{2n}})^3 + (\frac{1}{1+\frac{2}{2n}})^3 + \cdots + \frac{1}{(1+2-\frac{2}{2n})^3} \right\}.$

$= \int_0^2 (1+x)^{-3} dx = -\frac{1}{2} \times (\frac{1}{9} - 1) = \frac{4}{9}$

8, 假設 $F(x)=\int_0^x (x-t)t\sin(t^2)\,dt$, 求 $F'(x)$

解答: $F(x)=x\int_0^x t\sin(t^2)\,dt-\int_0^x t^2\sin(t^2)\,dt$

$F'(x)=\int_0^x t\sin(t^2)\,dt+x(x\sin(x^2))-x^2\sin(x^2)=\int_0^x t\sin(t^2)dt$

令 $u=t^2$

$\Rightarrow F'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}\sin u du=\frac{1}{2}(-\cos u)|_0^{x^2}=\frac{1}{2}(-\cos x^2+1)$

9. 若半徑為 R 的球面被距離為 $h(< 2R)$ 的二平行面所截, 試證: 所截球表面積 (亦即, 球面 介於二平行面間的面積) 只與二平行面間的拒離 h 有關, 與所截位置無關.

解答: $$\begin{aligned}&\int_{a-h}^{a} 2\pi y ds = 2\pi\int_{a-h}^{a} y\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}dx \\ &= 2\pi\int_{a-h}^{a} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}dx = 2\pi\int_{a-h}^{a} Rdx \\ &= 2\pi(Rx)|_{a-h}^{a} = 2\pi Ra - 2\pi R(a-h) = 2\pi Rh\end{aligned}$$

10. 求上半單位球體的形狀中心.

解答: 由對稱性可知形狀中心的位置應該 y 軸上

$$dV = (\sqrt{1-y^2})^2 \pi dy = (1-y^2)\pi dy$$

$$\bar{y} = \frac{\int y dv}{\int dv} = \frac{\pi \int_0^1 y(1-y^2)dy}{\pi \int_0^1 (1-y^2)dy} = \frac{(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4})|_0^1}{(y - \frac{y^3}{3})|_0^1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{8}$$

形狀中心在 (0,3/8)