微積分 (甲) 期中考試題與解答–(I) 組

1. 試求極限$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$之值。

解: 若$x\neq 0$, 則$|\sin\frac{1}{x}|\leq 1$, 則

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}\leq|\frac{x^2}{\sin x}|$$

因$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to}\frac{x}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{0}{1}=0$, 故$\lim_{x\to}|\frac{x^2}{\sin x}|=0$。由夾擊定理知$\displaystyle\lim_{x\to 0}|\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}|=0$, 故得$\displaystyle\lim_{x\to}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=0$。

2. 設α,β爲二常數, 假設$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\alpha x-\beta)=0$, 試求$\alpha,\beta$之值。

解: 若$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\alpha x-\beta)=0$, 則$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x+2}-\alpha x-\beta}{x}=0$,
即$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\alpha-\frac{\beta}{x})=0$, 故$\displaystyle\alpha=\lim_{x\to-\infty}(-1\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-\frac{\beta}{x})=-1$, 而

$$\begin{aligned}\beta &= \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}+x)\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+3x+2)-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+2}-x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{-\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}-1}=\frac{3}{-2}=-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

3. 設$f(x),g(x)$爲二可微分函數且$f(1)=1,f'(1)=0,g(0)=0,g'(0)=1$, 試求極限$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)g(\cos x)}{x^2-\frac{\pi}{2}x}$之值。

解: 令$h(x)=f(\sin x)g(\cos x)$, 則$h(\frac{\pi}{2})=f(1)g(0)=0$, 且

$$h'(x)=f'(\sin x)\cos xg(\cos x)+f(\sin x)g'(\cos x)(-\sin x)$$

, 故$h'(\frac{\pi}{2})=f'(1)\cdot 1\cdot g(0)+f(1)\cdot g'(0)\cdot(-1)=0\cdot 1\cdot 0+1\cdot 1\cdot(-1)=-1$。
因此

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(\sin x)g(\cos x)}{x^2-\frac{\pi}{2}x}\\ =&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x}\cdot\frac{h(x)-h(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}}\\ =&\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot h'(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

4. 設函數$f(x)$有二階導函數, 且滿足$x^2 + xf(x) + [f(x)]^2 = k$, 其中$k$爲一常數。已知$f'(a) = f''(a) = 1$, 試求$a$與$k$之值。

解: 將$x^2 + xf(x) + [f(x)]^2 = k$一式對$x$微分, 得

$$2x + f(x) + xf'(x) + 2f(x)f'(x) = 0, \tag{1}$$

再將 (1) 式微分, 得

$$2 + 2f'(x) + xf''(x) + 2[f'(x)]^2 + 2f(x)f''(x) = 0 \tag{2}$$

以$x = a$分別代入 (1) 式及 (2) 式, 整理得

$$\begin{cases} f(a) + a = 0 \\ 2f(a) + a = -6 \end{cases}$$

解得$a = 6, f(a) = -6$, 故$k = a^2 + af(a) + [f(a)]^2 = 36$。

5. 試求拋物線$y^2 = 2x$上距離點$(1,1)$最近之點。

解: 設$P(x,y)$爲拋物線$y^2 = 2x$上一點, 點P與定點$P_0(1,1)$之距離爲d, 則

$$\begin{aligned} d^2 &= (x-1)^2 + (y-1)^2 \\ &= (\frac{y^2}{2} - 1)^2 + (y-1)^2 \\ &= \frac{y^4}{4} - y^2 + 1 + y^2 - 2y + 1 \\ &= \frac{y^4}{4} - 2y + 2 \end{aligned}$$

令$f(y) = \frac{y^4}{4} - 2y$, 則$f'(y) = y^3 - 2 = (y - \sqrt[3]{2})(y^2 + \sqrt[3]{2}y + \sqrt[3]{4})$, 故$f'(y)$在$(-\infty, \sqrt[3]{2})$恆負, 在$(\sqrt[3]{2}, \infty)$恆正。因此,$f(y)$在$(-\infty, \sqrt[3]{2}]$遞減, 在$[\sqrt[3]{2}, \infty)$遞增, 故在$y = \sqrt[3]{2}$有最小值, 即$(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \sqrt[3]{2})$即爲所求。

6. 試證方程式$x^5 - 5x + 1 = 0$有三實根且僅有三實根。

解: 設$f(x) = x^5 - 5x + 1$, 則$f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$, 故$f'(x)$在$(-\infty, -1)$及$(1, \infty)$嚴格遞增, 在$[-1, 1]$嚴格遞減。因$\lim x \to -\infty f(x) = -\infty, f(-1) = 5 > 0, f(1) = -3 < 0, \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, 故由勘根定理知方程式$f(x) = 0$在$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$各恰有一根, 因此恰有三實根。

7. 試求不定積分$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx$。

解: 令$u = 1 + \sqrt{x}$, 則$x = (u-1)^2$, 故$dx = 2(u-1)du$。因此

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2} dx \\ = & \int \frac{2(u-1)}{(u-1)u^2} du \\ = & \int \frac{2}{u^2} du = -\frac{2}{u} + C = -\frac{1}{1+\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$

其中C爲一常數。

8. 試求函數$g(x)=3+\displaystyle\int_1^{x^2}\sec(t-1)dt$在$x=-1$之一次逼近式。

解: $g(-1)=3+\int_1^{(-1)^2}\sec(t-1)dt=3+\int_1^1\sec(t-1)dt=3$ $g'(x)=\frac{d}{dx}g(x)=\frac{d}{dx}(3+\int_1^{x^2}\sec(t-1)dt)=\frac{d}{dx^2}\int_1^{x^2}\sec(t-1)dt\cdot\frac{dx^2}{dx}=2x\sec(x^2-1)$。因此$g'(-1)=-2\sec 0=-2$。所以, $g(x)$在$x=-1$的一次逼近式爲$g(x)=3-2(x+3)=-2x-3$

9. 試求單位圓中諸平行弦的平均長度。

解一:(答案與解法不只一種.其它做法另行公佈) 由圓的對稱性, 我們不妨假設諸弦平行於y軸。如右圖, 通過點$(x,0)$之弦長爲$2\sqrt{1-x^2}$, 亦即$2\sin\theta$, 其中θ表相應的圓心角。因此, 諸弦長度相對於x的平均爲

$$\frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{1}2\sqrt{1-x^2}dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2},$$

因爲最後一個定積分爲單位圓面積之半; 而諸弦長度相對於θ的平均爲

$$\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}2\sin\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\frac{2}{\pi}\cos\theta|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

10. 已知水滴的蒸發速度與其表面積成正比。今有一半徑爲0.3毫米的球形水滴, 經過3分鐘後半徑變成0.25毫米, 試問該水滴全部蒸發, 總共需要多少時間。

解: 設V爲水滴的體積,A爲其表面積, 依題意知$\frac{dV}{dt}=kA$, 其中k爲一常數。設球形水滴半徑爲r, 則$A=4\pi r^2$,$V=\frac{4}{3}\pi r^3$, 故$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$。因此,$\frac{dr}{dt}=k$, 解得$r=kt+C$, 其中$C$爲一常數。當$t=0$時,$r=0.3$, 故得$C=0.3$。而$t=3$時,$r=0.25$, 故得$k=-\frac{1}{3}\times 0.05$。假設$t$分鐘後,$r=0$, 即$(-\frac{1}{3}\times 0.05)t+0.3=0$, 則$t=18$, 亦即全部蒸發共需18分鐘。