93學年上學期微甲二組期末考

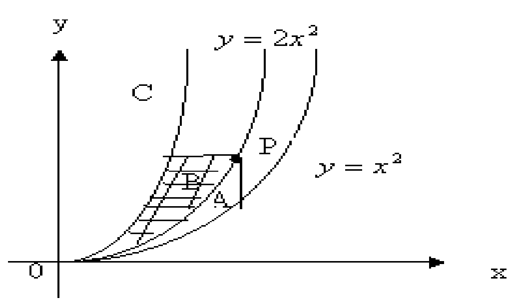
1. (14分) 令 R 表示由 y 軸和兩曲線 $y=\cos x,\ y=\sin x,\ 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}$, 所圍成之區域, 試求由 R 繞 y 軸旋轉所得立體之體積。

   Solution:

   繞 y 軸

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\pi x(\cos x-\sin x)dx \\
&= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx\right) \\
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos x dx &= x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x dx \\
&= \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2}-(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1 \\
-\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} xd(\cos x) \\
&= x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x dx \\
&= \frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\
\therefore V &= \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{4}-1\right)\cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

2. (15分)在圖中由上到下可看到三條曲線, 曲線 $C: y=f(x)$, 拋物線 $y=2x^2$, 及拋物線 $y=x^2$。曲線 C 的特性乃是在拋物線 $y=2x^2$ 上任何一點 P 畫垂直線及水平線, 所決定出來的區域 A 及 B 的面積都是相等。試藉由這個特性來決定曲線 C 的方程式。(提示: 面積的計算可使用 $y=f(x)$ 或 $x=f^{-1}(y)$ 來進行)



3. (10分)試求不定積分 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

   Solution:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}$$
$$= \frac{1}{3(x+1)} - \frac{(2x-1)}{6(x^2-x+1)} + \frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

So

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6}\int \frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}$$
$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C$$

4. (10分)試求不定積分 $\displaystyle\int x\ln x\ dx.$

<u>solution:</u>

$$\int x\ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

5. (15分)令 R 表示由 y 軸, 曲線 $y=\sin x$, 及線段 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ 所圍成之區域, 令 S 代表由 R 繞 x 軸旋轉所得之立體。
   (a) 試求不定積分 $\displaystyle\int \sec^3 x\ dx$。
   (b) 試求 S 的表面積。(別忘了計算底部的面積)

6. (10分)設 a, b 為常數且 $b>a>0$。令 $F(x)=\dfrac{b^{x+1}-a^{x+1}}{x+1}$。試求極限 $\displaystyle\lim_{x\to-1}F(x)$ 之值。

7. (12分)
   (a) 試寫出 $\tan^{-1}x$ 之 Maclaurin 級數。
   <u>solution:</u>
   $\tan^{-1}x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{2n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$
   (b) 設 $f(x)=x\tan^{-1}x$, 試求 $f^{(16)}(0)$。

8. (15分)當 $1\le p\le 2$ 時, 討論級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}$ 是收斂或是發散。