1.(16%) 判斷以下級數爲絕對收斂 (converges absolutely), 條件收斂 (converges conditionally) 或發散 (diverges)。

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$.

<u>參考解答:</u>

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \neq 0$, 故爲發散。

(b) 因爲 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$, 所以 $\sum\sin\frac{1}{n}$ 爲發散。

$a_n = \sin\frac{1}{n}$ 爲遞減且趨近於 0, 故 $\sum(-1)^n\sin\frac{1}{n}$ 爲收斂 因此爲條件收斂。

2.(8%) 求冪級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(3^n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}x^n$ 的收斂半徑 (radius of convergence)。

<u>參考解答:</u>

$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+1}+1)}{(2n+3)(3^n+1)}|x| = \frac{3}{2}|x|$。收斂半徑爲 $\frac{2}{3}$。

3.(8%) 估計 $\int_0^1 \sin(x^2)dx$ 之值, 使其誤差不超過 0.001。

<u>參考解答:</u>

$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 (x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + \cdots)dx$

$= (\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{11}}{1320})|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \cdots \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} = \frac{13}{42}.$

因其爲交錯級數, 故誤差 $< \frac{1}{1320} < \frac{1}{1000}$.

4.(10%) 求函數 $y = \ln(\cos x)$ 之圖形在 $x = \frac{\pi}{4}$ 的曲率(curvature) κ 。

<u>參考解答:</u>

$\mathbf{r}(t) = < t, \ln(\cos t) >$

$\mathbf{v}(t) = < 1, -\tan t >$

$v(t) = \|\mathbf{v}(t)\| = \sec t.$

$\mathbf{T}(t) = < \cos t, -\sin t >$.

$\frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} = < -\sin t, -\cos t >$.

$|\frac{d\mathbf{T}}{dt}| = 1, \kappa = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}|\frac{d\mathbf{T}}{dt}| = \cos t.$

令 $t = \frac{\pi}{4}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5.(8%) 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan^{-1}x - x^2 + \frac{x^4}{2}}{x^6}$.

参考解答:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\tan^{-1}x - x^2 + \frac{x^4}{2}}{x^6}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\cdots)(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots)-x^2+\frac{x^4}{2}}{x^6}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\frac{x^4}{2}+\frac{19}{72}x^6-\cdots)-x^2+\frac{x^4}{2}}{x^6}$

$= \frac{19}{72}$.

6.(10%) 令 $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xyz-xz$。

(a) 求 $D_{\mathbf{u}}T(1,2,3)$, 其中 $\mathbf{u}$ 是以 $\mathbf{i}+2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ 爲方向。
(b) 求 $T(x,y,z)$ 在點 $(1,2,3)$ 沿著那個方向之變化率最大? 其變化率爲何?

参考解答:

$\nabla T(x,y,z) =< 2x-yz-z, 2y-xz, 2z-xy-x >$,

$\nabla T(1,2,3) =< -7,1,3 >$, $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} < 1,2,3 >$.

(a) $D_{\mathbf{u}}T(1,2,3) = \nabla T(1,2,3)\cdot\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} < -7,1,3 >< 1,2,3 >= \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$.
(b) 變化率最大的方向爲 $\frac{1}{\sqrt{59}} < -7,1,3 >$, 變化率爲 $\sqrt{59}$.

7.(10%) (a) 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6}$.

(b) 求 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.

<u>參考解答:</u>

(a) 當 $x=0$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = 0$.

當 $x=y^3$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3\cdot y^3}{(y^3)^2+y^6} = \frac{1}{2} \neq 0$.

故極限不存在。

(b) 因 $0 \leq |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| \leq |\frac{(x^2+y^2)y}{x^2+y^2}| \leq |y|$

故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

或令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$0 \leq |\frac{x^2y}{x^2+y^2}| = |r\cos^2\theta\sin\theta| \leq r$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$

8.(10%) 兩曲面 $x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2=0$ 及 $x^2+y^2+z^2-11=0$ 相交一曲線。求該曲線在點 $(1,1,3)$ 之切線的方程式或參數式。

<u>參考解答:</u>

Let $f(x,y,z)=x^3+3x^2y^2+y^3+4xy-z^2$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-11$

$\nabla f(x,y,z)=<3x^2+6xy^2+4y, 6x^2y+3y^2+4x, -2z>, \nabla f(1,1,3)=<13,13,-6>$

$\nabla g(x,y,z)=<2x,2y,2z>, \nabla g(1,1,3)=<2,2,6>$

$\nabla f(1,1,3)\times\nabla g(1,1,3)=<90,-90,0>$, 切線爲 $\begin{cases} x=1+90t \\ y=1-90t \\ z=3 \end{cases}$

9.(10%) 令 $f(x,y) = y^3 + 2x^2 + 6xy + 6y$. 求出所有臨界點 (critical points), 並判斷它是局部極大 (local maximum)、極小值 (local minimum), 或是鞍點 (saddle point)。

<u>參考解答:</u>

$f(x,y) = y^3 + 2x^2 + 6xy + 6y$,$\nabla f =< 4x + 6y, 3y^2 + 6x + 6 >$

Let $\nabla f(x,y) =< 0,0 > \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 0 \\ 3y^2 + 6x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (-\frac{3}{2}, 1), (-3, 2)$

$H_f = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 6y \end{vmatrix} = 24y - 36.$

$H_f(-\frac{3}{2}, 1) = -12 < 0$, 故 $(-\frac{3}{2}, 1)$ 爲鞍點

$H_f(-3,2) = 12 > 0$, 且 $f_{xx} > 0$, 故 $f(-3,2) = 2$ 爲極小值。

10.(10%) 求 $f(x,y)=x^3+3x^2y$ 在 $x^2+4xy+5y^2\le 5$ 上的最大、最小值。

<u>參考解答:</u>

$\nabla f(x,y)=<3x^2+6xy,3x^2>$.

Let $\nabla f(x,y)=<0,0>\Rightarrow \begin{cases} 3x^2+6xy=0 \\ 3x^2=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(0,y)$

Let $g(x,y)=x^2+4xy+5y^2-5$, $\nabla g=<2x+4y,4x+10y>$

$\nabla f=\lambda\nabla g \Rightarrow \begin{cases} 3x^2+6xy=\lambda(2x+4y) & \cdots(1) \\ 3x^2=\lambda(4x+10y) & \cdots(2) \end{cases}$

$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow (3x^2+6xy)(4x+10y)=3x^2(2x+4y)\Rightarrow x(x+5y)(x+2y)=0$

將 $x=0$, $x=-5y$, $x=-2y$ 分別代入 $x^2+4xy+5y^2=5$

得 $(x,y)=(0,\pm1)$, $(\pm5\sqrt{\frac{1}{2}},\mp\sqrt{\frac{1}{2}})$, $(\pm2\sqrt{5},\mp\sqrt{5})$.

$f(0,y)=0$, $f(0,\pm1)=0$, $f(\pm5\sqrt{\frac{1}{2}},\mp\sqrt{\frac{1}{2}})=\pm\frac{25}{2}\sqrt{2}$, $f(\pm2\sqrt{5},\mp\sqrt{5})=\mp20\sqrt{5}$

最大值爲 $f(-2\sqrt{5},\sqrt{5})=20\sqrt{5}$. 最小值爲 $f(2\sqrt{5},-\sqrt{5})=-20\sqrt{5}$.