93學年下學期微甲二組期末考

1. (12分) 求 $\displaystyle\iint_R \sin\left(x^2+2xy+y^2\right)\ dx\ dy$, 其中 R 為由 $x+y=1$ 及兩座標軸所圍成之區域。

2. (12分) 求 $\displaystyle\iiint_R e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\ dx\,dy\ dz$, 其中 R 為由錐面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球 $x^2+y^2+z^2=1$ 所包圍成之區域。

3. (14分) 試求正向 (positively oriented) 簡單曲線 (simple closed curve) C 使得
$$\int_C (y^3-y)\ dx - x^3\ dy$$
為最大, 並求其最大值。

4. (14分) 向量場 $F(x,y,z)=\left(\dfrac{y}{1+x^2y^2}, \dfrac{x}{1+x^2y^2}+\dfrac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2x^2}}+z\right)$。
   (a) 試求 F 之位能函數 (potential function)。
   (b) 試求 $\int_C F\cdot dr$, 其中 C 是在 xy 平面的上半心臟線 $r=1+\cos\theta$, θ 由 0 到 π, 即 C 是指向為逆時針的有向曲線。

5. (12分)S 為上上半球面 $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$, 試求 $\displaystyle\iint_S \left(x^2+y^2\right) z\ dS$。

6. (12分) 向量場 $F(x,y,z)=(yz^5, \sin(xyz), x)$, S 為拋物面 $y=1-x^2-z^2$ 落於 xz 平面右邊的部份, 其指向朝外具正 y 分量。求 $\displaystyle\iint_S \mathrm{curl}F\cdot n\ dS$。

7. (12分) 設 $a^2+b^2+c^2=1$。令 C 為由平面 $ax+by+cz=\frac{4}{5}$ 和球 $x^2+y^2+z^2=1$ 所相交出曲線。由求心看過去, C 之指向為順時針。求 $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot dr$, 其中 $\mathbf{F}(x,y,z)=(2y-z)\mathbf{i}+(3x+2z)\mathbf{j}+(2x-y)\mathbf{k}$。

8. (12分) 試求 $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot dS$, 其中 $F(x,y,z)=\left(xy, -\dfrac{y^2}{2}, z\right)$, 曲面 S 為三個曲面 S_1, S_2, S_3 之聯集。其中 S_1 為 $z=4-3x^2-3y^2$ 且 $1\leq z\leq 4$, S_2 為圓柱面 $x^2+y^2=1$, $0\leq z\leq 1$, S_3 為平面 $z=0$。